Rudiments de logique

exercices

Assertions, quantificateurs

101 Au plus, au moins, exactement

Soient a, b, et c trois réels. On considère les trois propositions suivantes :

(i) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ ax^2 + bx + c = 0$

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \big((ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } ay^2 + by + c = 0) \Rightarrow x = y\big)$

(iii) $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ \big(ax^2 + bx + c = 0 \text{ et } (ay^2 + by + c = 0 \Rightarrow x = y)\big)$

On note E l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Faire trois phrases du type :
« La proposition ... signifie que l'équation E possède ...... solution réelle. »

102 Interversion des quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle différence de sens ont les deux assertions proposées ? Dire si elles sont vraies ou fausses.

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ VERSUS $\exists\, y \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

(ii) $\forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ VERSUS $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

(iii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ VERSUS $\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

103 En français

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Voici deux assertions

(i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Big(f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -1\Big)$ (ii) $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\Big)$ ou $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\Big)$

1. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes et donner un exemple concret de fonction f vérifiant l'assertion.
2. Y a-t-il une équivalence entre ces deux assertions ?
3. Écrire la négation de ces assertions.
4. Écrire en langage formel que « f est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et prend effectivement -1 et 1 comme valeurs ».

104 Exercice de rédaction

On a montré dans le cours :

$$(\star) \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\forall\, \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon\Big) \implies a \leqslant 0$$

En déduire :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon'\Big) \implies x \leqslant y$$

105 Conjectures de Goldbach

La *conjecture de Goldbach forte* affirme que tout nombre pair $\geqslant 4$ est la somme de deux nombres premiers. La *conjecture de Goldbach faible* affirme que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

1. Montrer que la conjecture forte implique la conjecture faible.
2. En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible.
   Que peut-on en déduire sur la conjecture forte ?

106 Tâche de sélection de Wason

Quatre cartes ont un nombre imprimé sur une de leurs faces et une lettre de l'autre côté. Elles sont posées sur une table et montrent **A** **B** **1** **2**
Quelle(s) carte(s) doit-on retourner pour savoir si les cartes respectent la règle : « *au dos de chaque voyelle se trouve un nombre pair* » ?

Raisonnements divers et variés

107 Contraposée et réciproque

1. Montrer l'assertion $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x+y>2 \implies x>1$ ou $y>1$.
2. Énoncer précisément la réciproque de cette assertion, et déterminer si elle est vraie ou fausse.

108 Constance, es-tu là ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes

(i) $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$

(ii) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ f(x_1) = f(x_2)$

109 Circuit d'équivalences

Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes

(i) $x = y$

(ii) $\forall \varepsilon \geqslant 0,\ |x-y| \leqslant \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon' > 0,\ |x-y| \leqslant \varepsilon'$

(iv) $\forall \varepsilon > 0,\ |x-y| < \varepsilon$

110 Somme nulle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_1 + \cdots + a_n = 0 \implies \Big(\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0\Big)$.
2. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n$.
   En calculant $(1-x_1)^2 + \cdots + (1-x_n)^2$, montrer que : $\quad \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 1$.

111 Inégalités en bataille !

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.
Montrer que l'un des trois produits $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

On commencera par montrer que $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

112 Décomposition paire-impaire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer qu'il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.

On a donc montré le résultat suivant :

> *Toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

113 Une double inclusion

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad u_{p+q} = u_p + u_q$$

Montrer que

$$\mathcal{L} \ = \ \Big\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists a \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = an\Big\}$$

114 Une analyse-synthèse !

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

♠

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

115 Une autre analyse-synthèse !

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$(\star) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) \;=\; 2\big[f(x) + f(y)\big] + xy - 4$$

116 Une équation à paramètre

Soit $y \in \mathbb{R}$.

Déterminer, en fonction de y, l'ensemble des solutions de l'équation $-x + \sqrt{x^2 + 3} = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

117 Une inégalité

Montrer que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{1}{2}\Big(x + \frac{3}{x}\Big) \geqslant \sqrt{3}$$

118 Une inégalité sous hypothèse

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tels que $a \leqslant b + c$.

Montrer que

$$\frac{a}{1+a} \;\leqslant\; \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

119 Conjugaison dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

1. A-t-on
$$\forall\, u, v, u', v' \in \mathbb{R}, \quad u + v\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad u = u' \text{ et } v = v'$$
2. A-t-on
$$\forall\, u, v, u', v' \in \mathbb{Z}, \quad u + v\sqrt{3} = u' + v'\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad u = u' \text{ et } v = v'$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} \quad \text{ et } \quad (2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$$
Puis montrer l'unicité d'un tel couple.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant $(2 - \sqrt{3})^n$, montrer que $\big\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \big\rfloor$ est un entier impair.

120 Les deux bissectrices

On définit les ensembles

$$A = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\Big\} \qquad \text{et} \qquad B = \big\{(t, t)\big\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B.

Récurrence

121 Somme des inverses des carrés

Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \ \leqslant\ 2-\frac{1}{n}.$$

122 Inégalité de Bernoulli

Montrer
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

123 Où est l'arnaque ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « quels que soient les entiers strictement positifs a et b, s'ils sont plus petits que n, alors ils sont égaux ».

- ▷ La propriété $\mathcal{P}_1$ est évidente, car a et b ne peuvent être qu'égaux à 1, donc égaux entre eux.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Pour cela, on prend deux entiers a et b strictement positifs et inférieurs à $n+1$. Alors $a-1$ et $b-1$ sont inférieurs à n, et donc égaux d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$. Ainsi $a=b$.
- ▷ Bilan : tous les entiers sont égaux !

Où est l'erreur ?

124 Initialisation versus Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :
$$\mathcal{P}_n : \qquad « \ 2^n > n^2 \ »$$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 3,\ \mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.
2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$ est-elle vraie ?

125 Stratégies

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n - 1} \end{cases}$

On souhaite montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n} = \frac{1}{2}$ et $u_{2n+1} = -1$.
Sans rédiger la solution, expliquer les diverses alternatives de preuves possibles.

126 Une récurrence double subtile

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

En procédant par récurrence double, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

On pourra utiliser $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right) = \left(ab+\frac{1}{ab}\right) + \left(\frac{a}{b}+\frac{1}{\frac{a}{b}}\right)$ avec a et b bien choisis.

127 Une récurrence forte (1)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Montrer par récurrence forte que $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 2^n u_0$.

128 Une récurrence forte (2)

Montrer par récurrence forte que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\,(p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad n = 2^p(2q+1)$$

Ensembles

129 **Ménage à 4, puis à 3**

Soit E un ensemble et A, B, C, D des parties de E.

1. Montrer l'implication $(A \subset C \text{ et } B \subset D) \implies A \cup B \ \subset \ C \cup D$.
2. Montrer l'équivalence $B \subset C \iff (A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C)$.
3. Montrer l'équivalence $A \subset B \iff \forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.

130 **A-B-C**

Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E. Montrer l'implication

$$A \setminus B = C \implies A \cup B = B \cup C.$$

131 **Recouvrement**

Soient Ω un ensemble et A, B deux parties de Ω. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \cup B = \Omega$.

