Programme de colle n° 17

semaine du 11 mars 2024

Le thème principal de la colle est « dérivation » et « dimension finie ».
J'ajoute un peu « de primitives et calcul d'intégrales » pour les questions de cours.
Remarque. Nous n'avons fait aucun exercice sur "primitives et calcul d'intégrales", hormis les nombreux exercices faits en classe (confer le cours le cours, sur ce lien cliquable).

Pour être plus précis, voir le programme officiel dans les pages suivantes.

Convexité

- Étude de la fonction $x \mapsto x^x$ (convexité/concavité, allure de $\mathscr{C}_f$).
- Preuve de l'inégalité de Young :

  Soit a et b deux réels positifs et $(p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\cdot$

Algèbre linéaire en dimension finie

- Savoir montrer

  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire avec E et F de dimension finie.
  - *On a*
  $$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ \dim E = \dim F \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est bijective}$$
  Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.
  - *On a*
  $$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ \dim E = \dim F \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est bijective}$$
  Une application linéaire surjective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.
- Sous-additivité du rang

  Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ deux applications linéaires avec E ou F de dimension finie.
  On a
  $$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$
- Savoir montrer le lemme qui précède le théorème du rang :

  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie.
  Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.
  Alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.

  Autrement dit, l'application $\widehat{f} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ s & \longmapsto & f(s) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Primitives, calcul d'intégrales

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue.

  Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et déterminer sa dérivée en fonction de f.
- Savoir déterminer une primitive de Arctan à l'aide d'une IPP à présenter au tableau (sans oublier de dire que les fonctions qui interviennent sont de classe $\mathscr{C}^1$!).
- Savoir déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ à l'aide d'un changement de variable utilisant la fonction sinus.
- Savoir déterminer une primitive sur $]0,\pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ (par exemple, à l'aide d'un changement de variable via tangente (ou arctangente)).

B - Dérivabilité

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé. La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite.	Définition par le taux d'accroissement. Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas $$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h),\text{ où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$ Interprétation géométrique : tangente. Interprétation cinématique : vitesse instantanée.
Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une fonction réciproque.
b) Extremum local et point critique	
Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle. Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\lvert f'\rvert$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique et cinématique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I\setminus\{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.	La fonction f' est alors continue en a.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
e) Fonctions convexes	
La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x,y)\in I^2$ et $\lambda\in[0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	Interprétation géométrique. L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme. Exemples d'inégalités de convexité.
f) Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Image d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Im} u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\ker u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

b) Endomorphismes

Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

d) Théorème du rang

Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim\ker u + \operatorname{rg}(u)$.	

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

Primitives

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Contenus	Capacités & commentaires
f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	
Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.	La démonstration est hors programme. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.