

Programme de colle n° 16

semaine du 4 mars 2024

Le thème principal de la colle est « dérivation ».

J'ajoute un peu d'« algèbre linéaire en dimension finie » (surtout pour les questions de cours).

Remarque. Nous n'avons fait aucun exercice de TD sur la dimension finie, hormis les nombreux exercices faits en classe (confer le cours [le cours, sur ce lien cliquable](#)).

Pour être plus précis, voir le programme officiel dans les pages suivantes.

Dérivation

- Preuve du lemme de l'extremum local
- Preuve du théorème de Rolle
- Preuve du théorème des accroissements finis
- Preuve de :

Proposition. L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

est l'ensemble des fonctions linéaires.

On pourra utiliser le petit lemme (qu'il faut être capable de redémontrer si besoin) :

Lemme. Les fonctions dérivables de dérivée constante sont les fonctions affines.

- Preuve du théorème de la limite de la dérivée (limite finie et infinie).
- Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} tout entier.

$$x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Savoir donner un exemple de fonction dérivable sur \mathbb{R} mais qui n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} (avec preuve bien sûr).

Convexité

- Étude de la fonction $x \mapsto x^x$ (convexité/concavité, allure de \mathcal{C}_f).
- Preuve de l'inégalité de Young :

Soit a et b deux réels positifs et $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Algèbre linéaire en dimension finie

- Savoir montrer

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire avec E et F de dimension finie.

– On a

$$\begin{cases} f \text{ est injective} \\ \dim E = \dim F \end{cases} \implies f \text{ est bijective}$$

Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.

– On a

$$\begin{cases} f \text{ est surjective} \\ \dim E = \dim F \end{cases} \implies f \text{ est bijective}$$

Une application linéaire surjective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.

- Sous-additivité du rang

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ deux applications linéaires avec E ou F de dimension finie.

On a

$$\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

- Savoir montrer le lemme qui précède le théorème du rang :

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.

Soit S un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E .

Alors f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } f$.

Autrement dit, l'application $\hat{f} : S \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme.

$$s \mapsto f(s)$$

B - Dérivabilité

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.
La dérivabilité entraîne la continuité.
Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.
Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Interprétation géométrique : tangente.
Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.
Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

b) Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.
Égalité des accroissements finis.
Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.

Interprétations géométrique et cinématique.
La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.
Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors

f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.

La fonction f' est alors continue en a .

d) Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe \mathcal{C}^k .
Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

e) Fonctions convexes

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Interprétation géométrique.
L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme.
Exemples d'inégalités de convexité.

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

f) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe \mathcal{C}^1 .

On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

B - Espaces de dimension finie

a) Existence de bases

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .

Existence de bases en dimension finie.

Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).

b) Dimension d'un espace de dimension finie

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension d'un espace de dimension finie.

Dimension de \mathbb{K}^n , de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.

Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

c) Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.

Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.

Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.

Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

C - Applications linéaires

a) Généralités

Application linéaire.

Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.

Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F .

Bilinéarité de la composition.

Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

Image d'une application linéaire.
 Noyau d'une application linéaire.
 Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\text{Im } u = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$.
 Application linéaire de rang fini.
 Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

Notation $\text{Im } u$.
 Notation $\ker u$. Caractérisation de l'injectivité.

Notation $\text{rg}(u)$.

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.
 Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.
 Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \text{id}$.
 Automorphismes. Groupe linéaire.

Notations id_E , id .
 Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.

On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
 Notation $\text{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
 Notation u^k pour $u \in \text{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.
 Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.
 Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.
 Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.
 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimension finie.

Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u .

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2 .

La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im } u$.
 Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $n = \dim \ker u + \text{rg}(u)$.

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.
 Hyperplan.

Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.

Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$.