Rudiments de logique

I. Assertions et propriétés

Une assertion est une phrase mathématique qui est vraie ou fausse.
Par exemple :

— « $6 \times 7 = 42$ » est une assertion (vraie).

— « Il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $x^2 + x + 1 = 0$ » est une assertion (vraie).

— « Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + x + 1 = 0$ » est une assertion (fausse).

— « Il existe un nombre parfait impair » est une assertion (dont nul ne sait si elle est vraie ou fausse).
Pour la culture : un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs propres (c'est-à-dire différents de lui-même). Les premiers nombres parfaits sont $6 = 1+2+3$ et $28 = 1+2+4+7+14$.

— Lorsque l'entier n est défini, « n est pair » est une assertion dont la valeur de vérité dépend de n. On dira qu'il s'agit d'une assertion dépendant de n.

— « $1 + 3\mathrm{i} < 2 + 5\mathrm{i}$ » n'est pas une assertion (on ne peut pas comparer deux nombres complexes).

Connecteurs logiques

On peut former une assertion en en combinant plusieurs à l'aide de connecteurs logiques.

1 **Définition.** Soit P une assertion.

— L'assertion « non(P) » est vraie lorsque P est fausse.

— L'assertion « P et Q » est vraie lorsque P et Q le sont.

— L'assertion « P ou Q » est vraie lorsque P est vraie ou Q est vraie (cela inclut le cas où P et Q sont toutes les deux vraies).

— L'assertion « $P \Rightarrow Q$ » (lue « P implique Q ») est vraie lorsque P est fausse ou Q est vraie.

« $P \Rightarrow Q$ » est équivalente à « non(P) ou Q »

— L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » (lue « P équivalente à Q ») est vraie lorsque P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

On résume souvent ces définitions par les tables de vérité suivantes :

P	Q	non(P)	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	V				
F	V	V				
V	F	F				
V	V	F				

2 **Remarques importantes sur l'implication (à méditer tout au long de l'année !)**

- Quand on a une implication $P \Rightarrow Q$, on dit que P est la **prémisse** (ou l'hypothèse) de l'implication et Q est la *conclusion*.
- On dispose d'un vocabulaire très riche pour dire que $P \Rightarrow Q$ est vraie.
  Voici les différentes manières d'affirmer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie :
  — P implique Q
  — Si P, alors Q
  — Q est vraie si (dès que, lorsque, quand) P est vraie
  — P est une condition suffisante pour Q

— Q est une condition nécessaire pour P

— il *suffit* que P soit vraie pour que Q le soit

— il *faut* que Q soit vraie pour que P le soit

- La définition de l'implication $P \Rightarrow Q$ (et notamment le fait que $P \Rightarrow Q$ soit vraie dès que P est fausse) peut surprendre !

  Essayons d'expliquer que c'est au contraire parfaitement raisonnable.

  L'exemple du feu tricolore ! Le code de la route dit que « Tout conducteur doit marquer l'arrêt absolu devant un feu de signalisation rouge, fixe ou clignotant. » ce que l'on peut retraduire par une implication « si le feu est rouge, je m'arrête » ou « le feu est rouge $\implies$ je m'arrête ».

  Respecter ce règlement, c'est rendre cette implication vraie. Or, ce règlement ne donne aucune obligation dans le cas où le feu est vert : le règlement n'exige rien de nous dans ce cas, et on ne peut donc pas l'enfreindre. **L'implication est toujours vraie quand la prémisse est fausse.**

3 Attention : « implique » versus « donc »

- L'implication n'est pas une relation de causalité.

  Par exemple, l'implication :

$$3 = \sqrt{9} \implies \text{le carré d'un nombre réel est un réel positif}$$

  est vraie (WHY), mais il n'y a aucun lien de causalité ou de déduction entre les deux.

  Autre exemple, l'implication :

$$3 = \sqrt{8} \implies \textit{truc}$$

  est vraie (WHY), mais il n'y a aucun lien de causalité ou de déduction entre les deux.

- L'implication n'est pas un raccourci pour la conjonction « donc ».

  En effet,

  — lorsque l'on écrit « P donc Q », on veut dire « je sais que P est vraie, j'en déduis que Q est vraie ».

  — lorsque l'on écrit « $P \Rightarrow Q$ », on veut dire « je ne sais pas si P est vraie ou fausse, mais je sais que, si P est vraie, alors Q est vraie aussi ».

  Comparons les deux phrases suivantes :

  « Si Socrate est un chat, il est mortel » « Socrate est un chat, donc il est mortel »

  Les deux n'ont pas du tout le même sens :

  — la seconde affirme que Socrate est un chat (et en déduit qu'il est mortel) ;

  — la première, elle, ne prend pas partie quant à la félinité de Socrate : il peut être un chat (auquel cas il sera mortel) ou tout autre chose (auquel cas on ne dit rien sur son sort).

Ainsi, on n'utilisera jamais le symbole $\implies$ comme abréviation de « donc »

L'implication permet de faire des déductions !

Pour la culture, voici le lien entre l'implication et la déduction naturelle :

> *Lemme (modus ponens). Soit P et Q deux assertions. Si P est vraie et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors Q est vraie. En symboles, on a :*
>
> $$\big(P \text{ et } (P \Rightarrow Q)\big) \implies Q.$$

Une telle assertion, vraie indépendamment des valeurs de vérité de P et Q, est appelée une *tautologie* (le sens est proche de *lapalissade*).

Quantificateurs

On dispose de deux quantificateurs :

— le *quantificateur universel* $\forall$ (« pour tout », « quel que soit ») ;
l'assertion « $\forall\, x \in X,\ P(x)$ » affirme que l'assertion $P(x)$ est vraie quelle que soit la valeur de x dans X ;

— le *quantificateur existentiel* $\exists$ (« il existe ») ;
l'assertion « $\exists\, x \in X,\ P(x)$ » affirme que l'on peut trouver un élément x_0 dans X tel que $P(x_0)$ soit vraie.

4 **Question.** Écrire en langage formel les assertions (vraies) suivantes :

- Le carré d'un nombre réel est un réel positif. .....
- Un réel positif est supérieur à -1 .....
- Deux nombres réels positifs de somme nulle sont nécessairement nuls.

