Programme de colle n° 26

semaine du 3 juin 2024

Le thème principal de la colle est « **Espaces euclidiens** » et « **Variables aléatoires** ».

Des petites choses sur les variables aléatoires

- On lance deux dés équilibrés.
  Notons X la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et Y est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus.
  Déterminer la loi conjointe et les deux lois marginales.
- Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer. Déterminer les lois de X et $|X|$.
- On lance un dé équilibré.
  On note X la variable égale au numéro obtenu. On note A l'événement « le numéro est pair ».
  Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A.
- Soit X et Y deux variables indépendantes.
  On suppose que X (resp. Y) suit la loi de Bernoulli de paramètre p (resp. p').
  Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.
  Même question avec $Z = \max(X, Y)$ puis $Z = XY$.
- On considère X et Y deux VA indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
  Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
- Somme de deux binomiales indépendantes.
- Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise.
  On dit qu'il y a rencontre au $k^{\text{ème}}$ tirage si la boule tirée porte le numéro k.
  Déterminer le nombre moyen de rencontres.
- Preuve de Markov et Bienaymé-Tchebychev.
- Espérance et variance des lois usuelles (à piocher parmi Uniforme, Bernoulli, Binomiale).
- Savoir énoncer Koenig-Huygens (pour la variance, et la covariance). Savoir énoncer le théorème de transfert.

Des petites choses sur les séries

- Preuve de la convergence d'une série géométrique dans le cas où la raison est...
- Preuve de la nature d'une série de Riemann :

  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a
  $$\textit{la série} \sum \frac{1}{n^\alpha} \textit{ converge} \iff \alpha > 1$$
- Apprendre la preuve et la rédaction de :

  Soit $z \in \mathbb{C}$ Montrer que les séries $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et que
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
- La preuve dans le cas d'une suite réelle de :

  Une série absolument convergente est convergente.
- Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n$ converge.
- Être au point sur ce **Attention.**
  Chez les suites, on a :
  $$(u_n) \text{ CV} \implies (u_{n+1}) \text{ CV} \qquad \text{et} \qquad (u_n) \text{ CV} \implies (u_{2n}) \text{ CV}$$
  Chez les séries, on a :
  $$\sum u_n \text{ CV} \implies \sum u_{n+1} \text{ CV} \qquad \text{mais} \qquad \sum u_n \text{ CV} \not\Longrightarrow \sum u_{2n} \text{ CV}$$
  Mais il est bien vrai que, si (u_n) est à termes positifs, alors $\quad \sum u_n \text{ CV} \implies \sum u_{2n} \text{ CV}$

Espaces préhilbertiens réels

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. L'objectif de cette section, qu'il est essentiel d'illustrer par de nombreuses figures, est de la généraliser, afin d'exploiter l'intuition acquise en dimension 2 ou 3 pour résoudre des problèmes posés dans un contexte plus abstrait.

Les familles de polynômes orthogonaux donnent des illustrations pertinentes des notions abordées dans cette section.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x \cdot y$. Expression $X^\top Y$. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$ et $\mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.
b) Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Identité remarquable $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$.	 Exemples : sommes finies, intégrales. Formule de polarisation associée.
c) Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie. Famille orthogonale, orthonormée (ou orthonormale). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.	Notation $X^\perp$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
d) Bases orthonormées	
Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormée incomplète. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace F de dimension finie. Projection orthogonale sur F. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x dans une base orthonormée de F. Distance d'un vecteur à F. Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F.	En dimension finie : dimension de $F^\perp$, vecteur normal à un hyperplan. Notation $d(x,F)$.

Probabilités

A - Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).

Contenus	Capacités & Commentaires
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.

b) Espaces probabilisés finis

Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.	
L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

d) Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

e) Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

f) Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y) = (x,y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	La démonstration est hors programme. Extension au cas de plus de deux coalitions.

B - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe	
Espérance $\mathrm{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.
b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance	
Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.
c) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.