Programme de colle n° 23

semaine du 13 Mai 2024

Le thème principal de la colle est « **équations différentielles** » et « **Probabilités (sans variables aléatoires)** ».
J'ajoute les questions de cours du chapitre intégration

Remarque pour les colleurs. Attention, le raccordement des solutions est « hors programme » (bien sûr, on peut guider l'élève et lui demander de résoudre par analyse-synthèse ceci ou cela).
Attention, nous n'avons pas encore parlé de variables aléatoires.

Un peu de probas

- Prouver l'énoncé suivant

  Proposition.
  - Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. On a
  $$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = 1$$
  - Réciproquement, si Ω est un univers fini, et si $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une famille de réels de $[0,1]$ telle que $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \to [0,1]$ telle que
  $$\forall\, \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}\big(\{\omega\}\big) = p_\omega$$
- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités totales.
- Savoir énoncer et prouver la formule des probabilités composées.
- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
  On tire au hasard s boules **sans** remise (avec $s \leqslant n$).
  Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note E_k l'événement « le plus grand numéro obtenu est égal à k ».
  - Déterminer la probabilité de E_k.
  - En utilisant le SCÉ $(E_1, \dots, E_n)$, retrouver une formule bien connue.

  Quelle formule connue trouve-t-on en exploitant le fait que $(E_1, \dots, E_n)$ est un SCÉ ?
- Même exercice que le précédent **avec** remise.
- Savoir prouver l'exercice suivant

  Proposition. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ deux événements.
  - Si $\mathbb{P}(A) = 0$, alors A et B sont indépendants.
    Un événement négligeable est indépendant de n'importe quel événement.
  - Si $\mathbb{P}(A) = 1$, alors A et B sont indépendants.
    Un événement presque sûr est indépendant de n'importe quel événement.

Un peu d'intégration

- Théorème fondamental de l'analyse
- Taylor reste intégral (par récurrence, ou bien par somme télescopique, au choix de l'élève).
- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, non nulle et telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t$.
  Montrer que f est constante égale à 1 (cf. correction page suivante).
- Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que g est positive.
  Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que (cf. correction page 3).
  $$\int_{[a,b]} fg = f(c) \int_{[a,b]} g$$
- Soit $x \in [0, +\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
  Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite vaut $\ln 2$.
- Savoir énoncer le théorème des Sommes de Riemann et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Posons $g = f - f^2$. Autrement dit, $g : t \mapsto f(t) - f(t)^2$.
On a

- g est continue par opérations (car f est continue)
- g est positive, car f est à valeurs dans $[0,1]$
- $\displaystyle\int_0^1 g = 0$ par hypothèse

D'après le théorème aux trois hypothèses, on en déduit que g est la fonction nulle.
Donc $f = f^2$.
Attention ici, à ne pas dire soit $f = 0$, soit $f = 1$!!!!
D'où $\forall\, t \in [0,1],\ \Big(f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1\Big)$
Ainsi l'image de f est incluse dans $\{0,1\}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction continue f est un intervalle, qui est donc soit le singleton $\{0\}$, soit le singleton $\{1\}$.
Aurement dit, on a

$$\Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 0\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 1\Big)$$

Comme f n'est pas nulle dans l'énoncé, on en déduit que f est constante égale à 1.

Posons

$$\varphi : x \longmapsto \int_a^b fg - f(x)\int_a^b g \quad = \quad \int_a^b \big(f(t)-f(x)\big)\, g(t)\mathrm{d}t$$

On veut montrer qu'il existe c tel que $\varphi(c) = 0$.

Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M tels que

$$f(x_m) = \min_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad f(x_M) = \max_{[a,b]} f$$

D'où

$$\forall\, t \in [a,b], \qquad f(t) - f(x_m) \geqslant 0$$

D'où, en multipliant par $g(t) \geqslant 0$,

$$\forall\, t \in [a,b], \qquad \big(f(t)-f(x_m)\big)g(t) \geqslant 0$$

Par positivité de l'intégrale,

$$\int_a^b \big(f(t)-f(x_m)\big)\, g(t)\mathrm{d}t \;\geqslant\; 0$$

c'est-à-dire $\varphi(x_m) \geqslant 0$.
On montre de même que $\varphi(x_M) \leqslant 0$.
Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par φ.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 est atteint par φ.
Autrement dit, il existe $c \in \overset{\curvearrowleft\!\curvearrowright}{[x_m, x_M]}$ tel que $\varphi(c) = 0$.

Autre solution.
On distingue deux cas.

• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$. Alors d'après le « critère de nullité » (toutes les hypothèses sont réunies), g est la fonction nulle.

• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale (savoir d'où cela sort), on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t > 0$.
Montrons que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \quad \text{est une valeur intermédiaire pour } f.$$

Sur le segment $[a,b]$, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes, disons $m = f(x_m)$ et $M = f(x_M)$.
On a

$$\forall\, t \in [a,b], \quad m \leqslant f(t) \leqslant M$$

puis, en multipliant par $g(t) \geqslant 0$,

$$\forall\, t \in [a,b], \quad mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$

Par croissance de l'intégrale,

$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

D'où en divisant par $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ qui est > 0

$$f(x_m) = m \;\leqslant\; \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \;\leqslant\; M = f(x_M)$$

Ainsi $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$ est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, c'est une valeur atteinte par f. Autrement dit, il existe $c \in \overset{\curvearrowleft\!\curvearrowright}{[x_m, x_M]} \subset [a,b]$ tel que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} = f(c)$$

B - Primitives et équations différentielles linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. Lien entre intégrales et primitives.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. On rappelle sans démonstration que, pour une fonction continue f, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ a pour dérivée f. On pourra noter $\int^{x} f(t)\mathrm{d}t$ une primitive générique de f.
Calcul des primitives, application au calcul d'intégrales.	Primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$, application aux primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions exponentielle, logarithme, puissances, trigonométriques et hyperboliques, et des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Intégration par parties, changement de variable.	Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
b) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation différentielle linéaire du premier ordre $$y' + a(x)y = b(x)$$ où a et b sont des fonctions réelles ou complexes définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une fonction réelle ou complexe, définie et continue sur un intervalle.	Équation homogène associée.
Ensemble des solutions de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Principe de superposition.	
Description de l'ensemble des solutions de l'équation à partir d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre polynôme, de la forme $x \mapsto A\mathrm{e}^{\lambda x}$ avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance. Extension au cas de n événements.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	