Programme de colle n° 18

semaine du 18 mars 2024

Le thème principal de la colle est « dimension finie » et « primitives et calcul d'intégrales ».
J'ajoute un peu d'analyse asymptotique pour les questions de cours.
J'invite les élèves à revoir le chapitre « fonctions rationnelles ».

Chers colleurs Je vous demande de rester modeste concernant le niveau des calculs de primitives et intégrales (confer le cours le cours, sur ce lien cliquable).
Par ailleurs, nous n'avons pas encore fait le chapitre d'intégration. Donc pas de croissance de l'intégrale, ni de positivité de l'intégrale etc...

Pour être plus précis, voir le programme officiel dans les pages suivantes.

Primitives, calcul d'intégrales

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue.
  Montrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et déterminer sa dérivée en fonction de f.
- Savoir déterminer une primitive de Arctan à l'aide d'une IPP à présenter au tableau (sans oublier de dire que les fonctions qui interviennent sont de classe $\mathscr{C}^1$!).
- Savoir déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ à l'aide d'un changement de variable utilisant la fonction sinus.
- Savoir déterminer une primitive sur $]0,\pi[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ (par exemple, à l'aide d'un changement de variable via tangente (ou arctangente)).

Analyse asymptotique (le début)

Les calculs faits en classe
Le « montrer que ... admet un DL » pourra être justifié « par opérations »

- Montrer que $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ admet un $DL_3(0)$ et le déterminer.
- Montrer que $x \mapsto \ln(1+e^x)$ admet un $DL_3(0)$ et le déterminer.
- Montrer que $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$ admet un $DL_2(0)$ et le déterminer.
- Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de $\frac{\sin(2x)-\mathrm{sh}(2x)}{(2x-\sin x-\tan x)^2}$.
- Déterminer la limite en 0 de $\frac{3\sin x - x\cos x - 2x}{\sin^5 x}$.
- Déterminons un équivalent de la suite de terme général :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n(n+1)}{1+n^2}$$

- Donner le développement asymptotique à trois termes (ici à la précision $\frac{1}{x}$) de $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
  Qu'en déduit-on concernant $\mathscr{C}_f$?

B - Espaces de dimension finie

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\ldots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\ldots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\mathrm{Im}\, u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\ker u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\,(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition. Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	Notations id_E, id. Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim \ker u + \mathrm{rg}(u)$.	
f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

Primitives

Contenus	Capacités & commentaires

Contenus	Capacités & Commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Contenus	Capacités & commentaires
f) Décomposition en éléments simples de certaines fonctions rationnelles	
Expression de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.	La démonstration est hors programme. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.