Trigonométrie

I. Cercle trigonométrique, fonctions cos et sin

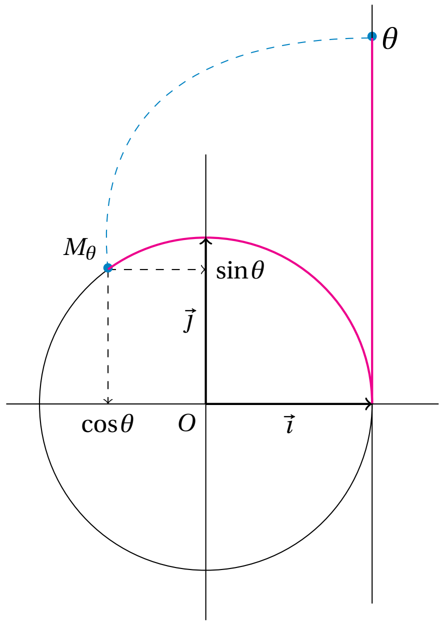
Les fonctions cosinus et sinus (notées cos et sin) ont été introduites et manipulées dans le secondaire, en se fondant sur un point de vue géométrique. L'objectif de cette partie est de présenter rapidement les premières propriétés de ces fonctions, et en particulier les formules trigonométriques.
Dans ce chapitre, nous supposons déjà connues les fonctions cos et sin, et admettons la validité du point de vue géométrique. Ainsi, les démonstrations de ce chapitre seront pour la plupart géométriques.

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Le *cercle trigonométrique* est le cercle centré en l'origine et de rayon 1 (il a pour équation $x^2 + y^2 = 1$). Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, notons M_θ le point du cercle vérifiant :

$$(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta.$$

- Le *cosinus* de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse du point M_θ.
- Le *sinus* de θ, noté $\sin\theta$, est l'ordonnée du point M_θ.



Paramétrisation

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point M_θ est sur le cercle trigonométrique, d'où $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

1 preuve

Proposition (Paramétrisation du cercle trigonométrique).
Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 + y^2 = 1 \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

Ce réel θ est de plus unique si l'on impose qu'il appartienne à $[0, 2\pi[$, ou si l'on impose qu'il appartienne à $]-\pi, \pi]$.

Périodicité

2

Proposition.
Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$

- On en déduit que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$$

3 preuve

Proposition (Quand deux réels ont le même cosinus et le même sinus).
Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta' = \theta + 2k\pi$$

- La condition à droite se note aussi $\theta \equiv \theta' \ [2\pi]$

Parité-imparité, symétries, valeurs…

4 preuve

Proposition (Parité de $\cos$ et imparité de $\sin$).
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(-\theta) = -\sin(\theta).$$

5

Proposition (Symétries).
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \pi) &= -\cos\theta & \sin(\theta + \pi) &= -\sin\theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos\theta & \sin(\pi - \theta) &= \sin\theta \\ \cos(\theta + \tfrac{\pi}{2}) &= -\sin\theta & \sin(\theta + \tfrac{\pi}{2}) &= \cos\theta \\ \cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) &= \sin\theta & \sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) &= \cos\theta \end{aligned}$$

- Les formules de la ligne 4 peuvent s'énoncer en français avec la vision géométrique des petites classes :
  Lorsque deux angles sont complémentaires, *le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.*

6 preuve

Proposition (Valeurs remarquables).

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

II. Formules...

Formules d'addition et de duplication

7 preuve **Proposition (Formules d'addition de** cos **et** sin**).**
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \qquad \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & \qquad \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

8 **Proposition (Formule de duplication).**
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(a) \end{aligned}$$

Remarque. On obtient une formule sympathique permettant en quelque sorte d'éliminer un carré sur le cosinus (idem avec le sinus) :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Ces formules annoncent les formules transformant un produit de cosinus (ou de sinus) en une somme de cosinus.

9 **Question.** Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ à l'aide de radicaux.