(ii) $\forall X \in \mathcal{P}(\Omega),\ \big(X \cap A = \varnothing \implies X \subset B\big)$.

132 **Partition**

Soit E un ensemble et soient A, B deux parties de E.
Montrer l'équivalence :

$$\begin{cases} A \cap B = \varnothing \\ A \cup B = E \end{cases} \iff E = (B \setminus A) \cup (A \setminus B).$$

133 **Somme de deux parties de $\mathbb{R}$**

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$.
On définit l'ensemble **somme de A et B** par :

$$A \boxplus B = \Big\{a + b \mid a \in A,\ b \in B\Big\} \quad \text{ou encore} \quad A \boxplus B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a + b\}.$$

1. Dans le cas particulier où $A = \{0, 1\}$ et $B = \{1, 4\}$, déterminer $A \boxplus B$.
2. Montrer que : $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cup A_2) \boxplus B = (A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B)$.
3. (a) Montrer que : $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cap A_2) \boxplus B \subset (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   (b) L'assertion $\forall A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ (A_1 \cap A_2) \boxplus B = (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$ est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

134 **Le disque unité n'est pas un produit cartésien !**

Montrer que l'ensemble $\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\Big\}$ ne peut pas s'écrire comme le produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$.

135 **Nombres de Fibonacci (théorème de Zeckendorf, 1952)**

On définit les *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n \geqslant 1}$ par :

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Conjecturer puis démontrer une expression simple pour la somme
$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n.$$
2. Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ peut s'écrire comme une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs.

Cette question est difficile et ne doit être abordée que si la totalité des autres exercices a été traitée !

Rudiments de logique

corrigés

101

La proposition (i) signifie que l'équation E possède *au moins une* solution réelle.
La proposition (ii) signifie que l'équation E possède *au plus une* solution réelle.
La proposition (iii) signifie que l'équation E possède *exactement une* solution réelle.

(i) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ VERSUS $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

L'assertion de gauche, c'est la définition d'une fonction (l'assertion est vraie).

L'assertion de droite dit que f est constante (l'assertion est donc vraie ou fausse selon la fonction f considérée).

(ii) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$ VERSUS $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

L'assertion de gauche dit que tout élément réel est atteint par f (l'assertion est donc vraie ou fausse selon la fonction f considérée).

On dira plus tard dans l'année que f est surjective.

L'assertion de droite dit : « il existe un x tel que son image $f(x)$ fasse tous les réels du monde ! ». Cette assertion est clairement fausse (si vous n'êtes pas convaincu, montrer que sa négation est vraie !)

(iii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$ VERSUS $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

L'assertion de gauche dit que, pour x fixé, on peut trouver M tel que $f(x) \leqslant M$. C'est vrai, prendre par exemple $M = f(x) + 1$.

L'assertion de droite dit que l'on peut trouver un M comme précédemment, mais qui fonctionne pour tout x ! Cela dit que la fonction f est majorée (l'assertion est donc vraie ou fausse selon la fonction f considérée : vraie si f est majorée, et fausse sinon !).

103

1. L'assertion (i) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \Big(f(x) = 1 \text{ ou } f(x) = -1\Big)$ signifie que f ne peut prendre que deux valeurs, à savoir 1 et -1.

   On dit parfois « f prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ » ; plus tard dans l'année, on écrira $f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$, ou encore $\operatorname{Im} f \subset \{-1, 1\}$ pour dire que l'image de f est incluse dans $\{-1, 1\}$.

   L'assertion (ii) $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\Big)$ ou $\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\Big)$ signifie que f est constante égale à 1 ou bien f est constante égale à -1.
2. Le lecteur vérifiera que (ii) $\Rightarrow$ (i), mais (i) $\not\Rightarrow$ (ii).
3. La négation de (i) est $\exists\, x \in \mathbb{R}, \Big(f(x) \neq 1 \text{ et } f(x) \neq -1\Big)$.

   La négation de (ii) est $\Big(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \neq 1\Big)$ et $\Big(\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) \neq -1\Big)$
4. Une solution possible :

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{-1, 1\}\Big) \text{ et } \Big(\exists\, x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 1\Big) \text{ et } \Big(\exists\, x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) = -1\Big)$$

   ou encore :

$$\Big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \{-1, 1\}\Big) \text{ et } \Big(\forall\, y \in \{-1, 1\},\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ y = f(x_0)\Big)$$

   ou encore :

$$f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\} \text{ et } \Big(\forall\, y \in \{-1, 1\},\ \exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ y = f(x_0)\Big)$$

   Le must :

$$f(\mathbb{R}) = \{-1, 1\}$$

104

Sachant $(\star)$, montrons

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \Big(\forall\, \varepsilon' > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon'\Big) \implies x \leqslant y$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
Supposons la prémisse $\forall\, \varepsilon' > 0,\ x \leqslant y + \varepsilon'$.
Autrement dit, on suppose $\forall\, \varepsilon' > 0,\ x - y \leqslant \varepsilon'$

Posons $a = x - y$. Ce réel a vérifie donc $\quad \forall\, \varepsilon' > 0,\ a \leqslant \varepsilon'$.
D'après $(\star)$, on en déduit que $a \leqslant 0$.

Donc $x \leqslant y$.

105

1. Supposons la conjecture de Goldbach forte.

   Montrons la conjecture de Goldbach faible, c'est-à-dire que tout nombre impair $\geqslant 7$ est la somme de trois nombres premiers.

   Soit $n \geqslant 7$ un nombre impair.

   On va appliquer la conjecture de Goldbach forte à l'entier $n-3$. C'est légitime car

   — On a bien $n-3$ pair (car n est impair).

   — On a bien $n-3 \geqslant 4$ (car $n \geqslant 7$).

   D'après la conjecture de Goldbach forte, on peut donc trouver deux nombres premiers p et q tels que $n-3=p+q$.

   On en déduit $n=3+p+q$.

   On a donc bien écrit n comme la somme de trois nombres premiers.

2. Rien !

106

La règle donnée est une implication logique : si une face est une voyelle, l'autre est un nombre pair. Cette implication est encore équivalente à « une face est une consonne OU l'autre face est un nombre pair ».
Ainsi, une carte qui présente une consonne ou un nombre pair respecte nécessairement la règle.
Pour savoir si la règle est respectée, il faut donc

— retourner $\boxed{\mathbf{A}}$ (et voir si derrière se cache un nombre pair).

— retourner $\boxed{\mathbf{1}}$ (et voir si derrière se cache une consonne).

107

1. Donnons deux méthodes, l'une par contraposée, l'autre en suivant le canevas standard.

   Première méthode (par contraposée).

   On va montrer la contraposée de l'assertion, c'est-à-dire

   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ (x \leqslant 1 \text{ et } y \leqslant 1) \implies x + y \leqslant 2$$

   Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 1$.
   En sommant, on obtient $x + y \leqslant 2$.
   D'où l'implication.

   Deuxième méthode (canevas standard).

   Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x + y > 2$.
   Montrons $x > 1$ ou $y > 1$ par la méthode standard (c'est-à-dire en supposant la négation de $x > 1$ et en montrant $y > 1$).
   Supposons $\textsc{non}(x > 1)$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$.
   Montrons $y > 1$.
   En ajoutant l'inégalité stricte $x + y > 2$ et l'inégalité large $1 \geqslant x$, on obtient l'inégalité stricte $x + y + 1 > x + 2$.
   En ajoutant $-(x + 1)$ des deux côtés, il vient $y > 1$.

2. La réciproque est

   $$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad (x > 1 \ \text{ ou } \ y > 1) \implies x + y > 2.$$

   Cette réciproque est fausse. Prouvons-le en montrer que sa négation est vraie.
   La négation est

   $$\exists\, x, y \in \mathbb{R},\ \Big((x > 1 \ \text{ ou } \ y > 1) \ \text{ et } \ x + y \leqslant 2\Big)$$

   que l'on montre facilement en prenant par exemple $x = 0$ et $y = \frac{3}{2}$.

Sens direct. Supposons (i).

On peut donc trouver c tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$ (✠).
Montrons (ii).
Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Le nombre x_1 appartient à $\mathbb{R}$, donc on peut lui appliquer la $\forall$-assertion (✠).
On en déduit $f(x_1) = c$.
De même, d'après (✠), $f(x_2) = c$.
On a donc $f(x_1) = f(x_2)$.

Cela conclut la preuve de (ii).

Sens réciproque. Supposons (ii).
Montrons (i), c'est-à-dire $\exists\, c \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$.
Candidat : $c = f(0)$.

- On a bien $c \in \mathbb{R}$.
- Montrons que c vérifie la propriété, c'est-à-dire que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = c$.
  Soit $t \in \mathbb{R}$.

  Les nombres 0 et t sont réels, donc on peut leur appliquer la $\forall$-assertion (ii).
  On en déduit que $f(0) = f(t)$, c'est-à-dire que $f(t) = c$.

Cela conclut la preuve de (i).

1. Donnons deux méthodes, l'une par contraposée, l'autre en suivant le canevas standard.

• Première méthode (par contraposée)

Fixons $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Supposons NON $\big(\forall\, i,\ a_i = 0\big)$, donc il existe i_0 tel que $a_{i_0} \neq 0$.
Montrons NON $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i = 0\right)$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

Comme a_{i_0} est positif (hypothèse de l'énoncé) et non nul (hypothèse du raisonnement), on a $a_{i_0} > 0$.
Montrons maintenant ce que l'on doit montrer !
Par sommation par paquets, et avec les hypothèses, on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ = \ \underbrace{a_{i_0}}_{>0} + \underbrace{\sum_{i \neq i_0} a_i}_{\geqslant 0}$$

On en déduit que la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est strictement positive (la somme d'un nombre strictement positif et d'un positif est un nombre strictement positif).
A fortiori, la somme $\sum_{i=1}^{n} a_i$ est **non** nulle !

• Deuxième méthode (par itération finie)

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Supposons $a_1 + \cdots + a_n = 0$.
Montrons que tous les a_i sont nuls.

— Montrons tout d'abord que $a_n = 0$.
D'une part, a_n est un réel positif par hypothèse.
D'autre part, on a (par hypothèse)

$$a_n \ = \ -(a_1 + \cdots + a_{n-1})$$

donc a_n est négatif (car égal à l'opposé d'une somme de réels positifs).
Donc $a_n = 0$.

— On a donc $a_1 + \cdots + a_{n-1} = 0$ (grâce à l'hypothèse initiale et au fait que $a_n = 0$.
On montre comme précédemment que $a_{n-1} = 0$.

— En itérant un nombre fini de fois ce procédé, on finit par obtenir

$$a_{n-2} = \cdots = a_1 = 0$$

On a donc montré que $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$.
Bilan. On a montré l'implication :

$$\forall\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+, \quad a_1 + \cdots + a_n = 0 \implies \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$$

• Deuxième méthode bis (par récurrence finie, forte, descendante !)

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Supposons $a_1 + \cdots + a_n = 0$.
Montrons que tous les a_i sont nuls.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons $\mathcal{H}_i$ l'assertion « $a_i = 0$ ».
Montrons $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \mathcal{H}_i$.
Procédons par récurrence finie, forte, descendante !

Initialisation. Montrons $\mathcal{H}_n$.

Hérédité. Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\mathcal{H}_n, \dots, \mathcal{H}_{i+1}$. Montrons $\mathcal{H}_i$.

D'après l'hypothèse de l'énoncé, on a $a_1 + \cdots + a_n = 0$.

D'après $\mathcal{H}_n, \dots, \mathcal{H}_{i+1}$, on a $a_n = \cdots = a_{i+1} = 0$.

D'où $a_1 + \cdots + a_i = 0$ puis

$$a_i = -(a_1 + \cdots + a_{i-1})$$

donc a_i est négatif (car égal à l'opposé d'une somme de réels positifs).

Comme a_i est positif par hypothèse, on a donc $a_i = 0$.

D'où $\mathcal{H}_i$.

• Troisième méthode (la plus jolie, la plus efficace !)

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$.
Supposons $a_1 + \cdots + a_n = 0$.
Montrons que $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i = 0$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
D'après l'hypothèse, on a

$$a_i = -(a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n)$$

donc a_i est négatif (car égal à l'opposé d'une somme de réels positifs).
Comme a_i est positif par hypothèse, on a donc $a_i = 0$.
D'où $a_i = 0$.

2. Calculons $(1-x_1)^2 + \cdots + (1-x_n)^2$. On a

$$\begin{array}{rcl}
(1-x_1)^2 + \cdots + (1-x_n)^2 & = & (1 - 2x_1 + x_1^2) + \cdots + (1 - 2x_n + x_n^2) \\
& = & \underbrace{(1 + \cdots + 1)}_{=n} - 2\underbrace{(x_1 + \cdots + x_n)}_{=n} + \underbrace{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}_{=n} \quad \text{on utilise les deux hypothè} \\
& = & n - 2n + n \\
& = & 0
\end{array}$$

On peut appliquer la question 1 à $a_i = (1-x_i)^2$. En effet, $a_i \in \mathbb{R}^+$ et la somme des a_i est nulle.

On en déduit que tous les a_i sont nuls.

Autrement dit, $\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ (1-x_i)^2 = 0$. D'où

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 1$$

111

Raisonnons par l'absurde et supposons que les trois produits sont strictement supérieurs à $\frac{1}{4}$:

$$a(1-b) > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad b(1-c) > \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad c(1-a) > \frac{1}{4}$$

Par produit d'inégalités **positives**, on a

$$a(1-b) \times b(1-c) \times c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui s'écrit encore (par commutativité de $\times$) :

$$(\clubsuit) \qquad abc(1-a)(1-b)(1-c) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

Or, on sait que $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$, donc on a

$$a(1-a) \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad b(1-b) \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad c(1-c) \leqslant \frac{1}{4}$$

Et on a $a(1-a) \geqslant 0$ (en effet, $a \geqslant 0$ par hypothèse, et l'inégalité $c(1-a) > \frac{1}{4}$ implique que $1-a \geqslant 0$ car $c \geqslant 0$).
De la même façon $b(1-b) \geqslant 0$ et $c(1-c) \geqslant 0$.
Par produit d'inégalités **positives**, on a

$$a(1-a) \times b(1-b) \times (1-c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui s'écrit encore (par commutativité de $\times$) :

$$abc(1-a)(1-b)(1-c) \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ce qui contredit l'inégalité $(\clubsuit)$ précédente.

