

Programme de colle n° 4

semaine du 16 octobre 2023

Remarque pour les colleurs.

Le thème de la colle est « calculs algébrique », « Applications, Ensembles » et « généralités sur les fonctions réelles », sans les fonctions usuelles

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Preuves et petits exercices à connaître (questions de difficulté inégale...)

Un peu du chapitre « Calculs »

- **Formule de Pascal généralisée** (exercice fait en classe par télescopage et par récurrence)

On a

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall c \in \mathbb{N}, \sum_{i=c}^m \binom{i}{c} = \binom{m+1}{c+1}$$

Un peu du chapitre « Applications »

- La composée de deux injections est une injection.
- La composée de deux surjections dont l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde est une surjection.
- Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective) alors f est injective (resp. g est surjective).
- Si $f \in F^E$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- **Chaussettes et chaussures.** Si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } f: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ z &\longmapsto \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

Vérifier que f est bien définie.

Puis montrer que f est bijective.

- Soit $\varphi: E \rightarrow F$ et $\psi: F \rightarrow E$ deux applications telles que $\varphi \circ \psi \circ \varphi$ est bijective. Montrer, « sans se fatiguer », que φ et ψ sont bijectives.

Un peu du chapitre « Fonctions réelles »

- Soit D une partie quelconque de \mathbb{R} et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est strictement monotone, alors elle est injective.
- Soit $f: X \rightarrow Y$ une bijection où X, Y sont des parties de \mathbb{R} . Si f est strictement monotone, alors f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f .
- Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ est bornée} \iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leq K$$

- Soit $f:]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
$$x \longmapsto \frac{1}{x+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est n -fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et on a $f^n: x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.

Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
Ensemble des parties d'un ensemble.
Recouvrement disjoint, partition

Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, \bar{A} et A^c pour le complémentaire.

Notation $\mathcal{P}(E)$.

d) Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble.
Graphe d'une application.

Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .

Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application.

Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E .

Famille d'éléments d'un ensemble.
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.
Restriction et prolongement.
Image directe.
Image réciproque.

Notation $\mathbb{1}_A$.

Notation $f|_A$.

Notation $f(A)$.

Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.

Composition.
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Notation f^{-1} . Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

Compléments de calcul algébrique

a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$. Cas où I est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=0}^n x^k$.

Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Exemples de sommes triangulaires.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.
Formule du binôme dans \mathbb{R} .

Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k < 0$ et $k > n$.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$. Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Parité, imparité, périodicité.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Somme, produit, composée.
Monotonie (large et stricte).
Fonctions majorées, minorées, bornées.

Traduction géométrique de ces propriétés.
La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.
