Programme de colle n° 24

semaine du 20 Mai 2024

Le thème principal de la colle est « **Probabilités (sans variables aléatoires)** » et « **Intégration** ».

Remarque pour les colleurs. Attention, nous n'avons pas encore parlé de variables aléatoires.
Nous avons fait peu d'heures de TD d'intégration (la fin de l'année est assez dense).

Un peu d'intégration

- Théorème fondamental de l'analyse
- Taylor reste intégral (par récurrence, ou bien par somme télescopique, au choix de l'élève).
- Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, non nulle et telle que $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t$.
  Montrer que f est constante égale à 1 (cf. correction page suivante).
- Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que g est positive.
  Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que (cf. correction page 3).
  $$\int_{[a,b]} fg = f(c) \int_{[a,b]} g$$
- Soit $x \in [0,+\infty[$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que
  $$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
  Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite vaut $\ln 2$.
- Savoir énoncer le théorème des Sommes de Riemann et déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Des petites choses sur les espaces euclidiens

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité avec démonstration
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité avec démonstration
- Savoir ENONCER proprement Gram-Schmidt. Et savoir l'appliquer dans un cas concret (je ne demande pas de connaître la preuve formalisée).
- Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée.
- Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre. En particulier, une famille orthonormée de E est libre.
- Savoir prouver

  Soit E un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
  Alors
  $$E = F \oplus F^{\perp}$$
- Savoir prouver

  Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie).
  Soit F un sev de E. Alors
  $$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E \quad \textit{et} \quad (F^{\perp})^{\perp} = F$$
- Savoir prouver

  Soit $x \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
  Notons p_F la projection orthogonale sur F.
  La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

  Autrement dit :
  $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$
  $\forall\, y \in F, \quad \Big(d(x,F) = \|x-y\| \iff y = p_F(x) \Big)$
- Expliquer toute la démarche pour déterminer (je ne demande pas de faire les calculs) :
  $$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(t - (a\cos t + b \sin t) \Big)^2 \mathrm{d}t.$$

Posons $g = f - f^2$. Autrement dit, $g : t \mapsto f(t) - f(t)^2$.
On a

- g est continue par opérations (car f est continue)
- g est positive, car f est à valeurs dans $[0,1]$
- $\displaystyle\int_0^1 g = 0$ par hypothèse

D'après le théorème aux trois hypothèses, on en déduit que g est la fonction nulle.
Donc $f = f^2$.
Attention ici, à ne pas dire soit $f = 0$, soit $f = 1$!!!!
D'où $\forall\, t \in [0,1]$, $\Big(f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1\Big)$
Ainsi l'image de f est incluse dans $\{0,1\}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[0,1]$ par la fonction continue f est un intervalle, qui est donc soit le singleton $\{0\}$, soit le singleton $\{1\}$.
Aurement dit, on a

$$\Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 0\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall\, t \in [0,1],\ f(t) = 1\Big)$$

Comme f n'est pas nulle dans l'énoncé, on en déduit que f est constante égale à 1.

Posons
$$\varphi : x \longmapsto \int_a^b fg - f(x)\int_a^b g \quad = \quad \int_a^b \big(f(t)-f(x)\big)\, g(t)\mathrm{d}t$$
On veut montrer qu'il existe c tel que $\varphi(c)=0$.

Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M tels que
$$f(x_m)=\min_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad f(x_M)=\max_{[a,b]} f$$
D'où
$$\forall\, t\in[a,b], \qquad f(t)-f(x_m)\geqslant 0$$
D'où, en multipliant par $g(t)\geqslant 0$,
$$\forall\, t\in[a,b], \qquad \big(f(t)-f(x_m)\big)g(t)\geqslant 0$$
Par positivité de l'intégrale,
$$\int_a^b \big(f(t)-f(x_m)\big)\, g(t)\mathrm{d}t \;\geqslant\; 0$$
c'est-à-dire $\varphi(x_m)\geqslant 0$.
On montre de même que $\varphi(x_M)\leqslant 0$.
Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par φ.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 est atteint par φ.
Autrement dit, il existe $c\in \overset{\frown}{[x_m, x_M]}$ tel que $\varphi(c)=0$.

Autre solution.
On distingue deux cas.
• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=0$. Alors d'après le « critère de nullité » (toutes les hypothèses sont réunies), g est la fonction nulle.

• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale (savoir d'où cela sort), on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t>0$.
Montrons que
$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \quad \text{est une valeur intermédiaire pour } f.$$
Sur le segment $[a,b]$, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes, disons $m=f(x_m)$ et $M=f(x_M)$.
On a
$$\forall\, t\in[a,b], \quad m\leqslant f(t)\leqslant M$$
puis, en multipliant par $g(t)\geqslant 0$,
$$\forall\, t\in[a,b], \quad mg(t)\leqslant f(t)g(t)\leqslant Mg(t)$$
Par croissance de l'intégrale,
$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
D'où en divisant par $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ qui est >0
$$f(x_m)=m \;\leqslant\; \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \;\leqslant\; M=f(x_M)$$

Ainsi $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$ est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, c'est une valeur atteinte par f. Autrement dit, il existe $c\in\overset{\frown}{[x_m, x_M]}\subset[a,b]$ tel que
$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}=f(c)$$

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.	
L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.

Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

La construction de l'intégrale n'est pas un attendu du programme, mais les étudiants doivent avoir été sensibilisés à cette problématique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f \rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Taylor-Lagrange.	