

Programme de colle n° 7

semaine du 20 novembre 2023

Remarque pour les colleurs.

Le thème de la colle est « nombres réels » et « matrices », mais je laisse encore quelques questions de cours sur « fonctions usuelles » pour ce groupe.

J'ai parlé de la trace d'une matrice carrée dans le cours, bien que cela soit officiellement du programme de deuxième année.

J'ai parlé en fin de cours, rapidement, en guise de "teasing" du critère d'inversibilité en terme de $AX = 0$ (avec le noyau, donc!), mais nous ne l'avons pas utilisé. Et pour la plupart des exercices, on peut s'en passer.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Un peu du chapitre « Fonctions usuelles »

- Preuve de $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- En **admettant** que $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, savoir prouver $\frac{(\ln x)^b}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour $a, b > 0$.
- Définition de la fonction Arctangente; variations; graphe; dérivabilité
- Définition de la fonction Arcsinus; variations; graphe; dérivabilité
- Définition de la fonction Arccosinus; variations; graphe; dérivabilité
- Deux preuves de (en utilisant la dérivation, puis sans dériver avec la définition de Arctan)

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Étude de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$.
- Présentation des fonctions ch et sh : définition, variations, graphe, dérivabilité

Un peu du chapitre « Nombres réels »

- Soit A et B deux parties de \mathbb{R} non vides telles que $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.
Montrer que A est majorée, que B est minorée et montrer que $\sup A \leq \inf B$.
- Soit A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On définit la partie $A + B$ comme on imagine.
Montrer $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ en ayant justifié l'existence des bornes sup.

Un peu du chapitre « matrices »

- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaison linéaire et par produit. Idem pour triangulaires inférieures et diagonales.
- Toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'implication

$$\left(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(AM) = 0 \right) \implies A = 0$$

- Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. On a l'équivalence

$$A \in \text{GL}_2(\mathbb{K}) \iff ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas, $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

On pourra utiliser le lemme suivant :

Pour une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ quelconque carrée de taille 2, on a l'égalité

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0$$

- Résoudre le système linéaire $\begin{cases} x + 2y + 3z = -3 \\ 4x + 5y + 6z = 9 \end{cases}$ (pour les élèves : tous les calculs sont sur le poly!).

Nombres réels

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Propriété de la borne supérieure

Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de \mathbb{R} .
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de \mathbb{R} admet une borne supérieure (resp. inférieure).
Une partie X de \mathbb{R} est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Notations $\sup X$, $\inf X$.
On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Opérations sur les matrices

Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps \mathbb{K} . Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.
Matrices élémentaires.

Produit matriciel; bilinéarité, associativité.

Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Transposée d'une matrice.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A .
Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.

Notation A^\top .

b) Opérations élémentaires

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.

c) Systèmes linéaires

Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.
Système compatible.

Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A .
On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.

d) Ensemble des matrices carrées

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrice identité, matrice scalaire.
Matrices symétriques, antisymétriques.
Formule du binôme.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.

Non commutativité si $n \geq 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Notation I_n .
Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Application au calcul de puissances.

CONTENUS

Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.

Inverse d'une transposée.

Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.

Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Notation $GL_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.

Toute technicité est exclue.

Cas particulier des matrices diagonales.