Montrons qu'il existe un unique couple de fonctions (g, h) tel que $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$.

C'est un problème d'existence et unicité, procédons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe un couple de fonctions (g, h) tel que $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$

On a une égalité de *fonctions* et l'on en fait une infinité d'égalité de *réels* (en appliquant à $x \in \mathbb{R}$ puis à $-x$ et en tenant compte de la parité des fonctions) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

En ajoutant et soustrayant, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$

Pour la culture :

on pourrait résumer cela en une seule égalité de *fonctions* : $\begin{cases} g = \dfrac{f + \widetilde{f}}{2} \\ h = \dfrac{f - \widetilde{f}}{2} \end{cases}$ en notant $\widetilde{f} : x \mapsto f(-x)$

Synthèse. Réciproquement, considérons g et h les fonctions définies par

$$\begin{cases} g : x \mapsto \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

On vérifie facilement (à vous de le faire sur une copie) que $\begin{cases} f = g + h \\ g \text{ paire} \\ h \text{ impaire} \end{cases}$

Bilan. On a montré que f s'écrit (cf. la synthèse) de manière unique (cf. l'analyse) comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On procède par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant ♠.

En particulier, l'assertion ♠ pour $x = 0$ fournit :

$$(\star) \qquad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(0)f(y) - f(0) = y$$

En particulier, l'assertion ♠ pour $y = 0$ fournit :

$$f(0)^2 - f(0) = 0$$

c'est-à-dire

$$f(0)\big(f(0) - 1\big) = 0$$

D'où $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

• Montrons que le cas $f(0) = 0$ est impossible.
Supposons $f(0) = 0$. En reprenant l'égalité précédente $(\star)$ avec $y = 1$, on a

$$f(0)f(1) - f(0) = 1$$

et comme on suppose $f(0) = 0$, on obtient $0 = 1$, ce qui est absurde.

On a donc $f(0) = 1$. L'égalité $(\star)$ devient

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad 1 \times f(y) - 1 = y$$

On a donc

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = y + 1$$

Ainsi, si une telle fonction f existe, alors nécessairement elle est égale à la fonction

$$f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$$

Ici, dans cet exercice, à la fin de l'analyse, on trouve qu'il y a 0 ou 1 fonction à vérifier ♠

Synthèse. Montrons que la fonction $f_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}$ vérifie la condition ♠.

Fixons $x, y \in \mathbb{R}$.
On a

$$\begin{aligned} f_0(x)f_0(y) - f_0(xy) &= (x+1)(y+1) - (xy+1) \\ &= x + y \end{aligned}$$

Bilan. On a montré l'égalité d'ensembles

$$\Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ vérifie } \spadesuit \Big\} = \{x \mapsto x+1\}$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions vérifiant la condition ♠ est l'ensemble $\{x \mapsto x+1\}$.
Autrement dit, il n'y a qu'une seule fonction à vérifier la condition ♠ à savoir $x \mapsto x + 1$.

Analyse. Soit f une fonction vérifiant $(\star)$.

— En utilisant $(\star)$ avec $x=1$ et $y=1$, on trouve

$$f(1)f(1) = 2\big[f(1)+f(1)\big] + 1\times 1 - 4$$

D'où $f(1)$ est solution de l'équation $t^2-4t+3=0$, qui a pour solution 1 et 3.
Ainsi $f(1)=1$ ou $f(1)=3$.

— En utilisant $(\star)$ avec $y=1$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(1) \;=\; 2\big[f(x)+f(1)\big] \;+\; x\times 1 \;-\; 4$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Big(f(1)-2\Big)f(x) \;=\; 2f(1)+x-4$$

Cas $f(1)=1$
Dans ce cas, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f(x) \;=\; 2+x-4$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; -x+2$$

Cas $f(1)=3$
Dans ce cas, on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; 2\times 3+x-4$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \;=\; x+2$$

Bilan de l'analyse : une fonction vérifiant $(\star)$ est égale à $f_1 : x \mapsto -x+2$ ou $f_2 : x \mapsto x+2$.
Autre façon de formuler le bilan de l'analyse :

$$\Big\{f \mid f \text{ vérifie } (\star)\Big\} \;\subset\; \{f_1, f_2\}$$

Synthèse. Regardons si f_1 et f_2 vérifient ou non $(\star)$.

— Montrons que f_2 vérifie $(\star)$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$.
On a d'une part :

$$\begin{aligned} f_2(x)f_2(y) &= (x+2)(y+2) \\ &= xy + 2(x+y) + 4 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} 2\big[f_2(x)+f_2(y)\big] + xy - 4 &= 2\big[(x+2)+(y+2)\big] + xy - 4 \\ &= 2\big[x+y+4\big] + xy - 4 \\ &= xy + 2(x+y) - 4 \end{aligned}$$

Les deux membres sont égaux, donc f_2 vérifie $(\star)$.

— Un calcul analogue montre que f_1 vérifie $(\star)$.

Bilan de la synthèse : f_1 et f_2 sont deux fonctions qui vérifient $(\star)$.
Autre façon de formuler le bilan de la synthèse :

$$\{f_1, f_2\} \;\subset\; \Big\{f \mid f \text{ vérifie } (\star)\Big\}$$

Bilan. L'ensemble des fonctions f vérifiant $(\star)$ est égal à l'ensemble $\{f_1, f_2\}$.

Deuxième solution (beaucoup plus compliqué pour un élève ; et en fait, ce n'est PAS une belle preuve !)

Analyse. Soit f vérifiant $(\star)$.

En particulier, en prenant $y = x$ dans $(\star)$, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 - 4f(x) + (4 - x^2) = 0$$

Ainsi, $\boxed{\textbf{à } x \textbf{ fixé}}$, $f(x)$ est solution de $t^2 - 4t + (4 - x^2) = 0$, de discriminant $4x^2$ et dont les solutions sont $t = \dfrac{4 \pm 2x}{2} = 2 \pm x$.

Bilan à ce stade. Une fonction f vérifiant $(\star)$ est du type

$$f : x \mapsto 2 + \varepsilon(x)x$$

où ε est une fonction qui prend ses valeurs dans $\{-1, 1\}$.

Remarquons, qu'a priori, on ne sait pas si ε est constante égale à 1 ou constante égale à -1 (ce qui va finir par être vrai).

Reprenons la condition $(\star)$ vérifiée par f avec la forme de f trouvée.