Transformation produit-somme (linéarisation)

10 **Proposition (Formules de linéarisation).**
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}, \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}, \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}. \end{aligned}$$

11 **Question.** Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $I_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi & m = n \end{cases}$

Transformation somme-produit (factorisation)

12 **Proposition (Formules de factorisation)**
Soit $p, q \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Transformation d'une combinaison linéaire de cosinus, sinus

13 **Proposition (Déphasage).**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ non tous les deux nuls.
Alors il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\cos x + b\sin x = M\cos(x-\varphi)$$

- Il y a même unicité de M et φ. Précisément, on a :

$$M = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad \varphi \text{ est l'unique réel de } [0,2\pi[\text{ tel que } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{M} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{M} \end{cases}$$

  Pourquoi φ est bien défini ?
- Concrètement, pour écrire $a\cos x + b\sin x$ comme un cosinus déphasé, on force la factorisation :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

  et on essaie d'écrire $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ comme le cosinus de quelqu'un, et $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ comme le sinus de ce même quelqu'un.

14 **Question.** Soit $t \in \mathbb{R}$. Écrire $\sqrt{3}\cos(5t) + \sin(5t)$ comme un cosinus déphasé.

III. La fonction tangente

Définition, propriétés

15 **Définition.**
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on pose $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Le domaine de définition de la fonction tangente s'écrit

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \quad \text{ou} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[.$$

16 **Proposition (Imparité, π-périodicité et autres formules).**
La fonction tangente est impaire et π-périodique :

$$\forall \theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi], \quad \tan(-\theta) = -\tan(\theta) \quad \text{et} \quad \tan(\theta+\pi) = \tan(\theta).$$

Pour ces mêmes θ, on a :

$$\tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta) \quad \text{et} \quad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

17 **Proposition (Valeurs remarquables).**
On a :

$$\tan(0) = 0 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Formules d'addition et de duplication

18 **Proposition.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.
On a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

- Lorsque tous les termes existent, on a

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

Tangente de l'angle moitié : cosinus et sinus

19 preuve **Proposition.**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \pi\ [2\pi]$.
On a :

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

IV. Résolution d'équations

20 preuve

Proposition (égalité entre cos, sin, tan).
Soit $t, \theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos t = \cos\theta \iff \big(t \equiv \theta\ [2\pi] \text{ ou } t \equiv -\theta\ [2\pi]\big)$$

Soit $t, \theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\sin t = \sin\theta \iff \big(t \equiv \theta\ [2\pi] \text{ ou } t \equiv \pi - \theta\ [2\pi]\big)$$

Soit $t, \theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$. On a

$$\tan t = \tan\theta \iff t \equiv \theta\ [\pi]$$

21 **Question.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

$$4\sin^2(2x) = 3 \qquad\qquad \cos x - \sin x = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

V. Une inégalité et une limite !

22 preuve

Proposition (Un inégalité classique). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leqslant |x|$.

23

Proposition (Une limite classique). On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

24 **Question.** Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{-1}{2}$.

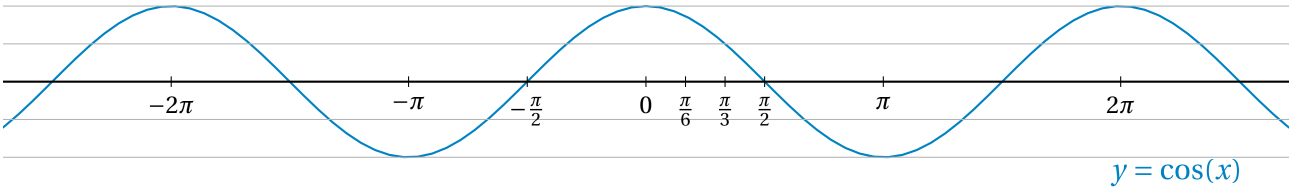
VI. Le graphe des trois fonctions circulaires

