Programme de colle n° 8

semaine du 27 novembre 2023

Remarque pour les colleurs.
Le thème de la colle est « matrices et systèmes linéaires » et « nombres réels ».
J'ai parlé de la trace d'une matrice carrée dans le cours, bien que cela soit officiellement du programme de deuxième année.
J'ai parlé en fin de cours, rapidement, en guise de "teasing" du critère d'inversibilité en terme de $AX = 0$ (avec le noyau, donc!), mais nous ne l'avons pas utilisé. Et pour la plupart des exercices, on peut s'en passer.
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Un peu du chapitre « matrices »

- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par combinaison linéaire et par produit. Idem pour triangulaires inférieures et diagonales.
- Toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer l'implication
$$\Big(\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \operatorname{tr}(AM) = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad A = 0$$
- Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. On a l'équivalence
$$A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad ad - bc \neq 0$$
Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
On pourra utiliser le lemme suivant :

  Pour une matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ quelconque carrée de taille 2, on a l'égalité
$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$$
- Résoudre le système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -3 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 9 \end{array}\right.$ (pour les élèves : tous les calculs sont sur le poly!).

Un peu (beaucoup ?!) du chapitre « Suites numériques »

- Preuve epsilonesque de :

  Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.
- Preuve epsilonesque de l'unicité de la limite :

  Soit u une suite et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$. Alors $\ell = \ell'$.
- Enoncé et preuve du théorème des Gendarmes.
- Preuve du théorème de la limite monotone (disons pour une suite croissante).
- Preuve du théorème de convergence des suites adjacentes.
- Savoir faire les calculs de cet exercice

  Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ *Déterminer u_n en fonction de n.*
- Savoir refaire cet exercice (fait dans le cours, posé en interro, et mal maîtrisé pour l'instant) :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
  Montrer que la suite (x_n) est monotone.
- Étude de la suite $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$
- Savoir refaire ce mini-exercice :

  Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$ *Donner une expression de u_n.*

Nombres réels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
d) Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Inverse d'une transposée. Inverse d'un produit de matrices inversibles. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.