Programme de colle n° 22

semaine du 29 avril 2024

Le thème principal de la colle est « **algèbre linéaire en dimension finie (la totale)** » et « **équations différentielles** ».
J'ajoute les questions de cours de « probabilités ».

Remarque pour les colleurs. Commencer par interroger sur l'algèbre linéaire.
Attention, le raccordement des solutions est « hors programme » (bien sûr, on peut guider l'élève et lui demander de résoudre par analyse-synthèse ceci ou cela).

Équations différentielles

- Soit $a, \rho \in \mathbb{K}$. Résoudre l'équation différentielle $y' + ay = \mathrm{e}^{\rho x}$.
- Résoudre l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.
- Soit a et b continues sur I.
  Savoir montrer (variation de la constante) que l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ admet au moins une solution.
  Puis expliquer à l'oral comment obtenir le résultat suivant :

  Proposition.
  Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
  Le système $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ *, appelé « problème de Cauchy », admet une unique solution.*
- Soit a et b continues sur $\mathbb{R}$ et impaires.
  Montrer que toute solution de $y' + a(x)y = b(x)$ est paire.
- Prouver

  Soit $a \in \mathbb{K}^*$, $b, c \in \mathbb{K}$.
  Soit $r \in \mathbb{K}$.
  La fonction $\varphi_r : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{rx} \end{array}$ *est solution de* $ay'' + by' + cy = 0$ *si et seulement si* r *est racine de* $aX^2 + bX + c$.

Un peu de probas

- Prouver l'énoncé suivant

  Proposition.
  – Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On a
  $$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \;=\; 1$$
  – Réciproquement, si Ω est un univers fini, et si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels de $[0, 1]$ telle que $\sum\limits_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, 1]$ telle que
  $$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) \;=\; p_\omega$$
- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités totales.
- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités composées.
- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
  On tire au hasard s boules **sans** remise (avec $s \leqslant n$).
  Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note E_k l'événement « le plus grand numéro obtenu est égal à k ».
  – Déterminer la probabilité de E_k.
  – En utilisant le SCÉ $(E_1, \dots, E_n)$, retrouver une formule bien connue.
  Quelle formule connue trouve-t-on en exploitant le fait que $(E_1, \dots, E_n)$ est un SCÉ ?
- Même exercice que le précédent **avec** remise.
- Savoir prouver l'exercice suivant

  Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements.
  – Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors A et B sont indépendants.
  Un événement négligeable est indépendant de n'importe quel événement.
  – Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors A et B sont indépendants.
  Un événement presque sûr est indépendant de n'importe quel événement.

B - Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Ensemble des solutions de l'équation homogène. Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée. Méthode de la variation de la constante. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition. Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\ldots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\ldots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{rg}(x_1,\ldots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\operatorname{Im} u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\ker u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\text{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\text{rg}(u),\text{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties. Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition.	Notations id_E, id. Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	La démonstration peut être traitée plus tard, à l'aide de la dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\ker u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\, u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim\ker u + \mathrm{rg}(u)$.	
f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	
Forme linéaire.	
Hyperplan.	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	

A - Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base. Isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases. Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	Exemple : matrice d'une rotation vectorielle du plan, d'une homothétie.
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes. Matrice de la réciproque d'un isomorphisme.
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice, rang d'une matrice	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$.
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n.	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. Lien entre les diverses notions de rang.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application : calcul du rang.
Invariance du rang par transposition.	Ce résultat est admis.
c) Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur. Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
Matrices semblables.	Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.
d) Systèmes linéaires	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions. Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si B appartient à l'image de A.	
Si A est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.