On a

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad (2 + \varepsilon(x)x)(2 + \varepsilon(y)y) \;=\; 2\Big[(2 + \varepsilon(x)x) + (2 + \varepsilon(y)y)\Big] + xy - 4$$

d'où

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad 4 + 2\Big(\varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big) + \varepsilon(x)\varepsilon(y)xy \;=\; 2\Big[4 + \varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big] + xy - 4$$

d'où

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad 4 + 2\Big(\varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big) + \varepsilon(x)\varepsilon(y)xy \;=\; 2\Big[\varepsilon(x)x + \varepsilon(y)y\Big] + xy + 4$$

d'où

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon(x)\varepsilon(y)xy \;=\; xy$$

d'où

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*, \quad \varepsilon(x)\varepsilon(y) = 1$$

Cela impose à ε d'être une fonction constante égale à 1 ou -1 sur $\mathbb{R}^*$ (WHY, ce n'est pas du tout une évidence).

De plus, sa valeur en 0 n'impacte pas sur f, car $f(0) = 2$ quoi qu'il arrive.

Ainsi, ε est constante égale à 1 ou -1 sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Bilan de l'analyse. Une fonction vérifiant $(\star)$ est égale à $x \mapsto 2 + x$ ou bien à $x \mapsto 2 - x$.

Synthèse. Vérifions que les fonctions $x \mapsto 2 + x$ et $x \mapsto 2 - x$ vérifient $(\star)$.

À vous.

BILAN : l'ensemble des fonctions vérifiant $(\star)$ est $\Big\{x \mapsto 2 + x\ ;\ x \mapsto 2 - x\Big\}$

120

Soit $\chi = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Montrons qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in A \times B$ tel que $\chi = \alpha + \beta$.
Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\alpha = (a_1, a_2) \in A$ et $\beta = (b_1, b_2) \in B$ tels que $\chi = \alpha + \beta$.

On a alors $\begin{cases} x &= a_1 + b_1 \\ y &= a_2 + b_2. \end{cases}$

De plus $\alpha \in A$ donc $a_1 + a_2 = 0$, c'est-à-dire $a_2 = -a_1$ et $\beta \in B$ donc $b_1 = b_2$.

On en déduit $\begin{cases} x &= a_1 + b_1 \\ y &= -a_1 + b_1 \end{cases}$

et ainsi $\begin{cases} a_1 &= \dfrac{x-y}{2} \\ b_1 &= \dfrac{x+y}{2}. \end{cases}$

Finalement $\alpha = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$ et $\beta = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$.

Synthèse. Posons $\alpha = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$ et $\beta = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$. On a alors :

- $\dfrac{x-y}{2} + \dfrac{y-x}{2} = 0$ donc $\alpha \in A$;
- les deux composantes de β sont égales donc $\beta \in B$;
- $\alpha + \beta = (x, y) = \chi$.

La synthèse prouve que χ s'écrit comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B.
L'analyse prouve que cette écriture est unique.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}_n$ l'assertion

$$\mathcal{P}_n : « \tfrac{1}{1^2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2} + \cdots + \tfrac{1}{n^2} \ \leqslant\ 2 - \tfrac{1}{n} ».$$

Montrons $\forall\, n \geqslant 1,\ \mathcal{P}_n$.
Procédons par récurrence simple.

Initialisation. On a $\frac{1}{1^2} = 1$ et $2 - \frac{1}{1} = 1$, d'où $\mathcal{P}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_n$.

On a :

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)}_{\leqslant \left(2 - \frac{1}{n}\right) \text{ d'après } \mathcal{P}_n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

On a donc :

$$(\star) \qquad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \ \leqslant\ 2 + \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n}\right)$$

Faisons une pause dans notre raisonnement et montrons que $\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n+1}$.
Pour cela, raisonnons par chaîne d'équivalences.
On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \leqslant -\frac{1}{n+1} \quad &\iff \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&\iff \quad \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n(n+1)} \\
&\iff \quad n(n+1) \leqslant (n+1)^2 && \text{décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\\
&\iff \quad n \leqslant n+1 && \text{division par } n+1 > 0
\end{aligned}$$

L'assertion finale est vraie, donc l'assertion initiale aussi. Donc

$$\text{l'inégalité} \quad \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n} \ \leqslant\ -\frac{1}{n+1} \quad \text{est vraie}$$

Reprenons l'inégalité $(\star)$. Par transitivité de $\leqslant$, on a donc

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \ \leqslant\ 2 - \frac{1}{n+1}$$

ce qui démontre $\mathcal{P}_{n+1}$.

Montrons
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Attention, on ne fixe pas n (il n'y a donc pas de « soit $n \in \mathbb{N}^*$ », car nous allons procéder par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \text{« } (1+x)^n \geqslant 1+nx \text{ »}$$

Procédons par récurrence.

Initialisation.

Le membre gauche $(1+x)^1 = 1+x$ est supérieur ou égal au membre droit $1+1\times x = 1+x$.
D'où $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$.

Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.
D'après $\mathcal{H}_n$, on a
$$(1+x)^n \geqslant 1+nx$$
Multiplions cette inégalité par $1+x$ qui est positif. On obtient :
$$(1+x)^{n+1} \geqslant \underbrace{(1+nx)(1+x)}_{=1+(n+1)x+nx^2}$$
Comme $nx^2 \geqslant 0$, on obtient :
$$(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$$
D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

Bilan de la récurrence. On a montré
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n$$

Bilan de la question. On a montré
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{H}_n$$

124

1. Soit $n \geqslant 3$ tel que $\mathcal{P}_n$.
   Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$.
   D'après $\mathcal{P}_n$, on a $2^n > n^2$.
   En multipliant par 2, on a $2^{n+1} > 2n^2$.
   Montrons que $2n^2 \geqslant (n+1)^2$ ce qui suffira à conclure (car on aura alors $2^{n+1} > 2(n+1)^2$).
   On a les équivalences suivantes :

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2 \iff n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$$

   et le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Comme $n \geqslant 3$ et $3 \geqslant 1 + \sqrt{2}$, on en déduit que $n^2 - 2n - 1 \geqslant 0$, d'où $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

   Autre solution.
   On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
2n^2 \geqslant (n+1)^2 &\iff \sqrt{2}n \geqslant n+1 \\
&\iff (\sqrt{2}-1)n \geqslant 1 \\
&\iff n \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\
&\iff n \geqslant \sqrt{2}+1 \qquad \text{car } \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1
\end{aligned}$$

2. On a

$$1 = 2^0 \; > \; 0^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2 = 2^1 \; > \; 1^2 = 1 \quad \text{mais} \quad \cancel{2^2 > 2^2} \quad \cancel{2^3 > 3^2} \quad \cancel{2^4 > 4^2}$$

   En revanche $2^5 > 5^2$.
   D'après la question 1, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 5$.
   Bilan. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4\}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

• $1^{\text{ère}}$ preuve, sans récurrence
Sans récurrence, on prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n+2} = u_{2n} \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = u_{2n+1}$$

Pour cela, on fixe $n \in \mathbb{N}$, et on calcule u_{2n+2} en fonction de u_{2n+1} puis u_{2n+1} en fonction de u_{2n}, ce qui permet d'avoir u_{2n+2} en fonction de u_{2n}. Précisément

$$u_{2n+2} \;=\; \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+1}-1} \;=\; \frac{\dfrac{u_{2n}}{u_{2n}-1}}{\dfrac{u_{2n}}{u_{2n}-1}-1} \;\overset{\text{WHY}}{=}\; u_{2n}$$

Une fois cela fait, on en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_0, qui vaut $\frac{1}{2}$.
On établit une formule analogue pour u_{2n+3} en fonction de u_{2n+1}. Et on en déduit que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à u_1, qui vaut $\dfrac{u_0}{u_0-1} = -1$.

