Programme de colle nº 21

semaine du 22 avril 2024

Le thème principal de la colle est « **algèbre linéaire en dimension finie (la totale)** » et « **dénombrement** ». J'ajoute les questions de cours « équations différentielles ».

Remarque pour les colleurs. Commencer par interroger sur l'algèbre linéaire.

Algèbre linéaire

- La matrice suivante est inversible, n'est-ce pas ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  Sans effort (c'est-à-dire sans calcul, sans pivot de Gauss), déterminer son inverse.

- Considérons la matrice A_3 (3 car on est en Piston 3 !) suivante :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Donner une base de l'image, et son rang. Puis dans la foulée, donner une base de son noyau (utiliser th du rang et trouver une famille libre du noyau de bon cardinal).

- Prouver :

  Proposition. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*
  Il existe une base $\mathscr{B}_E$ de E et une base $\mathscr{B}_F$ de F telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = J_r \qquad \text{où } r = \mathrm{rg}(f)$$

- Prouver :

  Proposition. *Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
  Alors il existe $(P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ$, où $r = \mathrm{rg}(A)$.

- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. Pour tout $r \in [\![0,n]\!]$, on note $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

  Montrer que A est semblable à J_r où r est à préciser en fonction de A.

Équations différentielles

- Soit $a, \rho \in \mathbb{K}$. Résoudre l'équation différentielle $y' + ay = \mathrm{e}^{\rho x}$.
- Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{x-1}$ sur $]1,+\infty[$.
- Soit a et b continues sur I.
  Savoir montrer (variation de la constante) que l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ admet au moins une solution.
  Puis expliquer à l'oral comment obtenir le résultat suivant :

  Proposition.
  Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
  Le système $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, appelé « problème de Cauchy », admet une unique solution.

- Soit a et b continues sur $\mathbb{R}$ et impaires.
  Montrer que toute solution de $y' + a(x)y = b(x)$ est paire.
- Prouver

  Soit $a \in \mathbb{K}^*$, $b, c \in \mathbb{K}$.
  Soit $r \in \mathbb{K}$.
  La fonction $\varphi_r : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{rx} \end{array}$ est solution de $ay'' + by' + cy = 0$ si et seulement si r est racine de $aX^2 + bX + c$.

Dénombrement

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\lvert A\rvert$, $\mathrm{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien.	La formule du crible est hors programme.
Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\ldots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\ldots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\operatorname{rg}(x_1,\ldots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité. Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann. Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Im} u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\ker u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\operatorname{rg}(u),\operatorname{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notations id_E, id. Notation u^k pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathcal{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $n = \dim\ker u + \mathrm{rg}(u)$.	
f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

A - Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
c) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
d) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.