Programme de colle n° 3

semaine du 9 octobre 2023

Remarque pour les colleurs.
Le thème de la colle est « nombres complexes » et le chapitre « Calculs » qui inclut la manipulation des coefficients binomiaux..
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.
Nous n'avons pas encore travaillé sur le TD « applications ».
Je vous propose d'insister sur le chapitre « calculs », en manipulant éventuellement les nombres complexes en même temps!

Preuves et petits exercices à connaître (questions de difficulté inégale...)

Nombres complexes et trigonométrie

- Preuve de $\mathbb{U}_n = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right\}$.

Un peu du chapitre « Calculs »

- Le coefficient binomial est un entier : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z}\ \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$
- Preuve de la formule de Bernoulli
- Preuve de la formule du binôme de Newton
- Preuve des formules suivantes (exercice vu en classe). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p+1}$$

  On a :

$$S_n = 2^{n-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^{n-1}$$

- Preuve des deux formules suivantes (exercice vu en classe).
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

- **Formule de Pascal généralisée** (exercice fait en classe par télescopage et par récurrence)
  On a

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N},\quad \sum_{i=c}^{m} \binom{i}{c} = \binom{m+1}{c+1}$$

Un peu du chapitre « Applications »

- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde est une surjection.
- Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective) alors f est injective (resp. g est surjective).
- Si $f \in F^E$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- **Chaussettes et chaussures.** Si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

  Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$

  Vérifier que f est bien définie.
  Puis montrer que f est bijective.
- Soit $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to E$ deux applications telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ est bijective.
  Montrer, « sans se fatiguer », que φ et ψ sont bijectives.

Compléments de calcul algébrique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum_{i\in I} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$, $\prod_{i\in I} a_i$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.

Nombres complexes (la totale)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\|z-z'\|$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	Notation $\mathbb{U}$.
Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}p} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}$.	Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $(r>0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z-a$.	
Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.
g) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour z complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z. Module et arguments de e^z.
h) Interprétation géométrique des nombres complexes	
Interprétation géométrique des module et arguments de $\dfrac{c-a}{b-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Interprétation géométrique de la conjugaison.	Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. L'étude générale des similitudes est hors programme.