.....

- La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

.....

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

.....

- Il n'existe pas de réel plus grand que tous les autres. .....

5 **Un peu de zérologie !**
Lorsque X est *l'ensemble vide*, il faut retenir que :

l'assertion $\left(\forall\, x \in \emptyset,\ P(x)\right)$ est vraie l'assertion $\left(\exists\, x \in \emptyset,\ P(x)\right)$ est fausse

6 **Attention !**
Il est capital de prêter attention à l'*ordre des quantificateurs* dans une assertion.
En général, une assertion du type « $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},$ truc » n'a pas du tout le même sens que l'assertion avec les quantificateurs inversés « $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},$ truc ».

- Prenons un exemple "de la vie courante". Comparer les assertions :
« Un candidat a eu 20 a toutes les épreuves » et « Lors de chaque épreuve, un candidat a eu 20 ».
- Voici un autre exemple "plus mathématique". Considérons l'assertion :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ y > x$$

Cette assertion est vraie. Elle affirme que, quel que soit le réel x que l'on considère, on peut en trouver un autre, y, qui soit strictement plus grand (par exemple $x+1$). Mais ce y dépend de x.
Considérons l'assertion avec les quantificateurs inversés :

$$\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ y > x$$

Cette assertion est fausse. En effet, elle demande un y qui ne dépende pas de x, et ceci n'est pas possible (il n'existe pas de réel strictement plus grand que tous les autres).

Négation des connecteurs logiques

Une activité mathématique importante est de déterminer si une assertion P est vraie ou fausse. On verra plus loin dans le chapitre tout un arsenal de méthodes pour démontrer P, c'est-à-dire certifier qu'elle est vraie. Pour infirmer P, c'est-à-dire certifier qu'elle est fausse, il s'agira de démontrer $\text{non}(P)$. Il est donc important de savoir déterminer $\text{non}(P)$ rapidement.

7 preuve

Proposition (Négation d'une négation). Soit P une assertion.
Les assertions $\text{non}(\text{non}(P))$ et P sont équivalentes.

8 preuve

Proposition. Lois de Auguste De Morgan (1806-1871). Soit P et Q deux assertions.

— Les assertions « $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ » et « $\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)$ » sont équivalentes.

— Les assertions « $\text{non}(P \text{ et } Q)$ » et « $\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)$ » sont équivalentes.

9 preuve

Proposition (Négation d'une implication). Soit P et Q deux assertions.
L'assertion « $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ » est équivalente à « $P \text{ et } \text{non}(Q)$ ».

Cette proposition est extrêmement importante, et mérite un slogan :

Dire qu'une implication est fausse, c'est dire que
la prémisse est vraie, et la conclusion est fausse.

Pour reprendre l'exemple du code de la route, pour griller un feu, c'est-à-dire rendre fausse l'implication « Si le feu est rouge, je m'arrête », il faut que le feu soit rouge et que, pourtant, on ne s'arrête pas.

10

Proposition (Double distributivité et/ou). Soit P, Q, R trois assertions.

— Les assertions « P et (Q ou R) » et « (P et Q) ou (P et R) » sont équivalentes.

— Les assertions « P ou (Q et R) » et « (P ou Q) et (P ou R) » sont équivalentes.

Négation des assertions avec quantificateurs

11

Axiome. Soit X un ensemble. On se donne une assertion $P(x)$ dépendant d'un élément $x \in X$.

— Les assertions « $\text{non}\Big(\forall\, x \in X,\ P(x)\Big)$ » et « $\exists\, x \in X,\ \text{non}\big(P(x)\big)$ » sont équivalentes.

— Les assertions « $\text{non}\Big(\exists\, x \in X,\ P(x)\Big)$ » et « $\forall\, x \in X,\ \text{non}\big(P(x)\big)$ » sont équivalentes.

Une manière de paraphraser la première partie de ce résultat est de dire que pour démontrer qu'un résultat comme « $\forall\, x \in X,\ P(x)$ » est faux, on peut exhiber un contre-exemple, c'est-à-dire un élément $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$ soit faux.

12 **Question.** Écrire en langage formel qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas croissante.

II. Canevas de preuve

Les deux prochaines sections ont pour but de poser les bases de la rédaction de preuves. Dans cette section, on découvre les « canevas de preuves standard », c'est-à-dire les approches les plus basiques pour démontrer une assertion quantifiée. On enrichira notre boîte à outils dans la section suivante.

Preuve d'une $\forall$-assertion

Pour démontrer une assertion du type « $\forall\, x \in X, P(x)$ », on prend un élément $x \in X$ (que l'on introduit par la locution « soit $x \in X$ »), et on démontre $P(x)$.

Montrons $\forall x \in X, P(x)$.
Soit $x \in X$.
Montrons $P(x)$.
[*Arguments et/ou calculs*]
Donc $P(x)$.
On a donc montré $\forall x \in X, P(x)$.

13 **Question.**

- Montrer que $\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R},\quad (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$.
- Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\quad x^2+\cos x > 0$.

Preuve d'une $\exists$-assertion

Pour démontrer une assertion du type « $\exists\, x \in X, P(x)$ », on définit explicitement un élément judicieux x, et on démontre successivement que x appartient à X, puis que $P(x)$ est vrai.

Montrons $\exists x \in X, P(x)$.
Candidat. Posons $x =$ [*choix intelligent d'un élément de X*]
— Montrons que $x \in X$.
[*Arguments et/ou calculs*]
Donc $x \in X$.
— Montrons que $P(x)$.
[*Arguments et/ou calculs*]
Donc $P(x)$.
On a donc montré $\exists x \in X, P(x)$.

Parfois, il est difficile de définir explicitement un tel élément x.
Dans ce cas, on peut faire appel à des théorèmes dont la **conclusion** est justement d'affirmer l'existence d'un élément tel que …

14 **Question.** Montrer les assertions suivantes :

- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3+2 \leqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists y \in \mathbb{R},\ 0 < y < x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^3+x+3 = 0$

Preuve de l'implication « $P \Rightarrow Q$ »

Pour montrer une implication de la forme $P \Rightarrow Q$, on suppose la prémisse P, et on démontre la conclusion Q.