• $2^{\text{ème}}$ preuve
On commence par prouver par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{2n} = \frac{1}{2}$$

Je vous laisse faire (dans l'hérédité, vous aurez à prouver que $u_{2n+2} = \frac{1}{2}$, donc vous aurez à exprimer u_{2n+2} en fonction de u_{2n} comme dans la première preuve).

Puis, on prouve, sans effort, que $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{2n+1} = -1$ (donc sans récurrence). Et ceci grâce au fait que l'on vient de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \frac{1}{2}$. Allons-y. Fixons $n \in \mathbb{N}$.
On a

$$u_{2n+1} \;=\; \frac{u_{2n}}{u_{2n}-1} \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} \;=\; -1$$

• $3^{\text{ème}}$ preuve **maladroite**
On prouve par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1$$

1. Supposons ($A \subset C$ et $B \subset D$).
   Montrons $A \cup B \ \subset \ C \cup D$.

   Soit $x \in A \cup B$.

   On a donc $x \in A$ ou $x \in B$.

   Cas $x \in A$. Par hypothèse $A \subset C$. Et on a toujours $C \subset C \cup D$. Donc $A \subset C \cup D$.
   Comme $x \in A$, on en déduit $x \in C \cup D$.

   Cas $x \in B$. Ce cas est totalement similaire (à vous).
   Il suffit d'échanger les rôles joués par A, B d'une part, et C, D d'autre part.

   Dans tous les cas, on a $x \in C \cup D$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $B \subset C$.

   — Montrons $A \cup B \ \subset \ A \cup C$.
   On utilise la question précédente avec les inclusions $A \subset A$ et $B \subset C$.
   On en déduit $A \cup B \ \subset \ A \cup C$.

   — Montrons $A \cap B \subset A \cap C$.
   Soit $x \in A \cap B$.

   - On a $x \in A$.
   - On a $x \in B$. Or $B \subset C$ par hypothèse. Donc $x \in C$.

   Ainsi, $x \in A \cap C$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $A \cup B \subset A \cup C$ $(*)$ et $A \cap B \subset A \cap C$ $(**)$.
   Montrons $B \subset C$.
   Soit $x \in B$.
   On a $B \subset A \cup B$ (toujours) et $A \cup B \subset A \cup C$ (hypothèse $*$), donc $B \subset A \cup C$.
   Ainsi x, qui est dans B, appartient à $A \cup C$.

   - Cas $x \in A$.
     Comme $x \in B$, et $x \in A$ dans ce cas, on a $x \in A \cap B$.
     D'après l'hypothèse $(**)$, on obtient $x \in A \cap C$.
     A fortiori, $x \in C$.
   - Cas $x \in C$.
     Dans ce cas, on a $x \in C$.

   Dans les deux cas, on a $x \in C$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \subset B$.
   Montrons l'assertion de droite.
   Soit $X \in \mathscr{P}(E)$.
   Comme $A \subset B$, l'implication directe de la question 2 (avec des notations adaptées !) permet d'obtenir $A \cap X \subset B \cap X$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall X \in \mathscr{P}(E),\ A \cap X \subset B \cap X$.
   En particulier, pour $X = E \in \mathscr{P}(E)$, on obtient $A \cap E \subset B \cap E$.
   D'où $A \subset B$.

Supposons que $A \setminus B = C$.
Montrons l'égalité d'ensembles $A \cup B = B \cup C$.
1ère preuve : par double inclusion

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in A \cup B$. Montrons que $x \in B \cup C$.

Procédons par disjonction de cas : $x \in B$ ou sinon $x \notin B$.

- Cas $x \in B$. Comme $B \subset B \cup C$ (toujours), on a $x \in B \cup C$.
- Cas $x \notin B$. Comme $x \in A \cup B$ par hypothèse, on a alors dans ce cas $x \in A$.
  On a donc $x \in A \setminus B$. Or par hypothèse $A \setminus B = C$.
  Donc $x \in C$.
  A fortiori, $x \in B \cup C$.

$\boxed{\supset}$ Montrons $B \cup C \subset A \cup B$.

D'après l'implication $\Rightarrow$ de la question 2 (avec des notations adaptées), il suffit de montrer l'inclusion $C \subset A$.

On a toujours $(A \setminus B) \subset A$. Or par hypothèse, $A \setminus B = C$, d'où $C \subset A$.

2ème preuve : par égalité ensembliste
Montrons que $A \cup B$ est égal à $(A \setminus B) \cup B$.
On a :

$$\begin{array}{rcll} (A \setminus B) \cup B & = & (A \cap \overline{B}) \cup B & \text{d'après le cours} \\ & = & (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) & \text{par distributivité de l'union par rapport à l'intersection} \\ & = & (A \cup B) \cap E & \\ & = & A \cup B. & \end{array}$$

Or, par hypothèse, $A \setminus B = C$ d'où

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B = C \cup B = B \cup C$$

Montrons (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons (i) $A \cup B = \Omega$.
Montrons l'assertion (ii).

Soit $X \in \mathcal{P}(\Omega)$ telle que $X \cap A = \varnothing$.
Montrons que $X \subset B$.

Soit $x \in X$.
A fortiori, $x \in \Omega$.
D'après (i), on a donc $x \in A$ ou $x \in B$.
Or $X \cap A = \varnothing$ donc le premier cas est impossible et on est dans le deuxième cas.
D'où $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons (ii).
Montrons que $A \cup B = \Omega$.
Procédons par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Comme A et B sont deux parties de Ω, on a bien sûr, $A \cup B \subset \Omega$.

$\boxed{\supset}$ Montrons $\Omega \subset A \cup B$.
Soit $x \in \Omega$. Montrons que $x \in A \cup B$.
Distinguons deux cas.

— Cas $x \in A$. Dans ce cas, on a $x \in A \cup B$.
— Cas $x \notin A$. Posons $X = \{x\}$. Comme $x \notin A$, on a donc $X \cap A = \varnothing$.
On peut donc appliquer l'hypothèse (ii) avec ce X.
On obtient $X \subset B$.
Comme par définition $x \in X$, on a $x \in B$.
A fortiori, $x \in A \cup B$.

Dans les deux cas, on a $x \in A \cup B$.

$\boxed{\supset}$ **Autre preuve (dangereuse pour un élève, mais elle fonctionne !).** Vous remarquerez qu'il n'y a pas d'éléments dans cette preuve que de la manipulation d'ensembles.

