Programme de colle n° 25

semaine du 27 Mai 2024

Le thème principal de la colle est « **Intégration** » et « **Espaces euclidiens** ».

Des petites choses sur les espaces euclidiens

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité avec démonstration
- Inégalité triangulaire et cas d'égalité avec démonstration
- Savoir ENONCER proprement Gram-Schmidt. Et savoir l'appliquer dans un cas concret (je ne demande pas de connaître la preuve formalisée).
- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique est une base orthonormée.
- Une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* de E est libre. En particulier, une famille orthonormée de E est libre.
- Savoir prouver

    Soit E un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
    Alors $E = F \oplus F^\perp$
- Savoir prouver

    Soit E un espace euclidien (donc de dimension finie).
    Soit F un sev de E. Alors
    $$\dim F + \dim F^\perp = \dim E \quad \textit{et} \quad (F^\perp)^\perp = F$$
- Savoir prouver

    Soit $x \in E$. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
    Notons p_F la projection orthogonale sur F.
    La distance du vecteur x à F est atteinte en un unique point de F, à savoir $p_F(x)$.

    Autrement dit :
    $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$
    $\forall y \in F, \quad \Big(d(x,F) = \|x-y\| \iff y = p_F(x)\Big)$
- Expliquer toute la démarche pour déterminer (je ne demande pas de faire les calculs) :
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \Big(t - (a\cos t + b\sin t)\Big)^2 \mathrm{d}t.$$

Des petites choses sur les variables aléatoires

- On lance deux dés équilibrés.
  Notons X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus.
  Déterminer la loi conjointe et les deux lois marginales.
- Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer. Déterminer les lois de X et $|X|$.
- On lance un dé équilibré.
  On note X la variable égale au numéro obtenu. On note A l'événement « le numéro est pair ».
  Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A.
- Soit X et Y deux variables indépendantes.
  On suppose que X (resp. Y) suit la loi de Bernoulli de paramètre p (resp. p').
  Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.
  Même question avec $Z = \max(X,Y)$ puis $Z = XY$.
- On considère X et Y deux VA indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
  Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
- Somme de deux binomiales indépendantes.
- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise.
  On dit qu'il y a rencontre au $k^{\text{ème}}$ tirage si la boule tirée porte le numéro k.
  Déterminer le nombre moyen de rencontres.
- Preuve de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
- Espérance et variance des lois usuelles (à piocher parmi Uniforme, Bernoulli, Binomiale).
- Savoir énoncer Koenig-Huygens (pour la variance, et la covariance). Savoir énoncer le théorème de transfert.

Intégration

Cette section a pour objectif d'établir les principales propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment de manière à achever la justification des propriétés présentées dans la section « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Elle offre l'occasion de revenir sur les techniques de calcul intégral, mais aussi de traiter des exercices d'esprit plus théorique.
Les méthodes de calcul approché d'intégrales donnent l'occasion de revenir sur la problématique de l'approximation. On pourra ainsi comparer les performances de la méthode des rectangles et de celle des trapèzes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions en escalier	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier. Intégrale d'une fonction en escalier.	Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Interprétation géométrique de l'intégrale. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f \rvert$.	
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
Si f est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$.	
Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.	Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
c) Sommes de Riemann	
Pour f continue sur le segment $[a,b]$, $$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$	Interprétation géométrique. La démonstration pourra être proposée dans le cas où f est lipschitzienne.
d) Lien entre intégrale et primitive	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.	
e) Inégalité de Taylor-Lagrange	
Inégalité de Taylor-Lagrange.	La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible. L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme. On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale).
f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes	
Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. Linéarité, majoration du module de l'intégrale. Inégalité de Taylor-Lagrange.	Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	
Produit scalaire.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\vert y)$, $x \cdot y$.
Espace préhilbertien, espace euclidien.	
Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.	Expression $X^\top Y$.
Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b f g$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
Identité remarquable $\Vert x+y\Vert^2 = \Vert x\Vert^2 + \Vert y\Vert^2 + 2\langle x, y\rangle$.	Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan.
Distance d'un vecteur à F.	Notation $d(x, F)$.
Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	