Montrons $P \Rightarrow Q$.
Supposons P.
Montrons Q.
[*Arguments et/ou calculs exploitant probablement l'hypothèse P*]
Donc Q.
On a donc montré $P \Rightarrow Q$.

15 **Question.** Montrer :

- $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\quad a^2+b^2+c^2=0 \implies a=b=c=0$
- $\forall\, x,y \in \mathbb{R},\quad x=y \implies \big(\forall\, t \in \mathbb{R},\ xt=yt\big)$

Preuve d'une équivalence « $P \Leftrightarrow Q$ »

L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ » est équivalente à « $\big(P \Rightarrow Q\big)$ et $\big(Q \Rightarrow P\big)$ » (dresser une table de vérité pour s'en convaincre).
Ainsi, pour démontrer $P \Leftrightarrow Q$, on démontre successivement $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$.
On dit que l'on procède par **double implication**.

Montrons $P \Leftrightarrow Q$. On procède par double implication.

Sens direct $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons P.
Montrons Q.
[*Arguments et/ou calculs exploitant probablement l'hypothèse P*]
Donc Q.

On a donc montré $P \Rightarrow Q$.

Sens réciproque $\boxed{\Leftarrow}$

Supposons Q.
Montrons P.
[*Arguments et/ou calculs exploitant probablement l'hypothèse Q*]
Donc P

On a donc montré $Q \Rightarrow P$.
On a donc montré $P \Leftrightarrow Q$.

16 **Question.** Montrer

$$\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\quad c^2-(a+b)c+ab=0 \iff \big(c=a \text{ ou } c=b\big)$$

Preuve de « P ou Q »

L'assertion « P ou Q » est équivalente à « $\text{non}(P) \Rightarrow Q$ ».

Montrons $\big(P$ ou $Q\big)$. On va en fait montrer $\text{non}(P) \Rightarrow Q$.
Supposons $\text{non}(P)$.
Montrons Q.
[*Arguments et/ou calculs exploitant probablement $\text{non}(P)$*]
Donc Q.
On a donc montré $\big(P$ ou $Q\big)$.

Utilisation d'une $\forall$-assertion

Si on dispose d'un élément $x_0 \in X$ et que l'on **sait** que « $\forall\, x \in X,\ P(x)$ », alors on peut en déduire que l'assertion $P(x_0)$ est vraie.

[*On dispose d'un élément x_0 qui est dans X*]

On sait que « $\forall\, x \in X,\ P(x)$ ».
En particulier, pour $x = x_0$ qui est bien dans X, on a $P(x_0)$.

17 **Question.** Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R},\quad \big(\forall\, t \in \mathbb{R},\ xt = yt\big) \implies x = y.$

Utilisation d'une $\exists$-assertion

Si l'on **sait** que « $\exists\, x \in X,\ P(x)$ », alors on peut considérer un élément $x_0 \in X$ tel que l'assertion $P(x_0)$ est vraie.

On sait que « $\exists\, x \in X,\ P(x)$ ».
Considérons donc $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$.

III. Différents modes de raisonnement

Raisonnement par contraposée

18 **Définition.**
La contraposée d'une implication de la forme $P \Rightarrow Q$ est l'implication :

$$\text{non}(Q) \ \Rightarrow\ \text{non}(P)$$

- Par abus de langage, on parle également de la contraposée d'une assertion du type :

$$\forall\, x \in X,\quad P(x) \Rightarrow Q(x)$$

qui est alors

$$\forall\, x \in X,\quad \text{non}\big(Q(x)\big) \Rightarrow \text{non}\big(P(x)\big)$$

19 **Proposition.** Une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.

preuve

- Considérons l'implication $P \Rightarrow Q$.
  On prendra garde à ne pas mélanger la contraposée (qui est $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$ et qui lui est équivalente), et la réciproque (qui est $Q \Rightarrow P$ et qui ne lui est PAS équivalente).
- Même si, d'un point de vue logique, une implication et sa contraposée sont équivalentes, elles peuvent paraître psychologiquement assez différentes. Comparer par exemple

  « tous les corbeaux sont noirs » « tout ce qui n'est pas noir n'est pas un corbeau »

  Ces deux assertions sont logiquement équivalentes et pourtant la seconde paraît étrange au premier abord (mais paraît tout à fait logique après 2 secondes de concentration).
- Face à une implication retorse à démontrer, il faut absolument passer quelque temps à se demander s'il ne serait pas plus facile de démontrer sa contraposée.

20 **Question.** Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\big(\forall\, \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon\big) \implies a \leqslant 0$

Raisonnement par l'absurde

La démonstration par l'absurde est très utile quand l'assertion non(P) est facilement exploitable.
En revanche, elle possède un inconvénient psychologique : elle force à raisonner sur des objets qui n'existent pas...
Voici son principe : si non(P) implique une assertion fausse, alors P est vraie.

21 **Question.** Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

22 **Remarque : absurde VS contraposée**
La démonstration par l'absurde est proche de la démonstration par contraposée (puisqu'on suppose la négation de l'assertion à laquelle on souhaite aboutir). Faites quand même attention à ne pas confondre ces deux modes de raisonnement.

Reprenons la question précédente, mais cette fois-ci, n'utilisons pas la contraposée.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $\big(\forall\, \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon\big) \implies a \leqslant 0$.
Pour cela, on utilise le canevas de preuve standard.
On suppose que la prémisse (qui est une $\forall$-assertion) est vraie, et on montre la conclusion.
Allons-y.
Supposons $\big(\forall\, \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon\big)$, assertion notée $(\star)$.
Montrons que $a \leqslant 0$.
Pour cela, raisonnons par l'absurde : on suppose donc que $a > 0$.

Comme $a > 0$, on va pouvoir *utiliser* la $\forall$-assertion avec un bon epsilon.
Posons $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$.

— On a $\varepsilon > 0$ (WHY ?).

— D'après $(\star)$, on en déduit que $a \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $a \leqslant \dfrac{a}{2}$.
D'où $2a \leqslant a$. D'où $a \leqslant 0$.

Cela contredit l'hypothèse $a > 0$.
D'où la contradiction.

