Programme de colle n° 20

semaine du 1 avril 2024

Le thème principal de la colle est « **analyse asymptotique** » et « **dénombrement** ».

Remarque pour les colleurs. Nous avons fait 2h d'exercices de dénombrement. Merci de commencer par interroger sur l'analyse asymptotique.

Un peu de dénombrement

Soit E un ensemble fini.

- En posant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-arrangements de E est ....
- En notant $n = \operatorname{card} E$, le nombre de p-combinaisons de E est ... La preuve repose sur l'égalité « Nb de p-arr. $=$ $p! \times$ Nb. de p-comb. ».
- Le nombre de p-listes strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ est ...
- Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
  - Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.
  - Le nombre d'applications injectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
  - Le nombre d'applications bijectives d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est $\begin{cases} n! & \text{si } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- L'ensemble des parties de E, noté $\mathscr{P}(E)$, est fini de cardinal ...
- Relation de Pascal
- Savoir écrire le développement du produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$ pour $n = 4$, puis pour n quelconque :

$$\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} x_{i_1}\cdots x_{i_k} \quad \text{ou encore} \quad \prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \sum_{I\in\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \prod_{i\in I} x_i$$

Mieux $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) = \sum_{I\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}(-1)^{\operatorname{card} I}\prod_{i\in I}x_i$ (l'élève vérifiera que le terme pour $I = \varnothing$ fournit bien 1).

Algèbre linéaire

- La matrice suivante est inversible, n'est-ce pas ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Sans effort (c'est-à-dire sans calcul, sans pivot de Gauss), déterminer son inverse.

- Considérons la matrice A_3 (3 car on est en Piston 3 !) suivante :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Donner une base de l'image, et son rang. Puis dans la foulée, donner une base de son noyau (utiliser th du rang et trouver une famille libre du noyau de bon cardinal).

- Prouver :

  Proposition. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*
  Il existe une base $\mathscr{B}_E$ de E et une base $\mathscr{B}_F$ de F telles que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = J_r \qquad \textit{où } r = \operatorname{rg}(f)$$

- Prouver :

  Proposition. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
  Alors il existe $(P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ$, où $r = \operatorname{rg}(A)$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. Pour tout $r \in [\![0,n]\!]$, on note $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

  Montrer que A est semblable à J_r où r est à préciser en fonction de A.

Analyse asymptotique

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans les cadres continu et discret. Les fonctions et les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Relations de comparaison : cas des fonctions	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\mathbb{R}$ ou $a=\pm\infty$. Lien entre ces relations.	Notations $$f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x)),\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$ La relation $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est définie à partir du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sous l'hypothèse que la fonction g ne s'annule pas localement. Pour la relation $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, on donne les deux formes $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} g(x)+o(g(x))$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Pour mener une étude locale de f au voisinage de $a \neq 0$, on étudie $f(a+h)$ pour $h \to 0$. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α}, $\mathrm{e}^{\gamma x}$ en $+\infty$, de $\ln^{\beta}(x)$, x^{α} en 0.
Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O. Obtention d'un équivalent par encadrement : si les fonctions réelles f, g, h vérifient $f \leqslant g \leqslant h$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$, alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.	Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Contenus	Capacités & Commentaires
Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.	
c) Relations de comparaison : cas des suites	
Adaptation rapide aux suites des définitions et résultats relatifs aux fonctions.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$.
d) Problèmes d'analyse asymptotique	
Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.