

# Programme de colle n° 6

semaine du 13 novembre 2023

## Remarque pour les colleurs.

Le thème de la colle est « fonctions usuelles » et « nombres réels ».

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

## Un peu du chapitre « Fonctions usuelles »

- Preuve de  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  et  $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- En **admettant** que  $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ , savoir prouver  $\frac{(\ln x)^b}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  pour  $a, b > 0$ .
- Définition de la fonction Arctangente; variations; graphe; dérivabilité
- Définition de la fonction Arcsinus; variations; graphe; dérivabilité
- Définition de la fonction Arccosinus; variations; graphe; dérivabilité
- Deux preuves de (en utilisant la dérivation, puis sans dériver avec la définition de Arctan)

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Étude de la fonction  $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$ .
- Présentation des fonctions ch et sh : définition, variations, graphe, dérivabilité
- Soit  $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions réelles dérivables sur  $I$ .  
Montrer que la fonction complexe  $f : t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$  est dérivable sur  $I$  et donner sa dérivée.

## Un peu du chapitre « Nombres réels »

- Soit  $A$  et  $B$  deux parties de  $\mathbb{R}$  non vides telles que  $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$ .  
Montrer que  $A$  est majorée, que  $B$  est minorée et montrer que  $\sup A \leq \inf B$ .
- Soit  $A$  et  $B$  deux parties non vides et majorées de  $\mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
On définit la partie  $A + B$  comme on imagine.  
Montrer  $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$  en ayant justifié l'existence des bornes sup.

## A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction  $f$  à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de  $f$  celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme  $x \mapsto f(x + a)$  ou  $x \mapsto f(ax)$ .  
Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.  
La fonction  $f$  est bornée si et seulement si  $|f|$  est majorée.

#### b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Notations  $f'(x)$ ,  $\frac{d}{dx}(f(x))$ .

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Dérivées d'ordre supérieur.

Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

### c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Relations  $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ ,  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ ,  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ .

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités  $\exp(x) \geq 1 + x$ ,  $\ln(1 + x) \leq x$ .

Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.

Fonctions hyperboliques sh, ch.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Dérivée, variations, représentation graphique.

La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est  $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ .

### d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Dérivée de  $\exp(\varphi)$  où  $\varphi$  est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.

Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

## Nombres réels

### a) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de  $\mathbb{R}$ .

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de  $\mathbb{R}$  admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$  est un intervalle si et seulement si pour tous  $a, b \in X$  tels que  $a \leq b$ ,  $[a, b] \subset X$ .

Notations  $\sup X$ ,  $\inf X$ .

On convient que  $\sup X = +\infty$  si  $X$  est non majorée.