23 sol → 19 **Question.** Montrer que :

$$\forall\, a,b,c,d \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a \leqslant b \\ c < d \end{cases} \quad \implies \quad a + c < b + d$$

On pourra (devra) bien sûr utiliser le principe suivant lequel « on peut sommer des inégalités **larges** entre elles ».

Raisonnement par chaîne d'équivalences

Pour démontrer une équivalence $P \iff Q$, la méthode de la double implication est, dans l'immense majorité des cas, la méthode à suivre. Cependant, dans certains cas, on peut rédiger par chaîne d'équivalences (on dit encore par équivalences successives), à condition d'assurer la preuve de chaque $\iff$, et surtout à condition que cela soit simple, voire très simple.

24 **Exemple.** Reprenons un exemple précédent. Montrons

$$\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\quad c^2 - (a+b)c + ab = 0 \iff \big(c = a \text{ ou } c = b\big)$$

Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} c^2 - (a+b)c + ab = 0 &\iff (c-a)(c-b) = 0 && \text{calcul élémentaire (développer le produit)} \\ &\iff c = a \text{ ou } c = b && \text{théorème de la classe de 3 ème} \end{aligned}$$

D'où l'équivalence demandée.

Raisonnement par analyse-synthèse

Un grand nombre de raisonnements visent à déterminer tous les objets vérifiant une certaine propriété. Pour cela, le mode de raisonnement le plus efficace est souvent le raisonnement par *analyse et synthèse*. Il s'agit d'un mode de raisonnement en deux temps.

— Dans un premier temps, on considère un objet vérifiant la propriété voulue, et on déduit ses propriétés, de façon à réduire l'ensemble des candidats possibles. C'est la phase d'analyse.

— Dans un second temps, on vérifie que les candidats satisfont bien la propriété, ou on les rejette si ce n'est pas le cas. C'est la phase de synthèse.

Les mots « analyse » et « synthèse » sont un peu durs à comprendre dans ce contexte. Il serait peut-être plus parlant de parler d'une phase de « profiling » (où on se ramène à une poignée de suspects) et d'une phase de « vérification » où l'on vérifie si les suspects sont coupables ou non.
Nous allons donner deux types (assez généraux) de situations où ce raisonnement est souvent applicable.

— La résolution d'équations (ou d'inéquations) relève, si l'on veut, du raisonnement par analyse-synthèse. Car il s'agit de chercher tous les $x \in \mathbb{R}$ vérifiant une certaine propriété, à savoir une égalité (ou une inégalité).

— Pour traiter une question du type « montrer qu'il existe un unique … », on peut penser à un raisonnement par analyse-synthèse.
L'analyse montre qu'il existe au plus une solution, et prouve donc l'unicité sous réserve d'existence : elle identifie la solution potentielle.
La synthèse montre ensuite que cette solution potentielle est bien solution, et prouve donc l'existence.

25 **Exemple.** Résoudre l'équation $|x+1| = 2x+3$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ (fixé avant toute chose).

Analyse. Supposons que $|x+1| = 2x+3$.
En élevant au carré, on obtient $|x+1|^2 = (2x+3)^2$.
En développant, on tombe sur l'équation du second degré suivante :

$$3x^2 + 10x + 8 = 0$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant vaut 4, donc il y a deux solutions, à savoir -2 et $-\frac{4}{3}$.
Bilan de l'analyse. On vient de démontrer l'implication

$$|x+1| = 2x+3 \implies x \in \left\{-2, -\frac{4}{3}\right\}$$

Synthèse. Vérifions si -2 et $-\frac{4}{3}$ sont solutions.

- On a $|-2+1| = 1 \neq -1 = 2\times(-2)+3$. Donc -2 n'est pas solution de l'équation.
- On a $|-\frac{4}{3}+1| = \frac{1}{3} = 2\times\left(-\frac{4}{3}\right)+3$. Donc $-\frac{4}{3}$ est solution de l'équation.

Bilan. L'ensemble des solutions de l'équation est donc l'ensemble $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$. Pour la culture : $\{a\}$ est un *singleton*.

- Insistons sur un point logique : résoudre une équation, c'est démontrer une équivalence, avec la difficulté supplémentaire que l'un des membres de l'équivalence n'est pas donné mais est à déterminer. Par exemple, ici, on a démontré l'équivalence

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(|x+1| = 2x+3 \iff x \in \left\{-\tfrac{4}{3}\right\}\right)$$

- **Principe de PCSI 3.** Pour résoudre une équation, on essaiera de ne pas utiliser d'équivalences, à moins que les équivalences soient extrêmement simples (niveau primaire/collège).

26 sol → 20

Question. Soit $s, d \in \mathbb{R}$ fixé.

Montrer qu'il **existe** un **unique** couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x+y &= s \\ x-y &= d \end{cases}$

Preuve d'un résultat d'existence

27 **Question.** Soit $s, d \in \mathbb{R}$ fixé.

Montrer qu'il **existe** un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant le système $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$

- En rédigeant sur sa copie uniquement la synthèse (et en gardant au brouillon l'analyse), on répond parfaitement à la question qui nous demande de prouver seulement *l'existence* d'objets (et qui ici ne demande pas de prouver l'unicité).
- La rédaction finale présente un aspect intéressant : à peu près tout ce qui est conceptuellement significatif est caché (dans le raisonnement au brouillon). Ce qui est présenté (et qui constitue une preuve correcte) n'est finalement qu'une suite de vérifications sans difficulté. De telles démonstrations peuvent se trouver (pour montrer des théorèmes, ou dans des corrigés d'exercices) ; il est souvent intéressant d'essayer de comprendre comment on a pu avoir telle ou telle idée.

Preuve d'un résultat d'unicité

Si l'on veut montrer qu'il existe $\boxed{\text{au plus 1}}$ élément vérifiant une certaine propriété, on invoque $\boxed{2}$ éléments vérifiant cette propriété et on montre qu'ils sont égaux. Formellement :

$$\forall\, x_1, x_2 \in X, \quad P(x_1) \text{ et } P(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Cela montre qu'il existe au plus 1 élément $x \in X$ vérifiant la propriété $P(x)$.

28 **Question.** Soit $x \in \mathbb{C}$.
Montrer qu'il existe au plus un inverse pour x, c'est-à-dire un élément $y \in \mathbb{C}$ tel que $xy = 1$.

