Programme de colle n° 15

semaine du 5 février 2024

Le thème de la colle est « polynômes » et « arithmétique ».
Arithmétique. Merci de respecter le programme officiel. Le programme est très spécifique à la classe de PCSI, ce n'est pas celui des MPSI.
Je mets des questions de cours sur le chapitre Dérivation (nous n'avons fait aucun exercice de TD, seulement les exemples dans le cours).

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Polynômes

- Un polynôme 1-périodique est constant, et réciproquement, c'est-à-dire $\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X) = P(X+1)\right\} = \mathbb{K}_0[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les deux égalités remarquables suivantes
  $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$ et $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines *distinctes*, alors $P = 0$.
- Prouver l'énoncé suivante (nous avons fait une preuve par récurrence finie) :

  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts.
  On a l'implication
  $$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ racines de } P \implies (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r) \text{ divise } P$$
  L'autre implication est immédiate (WHY ?).
- Prouver :

  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. La famille $\left((X-\alpha)^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

  La liberté est facile (WHY?). L'aspect générateur : on a montré à la main que $\mathrm{Vect}(T_0, \ldots, T_k) = \mathbb{K}_k[X]$ par récurrence finie sur k.
- Prouver la formule de Taylor à l'aide du résultat précédent.
- Prouver

  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$.
  *Le scalaire α est racine de multiplicité **au moins** m si et seulement si*
  $$\forall\, k \in [\![0, m-1]\!], \quad P^{(k)}(\alpha) = 0$$
  Il y a m conditions d'annulation $P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0,\ \ldots,\ P^{(m-1)}(\alpha) = 0$.

  Le colleur peut consulter le cours en ligne pour voir la définition de cette locution qui ne nécessite pas P non nul ! En revanche, pour définir la multiplicité de α, alors, oui, j'ai besoin de P non nul.

  Rappel : on a fourni une preuve par équivalence, à l'aide de la formule de Taylor.

Dérivation

- Preuve du lemme de l'extremum local
- Preuve du théorème de Rolle
- Preuve du théorème des accroissements finis
- Preuve de :

  Proposition. *L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant*
  $$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$
  est l'ensemble des fonctions linéaires.

  On pourra utiliser le petit lemme (qu'il faut être capable de redémontrer si besoin) :

  Lemme. *Les fonctions dérivables de dérivée constante sont les fonctions affines.*
- Preuve du théorème de la limite de la dérivée (limite finie et infinie).
- Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Savoir donner un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (avec preuve bien sûr).

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Ensemble des polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	 Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	Pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de X^n-1 dans $\mathbb{C}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

Rudiments d'arithmétique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM.	
Algorithme d'Euclide.	
Nombre premier.	
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.