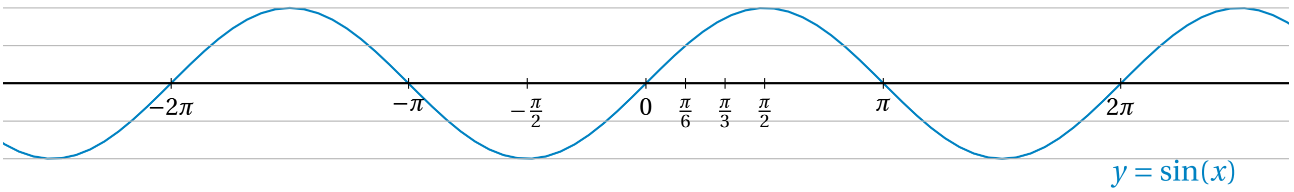
25 **Proposition (admise pour l'instant).**
Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

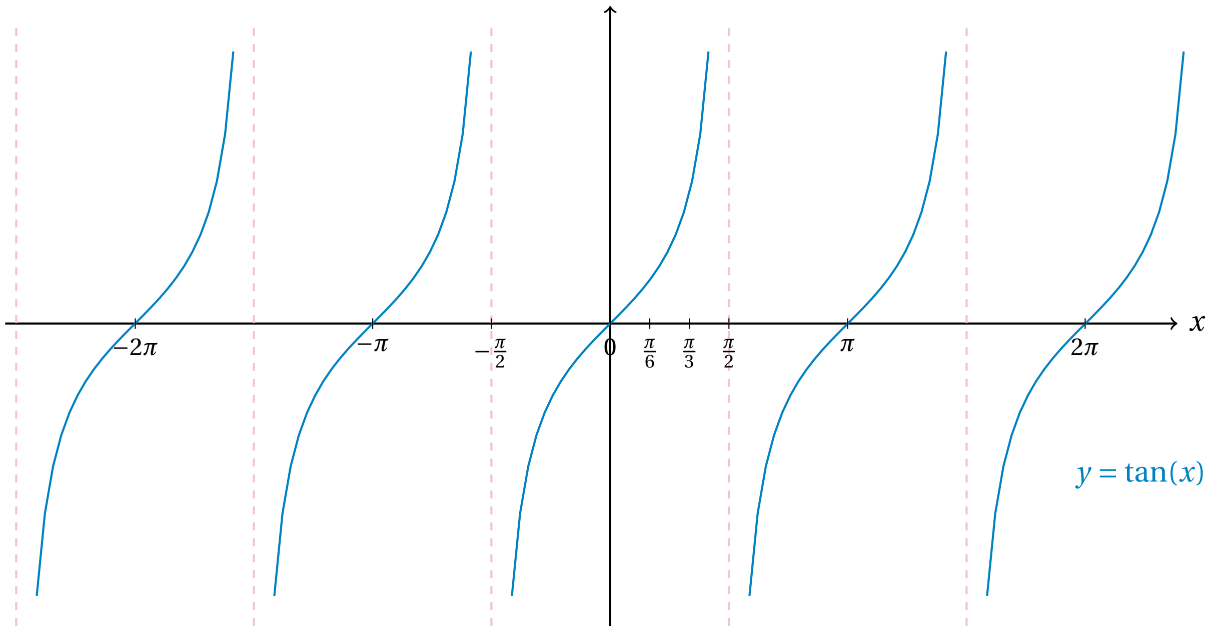
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

La fonction tangente est dérivable sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et on a

$$\forall\, x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi], \quad \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$







Trigonométrie

preuve et éléments de correction

1

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $x^2+y^2=1$.
Alors le point $N(x,y)$ appartient au cercle trigonométrique.
Donc il existe θ tel que ce point N coïncide avec le point M_θ, dont les coordonnées sont $(\cos\theta, \sin\theta)$.
Traduisons l'égalité des coordonnées de N et M_θ.
On obtient $x=\cos\theta$ et $y=\sin\theta$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe θ tel que ...
L'hypothèse se reformule en disant que le point $N(x,y)$ coïncide avec le point M_θ de coordonées $(\cos\theta, \sin\theta)$.
Comme ce dernier point M_θ est sur le cercle trigonométrique, le point N y est aussi, d'où $x^2+y^2=1$.