- On vient donc de démontrer un résultat d'unicité, sans existence. À ce stade, la seule chose qu'on puisse dire sur un élément $x \in \mathbb{C}$ est qu'il peut ou bien avoir *exactement un* inverse ou bien n'en avoir *aucun*.
  (Si vous avez un peu de culture mathématique niveau collège, on sait qu'en fait, x a un inverse si et seulement s'il est non nul, mais la preuve ne montre pas cela.)
  On peut résumer le résultat que l'on vient de montrer en disant que :
  « l'inverse d'un nombre complexe, *s'il existe*, est unique »
  « l'inverse d'un nombre complexe est, *sous réserve d'existence*, unique »
- Il est intéressant d'analyser ce que dit la preuve dans le cas où x n'a pas d'inverse (c'est-à-dire ici dans le cas où $x = 0$). La preuve commence par invoquer deux objets y_1 et y_2 qui n'existent pas, puis montrer qu'ils sont égaux. Rien n'est logiquement critiquable, mais le contenu de la preuve est alors essentiellement vide.

IV. Le raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est un ensemble de méthodes pour démontrer des assertions de la forme « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{H}_n$ », où $\mathscr{H}_n$ est une assertion dépendant d'un entier n et n_0 est un entier fixé.
En pratique, on rencontrera surtout les cas $n_0 = 0$ et $n_0 = 1$, et on écrira aussi $\forall\, n \in \mathbb{N}$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

La récurrence simple

Principe. Pour démontrer l'assertion « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{H}_n$ », il suffit de démontrer :

— l'assertion $\mathscr{H}_{n_0}$

— l'implication : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{H}_n \implies \mathscr{H}_{n+1}$.

Pour tout $n \geqslant n_0$, on note $\mathscr{H}_n$ l'assertion :

$\mathscr{H}_n$: « [*assertion dépendant de n*] »

Procédons par récurrence.

Initialisation. Montrons $\mathscr{H}_{n_0}$.

[*Arguments et/ou calculs*]

Donc $\mathscr{H}_{n_0}$.

Hérédité. Soit $n \geqslant n_0$.

Supposons $\mathscr{H}_n$.

Montrons $\mathscr{H}_{n+1}$.

[*Arguments et/ou calculs utilisant probablement* $\mathscr{H}_n$]

Donc $\mathscr{H}_{n+1}$.

Bilan. D'après le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{H}_n$$

- Il est capital de définir clairement l'assertion $\mathscr{H}_n$. Elle doit absolument dépendre de l'entier n. En particulier, elle ne peut pas commencer par $\forall\, n$.
- Il est très important de distinguer d'une part l'hypothèse de récurrence « $\mathscr{H}_n$ » et d'autre part l'assertion que l'on démontre qui est la $\forall$-assertion : « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{H}_n$ ».
- Si dans la phase d'hérédité, on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, c'est que la récurrence est inutile : il vaut mieux faire une preuve directe en fixant l'entier n supérieur à n_0 en début de preuve.

29 **Question.** Montrer que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\quad 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La récurrence multiple

Parfois, on a besoin, dans la phase d'hérédité, d'utiliser l'hypothèse de récurrence à plusieurs échelons. On peut dans ce cas faire une récurrence multiple : on dit que c'est une récurrence double si on utilise 2 échelons, une récurrence triple si on utilise 3 échelons, etc.

Principe. Pour démontrer l'assertion « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{H}_n$ », il suffit de démontrer :

— les deux assertions : $\mathscr{H}_{n_0}$ et $\mathscr{H}_{n_0+1}$

— l'implication : $\forall\, n \geqslant n_0, \left(\mathscr{H}_n \text{ et } \mathscr{H}_{n+1}\right) \implies \mathscr{H}_{n+2}$.

30 sol → 21 **Question.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = 3 \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \end{cases}$.

Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n + 1$.

- La récurrence double est particulièrement adaptée à l'étude de ce genre de suites, elles-mêmes définies par une récurrence double.
- On pourrait remplacer la récurrence double sur l'assertion $\mathscr{H}_n$ par une récurrence simple sur l'assertion $\mathscr{P}_n$: « $\mathscr{H}_n$ et $\mathscr{H}_{n+1}$ ». En ce sens, la récurrence double est en fait un cas particulier de la récurrence simple (même si, en partique, on n'y pense guère ainsi).
- On peut, de la même façon, effectuer des démonstrations par récurrence triple, quadruple, etc. Cela n'arrive guère en pratique.

La récurrence forte

Principe. Pour démontrer l'assertion « $\forall\, n \geqslant n_0,\ \mathscr{H}_n$ », il suffit de démontrer :

— l'assertion $\mathscr{H}_{n_0}$

— l'implication : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \left(\mathscr{H}_{n_0}, \mathscr{H}_{n_0+1}, \dots, \mathscr{H}_n\right) \Longrightarrow \mathscr{H}_{n+1}$.

Ce qui s'écrit encore $\forall\, n \geqslant n_0,\ \left(\forall\, k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathscr{H}_k\right) \Longrightarrow \mathscr{H}_{n+1}$.

31 **Exemple.** Montrons par récurrence forte que tout entier $n \geqslant 2$ est un produit de nombres premiers (ce qui inclut le cas des nombres premiers eux-mêmes, vus comme des produits à un seul terme).

Pour tout $n \geqslant 2$, notons $\mathscr{H}_n$ la propriété « n est un produit de nombres premiers ».
Procédons par récurrence forte.

Initialisation. 2 est un nombre premier, donc un produit de nombres premiers.
Donc $\mathscr{H}_2$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 2$.
On suppose $\mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3, \dots, \mathscr{H}_n$.
Montrons $\mathscr{H}_{n+1}$.
Distinguons deux cas.

— Si $n+1$ est premier, il est en particulier un produit de nombres premiers.

