Programme de colle n° 9
semaine du 4 décembre 2023

Remarque pour les colleurs.
Le thème de la colle est « matrices et systèmes linéaires » et **surtout « Suites numériques »**.
PAS encore d'algèbre linéaire, mais vous pouvez en donner dans les questions de cours
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Un peu (beaucoup ?!) du chapitre « Suites numériques »

- Preuve epsilonesque de :

  Soit u une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.
- Preuve epsilonesque de l'unicité de la limite :

  Soit u une suite et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$. Alors $\ell = \ell'$.
- Enoncé et preuve du théorème des Gendarmes.
- Preuve du théorème de la limite monotone (disons pour une suite croissante).
- Preuve du théorème de convergence des suites adjacentes.
- Savoir faire les calculs de cet exercice

  Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$ *Déterminer u_n en fonction de n.*
- Savoir refaire cet exercice (fait dans le cours, posé en interro, et mal maîtrisé pour l'instant) :

  Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que l'équation $x + \ln x = n$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
  Montrer que la suite (x_n) est monotone.
- Étude de la suite $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$
- Savoir refaire ce mini-exercice :

  Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -\frac{1}{3} u_n + 4 \end{cases}$ *Donner une expression de u_n.*
- Preuve de $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$ et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Un peu du chapitre « Espaces vectoriels »

Pour les colleurs. Quand rien n'est précisé, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel « quelconque », avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (qui sont des corps infinis !)

- Voici des parties de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de E ?

  $$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$
- Soit F une partie de E stable par combinaison linéaire. On a : $0_E \in F \iff F$ est non vide.
- Un sous-espace vectoriel de E est un ensemble $\begin{cases} \text{fini} & \text{s'il est réduit à } \{0_E\} \\ \text{infini} & \text{sinon} \end{cases}$
- L'intersection et la somme de deux sev de E est un sev de E.
- Pas de Loi de Morgan avec la somme et l'intersection d'espaces vectoriels $\cancel{H \cap (F+G) = H \cap F + H \cap G}$

  En revanche, une inclusion est toujours vraie, laquelle ?
  Donner un contre-exemple dans $E = \mathbb{R}^2$.
- Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $H = \{M \in E \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(I)$. Montrer que H et D sont supplémentaires dans E.
- Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions dérivables en 0 (c'est bien un $\mathbb{R}$-ev, WHY ?).

  Montrer que $F = \left\{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$ et $G = \left\{x \mapsto ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}\right\}$ sont supplémentaires dans E.
- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Déterminer une famille génératrice de $H = \left\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\right\}$.
- Soit $G = \left\{X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\right\}$ où $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer une famille génératrice de G.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX = B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX = B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.
Les solutions du système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
d) Ensemble des matrices carrées	
Ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme.
Inverse d'une transposée.	
Inverse d'un produit de matrices inversibles.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX = Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

Nombres réels et suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$. On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\left(\lvert u_n\rvert\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.
f) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.