Appliquons l'hypothèse (ii) avec la partie $X = \Omega \setminus A$ qui vérifie bien $X \cap A = \varnothing$.
On en déduit $X \subset B$, c'est-à-dire $(\Omega \setminus A) \subset B$.
En prenant l'union avec A de cette inclusion, on obtient :

$$A \cup (\Omega \setminus A) \ \subset \ A \cup B$$

Or $A \cup (\Omega \setminus A) = \Omega$ donc $\Omega \subset A \cup B$.

Bilan. On a donc montré que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = E$.
Montrons $E = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$.
Procédons par double inclusion.
L'inclusion $\supset$ est évidente.
Montrons l'autre inclusion $\subset$.
Soit $x \in E$. Puisque $E = A \cup B$ par hypothèse, on peut distinguer deux cas :

$$x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$$

Puisque $A \cap B = \varnothing$, ce « ou » est exclusif, donc

$$x \in A \setminus B \quad \text{ou} \quad x \in B \setminus A$$

D'où $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $E = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Montrons successsivement $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$.

— On a tout d'abord $(A \setminus B) \subset A$ et $(B \setminus A) \subset B$. Ainsi (reprendre la question 1 de l'exercice 129).

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset A \cup B.$$

Or, par hypothèse $E = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, d'où $E \subset A \cup B$.
L'autre inclusion $E \supset A \cup B$ étant évidente, on obtient l'égalité $A \cup B = E$.

— Montrons $A \cap B = \varnothing$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $A \cap B$ n'est pas vide.
Il existe alors $x \in A \cap B$. Autrement dit, on a $x \in E$ et

$$x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$$

On en déduit que

$$x \notin A \setminus B \quad \text{et} \quad x \notin B \setminus A$$

D'où $x \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
Or $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = E$ par hypothèse.
D'où $x \notin E$, d'où l'absurdité !

1. Soit $x \in A \boxplus B$.
   Alors x est de la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.
   Dans ce cas particulier, on a donc $a = 0$ ou 1 et $b = 1$ ou 4.
   Donc $x = a + b = 1, 4, 2$ ou 5.
   Ainsi,
   $$A \boxplus B = \{1, 2, 4, 5\}.$$

2. Soient $A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   Inclusion réciproque.

   Soit $x \in (A_1 \cup A_2) \boxplus B$.
   Alors, il existe $a \in A_1 \cup A_2$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$.
   Donc $a \in A_1$ ou $a \in A_2$.

   — Si $a \in A_1$, alors $x \in A_1 \boxplus B$.

   — Si $a \in A_2$, alors $x \in A_2 \boxplus B$.

   Donc $x \in (A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B)$.

   Inclusion directe.

   Soit $x \in (A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B)$.
   Alors $x \in A_1 \boxplus B$ ou $x \in A_2 \boxplus B$.
   Distinguons ces deux cas.

   — Si $x \in A_1 \boxplus B$, alors on peut écrire $x = a_1 + b$, où $a_1 \in A_1$ et $b \in B$.
   En particulier, on a $a_1 \in A_1 \cup A_2$.
   Donc $x \in (A_1 \cup A_2) \boxplus B$.

   — Si $x \in A_2 \boxplus B$, on procède de même.

   Ainsi, dans chacun des cas, $x \in (A_1 \cup A_2) \boxplus B$.

   Bilan. On a montré que :
   $$(A_1 \boxplus B) \cup (A_2 \boxplus B) = (A_1 \cup A_2) \boxplus B$$

3. (a) Soient $A_1, A_2, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
   Soit $x \in (A_1 \cap A_2) \boxplus B$.
   Alors, il existe $a \in A_1 \cap A_2$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$.
   Comme $a \in A_1$, on a $x \in A_1 \boxplus B$ et comme $x \in A_2$, on a $x \in A_2 \boxplus B$.
   Donc $x \in (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   Bilan :
   $$(A_1 \cap A_2) \boxplus B \subset (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$$

   (b) La réponse est non : exhibons un contre-exemple.
   En prenant $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{1, 3\}$, et $B = \{1, 4\}$, on a :

   — $A_1 \cap A_2 = \{1\}$ d'où $(A_1 \cap A_2) \boxplus B = \{2, 5\}$.

   — $A_1 \boxplus B = \{1, 2, 4, 5\}$ et $A_2 \boxplus B = \{2, 4, 5, 7\}$ d'où $(A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B) = \{2, 4, 5\}$.

   Donc $(A_1 \cap A_2) \boxplus B \neq (A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.
   Ainsi, il n'y a pas égalité (dans le cas général) entre les ensembles $(A_1 \cap A_2) \boxplus B$ et $(A_1 \boxplus B) \cap (A_2 \boxplus B)$.

1. Calculons les premières valeurs de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$F_1 + F_2 + \cdots + F_n$	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143

Il semble donc naturel de conjecturer que $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$.
Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ l'assertion « $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$ ».
Nous allons montrer $\forall\, n \geqslant 2,\ P(n)$ par récurrence simple.

Initialisation. On a $F_1 = 1$ et $F_3 - 1 = 2 - 1 = 1$, ce qui prouve $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ tel que $P(n)$. On a alors :

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_n + F_{n+1} &= (F_1 + F_2 + \cdots + F_n) + F_{n+1} \\ &= (F_{n+2} - 1) + F_{n+1} && \text{d'après } P(n) \\ &= F_{n+1} + F_{n+2} - 1 \\ &= F_{n+3} - 1 \end{aligned}$$

La dernière égalité ayant lieu d'après la définition des nombres de Fibonacci. Ceci prouve $P(n+1)$, et conclut la récurrence.

2. Pour $n \geqslant 1$, on note $P(n)$ l'assertion « n peut s'écrire comme une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs ».
Montrons $\forall\, n \geqslant 1, P(n)$ par récurrence forte.

Initialisation. On a $1 = F_1$, ce qui démontre $P(1)$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ tel que $P(m)$ soit vraie pour tous les $1 \leqslant m \leqslant n$. Démontrons $P(n+1)$.
Il ne fait guère de doute qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $F_{p_0} > n+1$ (une récurrence double montre par exemple que l'on a $F_p \geqslant p - 1$ pour tout p).
De plus, une récurrence simple montre que la suite $(F_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante, de sorte que

$$\forall\, p \geqslant p_0,\ F_p > n + 1$$

Par ailleurs, il existe des indices k tels que $F_k \leqslant n+1$ (par exemple $k = 1$, car $n+1 \geqslant 2$).
Tout ceci nous autorise donc à considérer k le plus grand des indices tels que $F_k \leqslant n+1$ (après les chapitres sur les suites et sur l'ensemble $\mathbb{N}$, on formalisera plus économiquement les arguments qui précèdent, en se servant de la propriété suivante : *toute partie finie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément*).

— Si $F_k = n + 1$, alors $n + 1$ est lui-même un nombre de Fibonacci, d'où $P(n + 1)$.