— Si $n+1$ n'est pas premier, on peut trouver deux entiers a et b, appartenant à $[\![2, n]\!]$, tels que $n+1 = ab$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathscr{H}_a$ et $\mathscr{H}_b$ sont vraies.
Donc a et b sont produits de nombres premiers.
On peut donc trouver des nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ et $q_1, \dots, q_s$ (pas nécessairement distincts) tels que

$$a = p_1 \cdots p_r \qquad \text{et} \qquad b = q_1 \cdots q_s$$

En effectuant le produit, on a alors $ab = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$, ce qui démontre que $n+1$ est un produit de nombres premiers.

Dans les deux cas, $n+1$ est un produit de nombres premiers, ce qui démontre $\mathscr{H}_{n+1}$.

Bilan. D'après le principe de récurrence forte, on a montré que

tout entier $n \geqslant 2$ est un produit de nombres premiers

- La récurrence forte peut paraître beaucoup plus puissante que la récurrence simple puisqu'elle nous donne plus de munitions pour démontrer $\mathscr{H}_{n+1}$ dans la phase d'hérédité.
- On pourrait remplacer la récurrence forte sur l'assertion $\mathscr{H}_n$ par une récurrence simple sur l'assertion

$$\mathscr{P}_n : \qquad « \mathscr{H}_{n_0} \text{ et } \mathscr{H}_{n_0+1} \text{ et } \dots \text{ et } \mathscr{H}_n »$$

En ce sens, la récurrence forte est en fait un cas particulier de la récurrence simple (même si, en pratique, on n'y pense guère ainsi).

V. Rudiment de théorie des ensembles

Ensemble et appartenance

Un ensemble est une collection d'objets mathématiques.
Étant donné un objet x (un nombre, une fonction, une suite, voire un autre ensemble) et un ensemble E, il peut arriver que x appartienne à E (on dit aussi que x est un élément de E et on note $x \in E$) ou pas (et on note $x \notin E$).

Par exemple :

- $\{3,4,7\}$ est un ensemble ; $\mathbb{N}$ est un ensemble ; l'intervalle $[-1,\pi]$ est un ensemble. On dira qu'il s'agit d'ensemble *de nombres*, pour signaler que leurs éléments sont des nombres.
- $\{\sin,\cos,\exp\}$ est un ensemble (de fonctions).
- $\left\{[0,1],\mathbb{R}^+,\mathbb{R}\right\}$ est un ensemble (d'ensembles). Attention, cet exemple est difficile pour un élève de "sup".

Modes de définition d'un ensemble

- On peut définir un ensemble *in extenso*, c'est-à-dire en en listant tous ses éléments : on peut ainsi parler de l'ensemble
$$\{1,2,3,\dots,10\}$$
Pour des ensembles plus gros, on peut imaginer « lister » les élements, comme pour parler de l'ensemble des entiers pairs
$$2\mathbb{Z} = \{\dots,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,\dots\}$$
ou de celui des nombres premiers
$$\left\{2,3,5,7,11,13,17,19,\dots\right\}$$
mais cette méthode atteint vite ses limites.
- On peut définir un ensemble *en compréhension*, c'est-à-dire en « filtrant » parmi les éléments d'un ensemble donné, c'est-à-dire en ne sélectionnant que les éléments vérifiants une certaine propriété.
Si X est un ensemble et si $P(x)$ est une propriété dépendant d'un élément $x \in X$, alors $E = \{x \in X \mid P(x)\}$ est l'ensemble des éléments $x \in X$ tel que $P(x)$.
Par exemple,
  — l'ensemble des entiers relatifs pairs, noté $2\mathbb{Z}$, est :
  $$2\mathbb{Z} = \left\{n \in \mathbb{Z} \mid 2 \text{ divise } n\right\}$$
  — l'ensemble des nombres réels de l'intervalle $[-1,1]$:
  $$[-1,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$$
- On peut définir un ensemble *par paramétrage*, c'est-à-dire comme l'ensemble des valeurs d'une fonction. Précisément, si $f : X \to Y$ est une fonction, alors on peut considérer l'ensemble
$$E = \left\{f(x), x \in X\right\} = \left\{f(x)\right\}_{x\in X}$$
qui est l'ensemble des éléments de Y qui s'écrivent sous la forme $f(x)$ avec $x \in X$.
Par exemple :
  — l'ensemble des entiers relatifs pairs est :
  $$2\mathbb{Z} = \left\{2p,\ p \in \mathbb{Z}\right\} = \{2p\}_{p\in\mathbb{Z}}$$

— l'ensemble des réels compris entre -1 et 1 peut être paramétré par les fonctions trigonométriques :

$$[-1,1] = \{\sin t,\ t\in\mathbb{R}\} = \{\sin t,\ t\in[0,2\pi[\} = \{x\in\mathbb{R}\mid \exists\, t\in[0,2\pi[,\ x=\sin t\}$$

— l'ensemble des réels positifs peut être paramétré avec la fonction carré :

$$\mathbb{R}^+ = \{x\in\mathbb{R}\mid \exists\, t\in\mathbb{R},\ x=t^2\}$$

Inclusion et égalité de deux ensembles

32 **Définition (inclusion).** Soit A et B deux ensembles.
On dit que A est inclus dans B (ou que A est une partie de B, ou encore que A est un sous-ensemble de B) lorsque tous les éléments de A appartiennent également à B, c'est-à-dire lorsque

$$\forall\, x\in A,\ x\in B$$

On note cela $A\subset B$, ou encore $A\subseteq B$.

- Si A et B sont deux ensembles tels que $A\subset B$ et $B\subset A$, ils ont exactement les mêmes éléments et sont donc égaux. Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on utilise souvent ce principe : on dit alors qu'on procède par **double inclusion**.

Montrons $A=B$.
Procédons par double inclusion.
⊂ Montrons l'inclusion $A\subset B$.
Soit $x\in A$
[*Arguments et/ou calculs utilisant probablement que* $x\in A$]
Donc $x\in B$.
⊂ Montrons l'inclusion $B\subset A$.
Soit $x\in B$
[*Arguments et/ou calculs utilisant probablement que* $x\in B$]
Donc $x\in A$.
Bilan. On a montré $A=B$.

- Quel que soit l'ensemble E, on a $\emptyset\subset E$, car c'est une assertion du type $\forall\, x\in\emptyset,\ x\in E$.
- Attention à ne pas confondre *appartenance* et *inclusion*.
Pour ceux qui ont tout compris, vous méditerez ceci (attention, c'est difficile). Considérons $E=\{[0,x]\mid x\in\mathbb{R}^{+*}\}$.
On a $[0,1]\in E$, mais ~~$[0,1]\subset E$~~ .

33 **Question.**

- Montrer

$$\{x\in\mathbb{R}\mid \exists\, t\in\mathbb{R}^-,\ x=t^2+1\} = [1,+\infty[$$

- Montrer

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+5z=0 \end{cases}\right\} = \{(4t,-5t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$$

Opérations booléennes sur les ensembles

34 **Définition.** Soit Ω un ensemble et $A, B \subset \Omega$ deux parties.

— L'*union* $A \cup B$ est l'ensemble des éléments appartenant à au moins une des deux parties :

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

— L'*intersection* $A \cap B$ (lu « A inter B ») est l'ensemble des éléments appartenant aux deux parties :

$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

— La *différence* $A \setminus B$ (lu « A privé de B ») est l'ensemble des éléments appartenant à A mais pas à B :

$$A \setminus B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

- Quand l'ensemble « ambiant » Ω est clair, la différence $\Omega \setminus A$ est appelée le *complémentaire* de A, et est souvent notée $\overline{A}$.
- Cette notation $\overline{A}$ est très utile mais peut mener à des erreurs si Ω n'est pas précisé :
  $\mathbb{R}^{+*}$ est à la fois une partie de $\mathbb{R}^+$ et de $\mathbb{R}$.
  Dans le premier cas, son complémentaire est $\{0\}$; dans le second, c'est $\mathbb{R}^-$.
  La notation $\Omega \setminus A$, elle, ne prête pas à confusion.

35 **Définition.** Soit Ω un ensemble et $A, B \subset \Omega$ deux parties.
On dit que

— A et B sont *distinctes* lorsque $A \neq B$, c'est-à-dire lorsque

$$\exists x \in A,\ x \notin B \qquad \text{ou} \qquad \exists x \in B,\ x \notin A$$

— A et B sont *disjointes* lorsque $A \cap B = \emptyset$.

36 **Proposition.** Soit A et B deux ensembles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $A \subset B$
ii) $A \cup B = B$
iii) $A \cap B = A$

37 **Proposition.**
Soit Ω un ensemble et $A, B, C \subset \Omega$ trois parties.

- Lois de De Morgan. On a :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$$

- Double distributivité. On a :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Élément neutre. On a

$$A \cup \emptyset = A \qquad \text{et} \qquad A \cap \Omega = A$$

Produit cartésien

« Rappelons » qu'un *couple* est la donnée de deux objets mathématiques dans un certain ordre. Par exemple, les couples $(2,6)$ et $(6,2)$ sont différents.

38 **Définition.** L'ensemble des couples (a,b) où $a \in A$ et $b \in B$ est appelé le *produit cartésien* de A et B, noté $A \times B$ et lu « A croix B ».

39 **Exemple.** L'ensemble $\{1,2\} \times \{3,4,5\}$ est .....

- On peut définir de la même façon des *triplets* (a,b,c) avec $a \in A$, $b \in B$ et $c \in C$. Leur ensemble est noté $A \times B \times C$.
- Si on dispose de n ensembles $A_1, \dots, A_n$, leur produit cartésien (à savoir $A_1 \times \cdots \times A_n$) est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \dots, x_n)$, avec pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la condition $x_i \in A_i$.
- On retrouve en particulier la définition de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou plus généralement $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ comme ensemble de couples ou de n-uplets de nombres réels (typiquement, les coordonnées d'un point du plan, ou de l'espace dans un certain repère).
- La notion de produit cartésien peut servir à « rassembler » plusieurs quantificateurs du même type.
  Par exemple, une assertion comme
  $$\forall x \in]1,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \geqslant x \qquad \text{qui s'écrit encore} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1,+\infty[,\ x^n \geqslant x$$
  peut se réécrire sous la forme
  $$\forall (x,n) \in]1,+\infty[\times \mathbb{N}^*,\ x^n \geqslant x \qquad \text{ou encore} \qquad \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]1,+\infty[,\ x^n \geqslant x$$
- Pour quantifier sur deux réels, on pourra donc écrire au choix
  « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \dots$ », ou bien « $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \dots$ », ou bien « $\forall x,y \in \mathbb{R}, \dots$ », ou bien « $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \dots$ ».
  Attention cependant à ne pas écrire $\forall (x,y) \in \mathbb{R}, \dots$, ce qui n'aurait pas de sens.

Ensemble des parties d'un ensemble

Soit Ω un ensemble. On note $\mathscr{P}(\Omega)$ l'ensemble de ses parties.

- L'ensemble des parties d'un ensemble est donc un ensemble d'ensembles.
- Les assertions $A \subset \Omega$ et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ signifient la même chose et se prononcent « A est une partie de Ω ».

40 **Exemples.** Décrire l'ensemble des parties de $\{1,2\}$.
Puis l'ensemble des parties de $\{a,b,c\}$.

41 **Attention!** La notion de « parties d'un ensemble » est une notion compliquée!
Soit Ω un ensemble et C, D des parties de Ω.
Vrai ou Faux : Pour $X \in \mathscr{P}(\Omega)$, si $X \subset C \cup D$, alors $X \subset C$ ou $X \subset D$.
Vrai ou Faux : Pour $x \in \Omega$, si $x \in C \cup D$, alors $x \in C$ ou $x \in D$.

Recouvrements, recouvrements disjoints, partitions

42 **Définition.** Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

— On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un *recouvrement* de E lorsque $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

— On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un *recouvrement disjoint* de E lorsque $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de E constitué de parties deux à deux disjointes.

On écrit alors $\bigsqcup_{i \in I} A_i = E$ pour signifier que :

- on a l'égalité $\bigcup_{i \in I} A_i = E$
- avec la précision $\forall (i,j) \in I^2,\quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.

— On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une *partition* de E lorsque $(A_i)_{i \in I}$ est un recouvrement disjoint de E constitué de parties non vides.

Rudiments delogique

preuve et éléments de correction

7

Il suffit de réaliser une table de vérité.