— Si $F_k < n + 1$, posons $m = n + 1 - F_k$.
Il s'agit d'un entier vérifiant $1 \leqslant m \leqslant n$ donc, d'après $P(m)$, il peut s'écrire comme une somme $F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_r}$, avec $i_{s+1} > i_s + 1$ pour tout $s \in [\![1, r-1]\!]$.
On obtient ainsi une écriture de $n + 1$ comme somme de nombres de Fibonacci :

$$n + 1 = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_r} + F_k, \qquad (\maltese)$$

dont il s'agit de montrer qu'elle ne contient pas deux nombres de Fibonacci consécutifs.
Déjà, on a $F_{i_r} \leqslant n + 1$, donc la définition de k montre que $k \geqslant i_r$.
Montrons que $k > i_r + 1$ en montrant que les cas $k = i_r$ et $k = i_r + 1$ ne peuvent pas arriver.

— Si $k = i_r$, on a

$$n + 1 \ \geqslant\ 2\,F_{i_r} \ \geqslant\ F_{i_r} + F_{i_r - 1} = F_{i_r + 1},$$

ce qui démontre que $k \geqslant i_r + 1$ et constitue une contradiction.

— Si $k = i_r + 1$, on a

$$n + 1 \ \geqslant\ F_{i_r} + F_{i_r + 1} = F_{i_r + 2},$$

ce qui démontre que $k \geqslant i_r + 2$ et constitue une contradiction.

Ainsi, $(\maltese)$ exprime bien $n + 1$ comme une somme de nombres de Fibonacci non consécutifs, ce qui prouve $P(n + 1)$ et conclut la récurrence.

1. On montre que seule la fonction nulle est solution.
2. **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.

    Plusieurs stratégies sont possibles.

    — Stratégie 1. On applique bêtement en $y = 0$ pour obtenir $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x + f(0)$.

    — Stratégie 2. On applique en $x = -t$, $y = t$ pour obtenir $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(0) + t$.

    — Stratégie 3. Le membre gauche est symétrique en x et y, donc le membre droit doit être aussi symétrique. On a donc $x + f(y) = y + f(x)$ c'est-à-dire $f(x) - x = f(y) - y$ pour tous x et y.
    Donc la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est constante.

    Bilan de l'analyse : si f vérifie $(\star)$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est de la forme $x \mapsto x + a$.

    Synthèse. On vérifie que les fonctions de cette forme (les translations) conviennent.
3. En utilisant la $\forall$-assertion avec $x = f(t)$, $y = t$, on obtient (après réécriture)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = 1 - f(0) - t.$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient $f(0) = \frac{1}{2}$.
Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2} - t$$

Bilan de l'analyse. Si f vérifie $(\star)$, alors f est la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2} - t$.

Synthèse. On montre que la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} - t$ vérifie $(\star)$.

1. Le plus simple est de faire le calcul au brouillon, et de définir les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de façon adéquate.
   Soit donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par
   $$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n. \end{cases}$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ l'assertion « $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$ et $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ ». Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence simple.
   Initialisation. On a $1 \in \mathbb{N}$ et $0 \in \mathbb{N}$ et $(3+2\sqrt{2})^0 = 1 = a_0 + b_0\sqrt{2}$, ce qui montre $P(0)$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$.
   D'après $P(n)$, on a $a_n \in \mathbb{N}$ et $b_n \in \mathbb{N}$. on en déduit que $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n \in \mathbb{N}$ et $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \in \mathbb{N}$.
   Par ailleurs, on a
   $$\begin{aligned} (3+2\sqrt{2})^{n+1} &= (3+2\sqrt{2})^n \times (3+2\sqrt{2}) \\ &= (a_n + b_n\sqrt{2}) \times (3+2\sqrt{2}) && \text{d'après } P(n) \\ &= (3a_n + 4b_n) + (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} \\ &= a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2}, \end{aligned}$$
   ce qui démontre $P(n+1)$ et clôt la récurrence.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $Q(n)$ l'assertion « $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ ». Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ par récurrence simple.
   Initialisation. On a bien $(3-2\sqrt{2})^0 = a_0 - b_0\sqrt{2}$, d'où $Q(0)$.
   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$. On a alors
   $$\begin{aligned} (3-2\sqrt{2})^{n+1} &= (3-2\sqrt{2})^n \times (3-2\sqrt{2}) \\ &= (a_n - b_n\sqrt{2}) \times (3-2\sqrt{2}) && \text{d'après } Q(n) \\ &= (3a_n + 4b_n) - (2a_n + 3b_n)\sqrt{2} \\ &= a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2}, \end{aligned}$$
   ce qui démontre $Q(n+1)$ et clôt la récurrence.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après les questions précédentes, on a $(3+2\sqrt{2})^n \times (3-2\sqrt{2})^n = (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2})$.
   Or,
   $$\begin{aligned} (3+2\sqrt{2})^n \times (3-2\sqrt{2})^n &= \left[(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right]^n \\ &= [9-8]^n \\ &= 1 \end{aligned}$$
   $$\text{et } (a_n + b_n\sqrt{2})(a_n - b_n\sqrt{2}) = a_n^2 - 2b_n^2.$$
   Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n - 2b_n^2 = 1$.
   Pour répondre à la question, il suffit maintenant de vérifier que les couples (a_n, b_n), pour n variant dans $\mathbb{N}$, constituent bien une infinité de couples. La solution la plus simple est de remarquer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par exemple, est strictement croissante, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
   $$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (3a_n + 4b_n) - a_n && \text{par définition} \\ &= 2a_n + 4b_n \\ &\geqslant 0 && \text{car } a_n, b_n \in \mathbb{N} \text{ d'après la première question.} \end{aligned}$$
   Cela démontre déjà que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme $a_0 = 1$, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, 2a_n + 4b_n > 0$, et le calcul que l'on vient de faire montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} > a_n$.
   Les couples (a_n, b_n) sont donc tous différents les uns des autres, et on en déduit qu'il existe une infinité de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Prendre $n = 2$ pour commencer.
Soit I de cardinal n.
Raisonner par l'absurde en supposant que

$$\forall i \in I,\ \exists j \neq i,\ A_j \subset A_i$$

On construit une suite (U_n) d'éléments de $(A_i)_{i\in I}$.
On pose $U_0 = A_{i_0}$ quelconque.
On pose U_1 une partie A_i incluse dans U_0 (distincte de U_0). Ca existe d'après l'hypothèse.
On pose U_2 une partie A_i incluse dans U_1 (distincte de U_1). On a alors $U_2 \subsetneq U_1 \subsetneq U_0$. Donc U_2 est distincte de U_1 et U_0.
On pose U_3 une partie incluse dans U_2 (distincte de U_2).

etc

On pose U_n une partie incluse dans U_{n-1} (distincte de U_{n-1}).
Cette partie est nécessairement parmi les n premières parties $U_0, \dots, U_{n-1}$.
Autrement dit, on a $U_n = U_k$ pour un certain k.
On a alors

$$U_k \subset U_{n-1} \subset \cdots \subset U_k$$

D'où égalité partout au milieu, ce qui contredit le fait que $U_{i+1} \neq U_i$.