P	non(P)	non(non(P))
F	V	F
V	F	V

On constate que les colonnes non(non(P)) et P sont identiques. Cela signifie que, quel que soit le statut de l'assertion P (vraie ou fausse), les assertions non(non(P)) et P ont la même valeur de vérité : elles sont donc équivalentes.

8

Il suffit de réaliser une table de vérité.

P	Q	P ou Q	non(P ou Q)	non(P)	non(Q)	non(P) et non(Q)
F	F					
F	V					
V	F					
V	V					

Ce tableau montre que les assertions « non(P ou Q) » et « non(P) et non(Q) » sont équivalentes.

9

Encore une fois, une table de vérité suffit.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	non($P \Longrightarrow Q$)	non(Q)	P et non(Q)
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				

19

Encore une table de vérité !

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	non(Q)	non(P)	non(Q) $\Longrightarrow$ non(P)
F	F				
F	V				
V	F				
V	V				

23

Utilisons le canevas de preuve standard.
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Supposons la prémisse $\begin{cases} a \leqslant b \\ c < d \end{cases}$.

Montrons $a + c < b + d$, c'est-à-dire montrons $\begin{cases} a + c \leqslant b + d & (\spadesuit) \\ a + c \neq b + d & (\clubsuit) \end{cases}$.

D'après l'hypothèse, on a $\begin{cases} a \leqslant b \\ c < d \end{cases}$, donc *a fortiori*, on a $\begin{cases} a \leqslant b \\ c \leqslant d \end{cases}$.
Par somme d'inégalités, on a $a + c \leqslant b + d$.
On a donc montré (♠).

Reste à montrer que $a + c \neq b + d$ (♣).
Raisonnons par l'absurde et supposons que $a + c = b + d$.
On a alors $a - b = d - c$.
Or, d'après l'hypothèse, on a $a - b \leqslant 0$ et $d - c > 0$.
D'où la contradiction (un nombre négatif ou nul ne peut pas être égal à un nombre strictement positif).
On a donc montré (♣).

Bilan général. On a donc montré l'implication demandée.

Autre preuve/rédaction.
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
On va plutôt montrer l'assertion suivante (qui est équivalente à celle de l'énoncé) :

$$(a \leqslant b) \implies \Big[c < d \implies a + c < b + d\Big]$$

Supposons $a \leqslant b$.
Montrons que $c < d \implies a + c < b + d$.
Montrons plutôt la contraposée, c'est-à-dire $a + c \geqslant b + d \implies c \geqslant d$.
Supposons $a + c \geqslant b + d$.
Alors $c - d \geqslant b - a$.
D'après l'hypothèse, on a $b - a \geqslant 0$.
Par transitivité du symbole $\geqslant$, on en déduit que $c - d \geqslant 0$.
D'où $c \geqslant d$.

Bilan général. On a donc montré l'implication demandée.

26

Analyse. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x + y &= s \\ x - y &= d \end{cases}$.

En sommant les deux lignes, on a alors $2x = s + d$ d'où $x = \dfrac{s+d}{2}$.

En effectuant la différence des lignes 1 et 2, on obtient $2y = s - d$, d'où $y = \dfrac{s-d}{2}$.

Bilan de l'analyse : si (x, y) existe (pour être solution du système), alors nécessairement, on a

$$(x, y) = \left(\frac{s+d}{2}, \frac{s-d}{2}\right)$$

Synthèse. Réciproquement, on vérifie que le couple $\left(\dfrac{s+d}{2}, \dfrac{s-d}{2}\right)$ est bien solution du système.

On a les calculs suivants

$$\begin{aligned} \frac{s+d}{2} + \frac{s-d}{2} &= \frac{2s}{2} &= s \\ \frac{s+d}{2} - \frac{s-d}{2} &= \frac{2d}{2} &= d \end{aligned}$$

Ainsi, $\left(\dfrac{s+d}{2}, \dfrac{s-d}{2}\right)$ est bien solution du système.

Bilan. On a montré qu'il existe un unique couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$, à savoir

$$(x,y)=\left(\frac{s+d}{2},\frac{s-d}{2}\right).$$

Remarque.
On a en fait montré l'équivalence suivante

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases} \iff (x,y)\in\left\{\left(\frac{s+d}{2},\frac{s-d}{2}\right)\right\}$$

Autre solution

Unicité sous réserve d'existence.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$ et soit $(x',y')\in\mathbb{R}^2$ tel que $\begin{cases} x'+y'=s \\ x'-y'=d \end{cases}$.
On a alors $\begin{cases} x+y &= x'+y' \\ x-y &= x'-y' \end{cases}$
Par somme des deux lignes, on obtient $2x=2x'$, d'où $x=x'$.
Par différence des deux lignes, on obtient $2y=2y'$, d'où $y=y'$.
D'où l'unicité sous réserve d'existence.

Existence.
Candidat : $(x,y)=\left(\frac{s+d}{2},\frac{s-d}{2}\right)$.
On a les calculs suivants :

$$x+y=\frac{s+d}{2}+\frac{s-d}{2}=\frac{2s}{2}=s$$

et

$$x-y=\frac{s+d}{2}+\frac{s-d}{2}=\frac{2d}{2}=d$$

Ainsi, le couple (x,y) ci-dessus est bien solution du système.
D'où l'existence.

30

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n$ la propriété

$$\mathscr{P}_n : \text{« } u_n=2^n+1 \text{ »}$$

Procédons par récurrence double pour montrer « $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ ».

Initialisation. Montrons $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$.

— On a $u_0=2$ et $2^0+1=2$. Donc $\mathscr{P}_0$.
— On a $u_1=3$ et $2^1+1=3$. Donc $\mathscr{P}_1$.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$.
Montrons $\mathscr{P}_{n+2}$.
On a les calculs suivants

$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= 3u_{n+1}-2u_n && \text{par définition de } u \\ &= 3(2^{n+1}+1)-2(2^n+1) && \text{d'après } \mathscr{P}_{n+1} \text{ et } \mathscr{P}_n \\ &= 3\times 2^{n+1}-2^{n+1}+3-2 \\ &= 2\times 2^{n+1}+1 \\ &= 2^{n+2}+1 \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}_{n+2}$.

Bilan. On a montré que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_n=2^n+1$$