3

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\begin{cases} \cos\theta &= \cos\theta' \\ \sin\theta &= \sin\theta' \end{cases}$
Alors le point M_θ a même coordonnées que le point $M_{\theta'}$.
Donc les réels θ et θ' diffèrent à un multiple entier de 2π.
Autrement dit, il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta'=\theta+2k\pi$.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons qu'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\theta'=\theta+2k\pi$.
Alors $\cos(\theta')=\cos(\theta+2k\pi)$ qui vaut $\cos\theta$ d'après la proposition précédente.

4

Le point $M_{-\theta}$ s'obtient à partir de M_θ par la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.
Ainsi, $M_{-\theta}$ a même abscisse que M_θ et une ordonnée opposée, d'où

$$\cos(-\theta)=\cos(\theta) \quad \text{et} \quad \sin(-\theta)=-\sin(\theta)$$

6

- Les valeurs en 0 et $\frac{\pi}{2}$ sont immédiates, par définition de cos et sin.
- Pour la valeur en $\frac{\pi}{4}$, on peut remarquer que le segment $[OM_{\frac{\pi}{4}}]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle donc les deux côtés adjacents ont pour longueur respectivement $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. On a donc $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, puis :

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad i.e. \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},$$

  ce qui donne, puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est positif :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

- Pour la valeur en $\frac{\pi}{6}$, on peut remarquer que le triangle $OM_{\frac{\pi}{6}}M_{-\frac{\pi}{6}}$ est un triangle équilatéral. On obtient ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ puis, comme $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 0$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Par un raisonnement analogue en considérant le triangle équilatéral $OM_0M_{\frac{\pi}{3}}$, on obtient enfin :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Plaçons-nous dans $(O,\vec\imath,\vec\jmath)$ un repère orthonormé direct, et considérons les vecteurs :

$$\vec u=\cos(a)\,\vec\imath+\sin(a)\,\vec\jmath$$

et

$$\begin{aligned}\vec v&=\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec\imath+\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\vec\jmath\\&=-\sin(a)\,\vec\imath+\cos(a)\,\vec\jmath,\end{aligned}$$

de telle sorte que le repère $(O,\vec u,\vec v)$ est également un repère orthonormé.
Considérons alors M_{a+b} le point du cercle trigonométrique vérifiant :

$$\left(\vec\imath,\overrightarrow{OM_{a+b}}\right)=a+b.$$

- D'une part, M_{a+b} a pour coordonnées $\big(\cos(a+b),\sin(a+b)\big)$ dans le repère $(O,\vec\imath,\vec\jmath)$.
- D'autre part, M_{a+b} a pour coordonnées $\big(\cos(b),\sin(b)\big)$ dans le repère $(O,\vec u,\vec v)$, ce qui se traduit vectoriellement :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_{a+b}}&=\cos(b)\,\vec u+\sin(b)\,\vec v\\&=\cos(b)\big(\cos(a)\,\vec\imath+\sin(a)\,\vec\jmath\big)+\sin(b)\big(-\sin(a)\,\vec\imath+\cos(a)\,\vec\jmath\big)\\&=\big(\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\big)\vec\imath+\big(\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\big)\vec\jmath.\end{aligned}$$

On obtient ainsi une autre expression des coordonnées du point M_{a+b} dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
Par unicité des coordonnées d'un point dans un repère, on déduit deux des quatre formules souhaitées :

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\ \text{ et }\ \sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a).$$

Les deux autres s'obtiennent alors en appliquant les précédentes au couple $(a,-b)$, et en utilisant les propriétés de parité de sin et cos.

19

Les calculs suivants permettent d'exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ à l'aide de $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}\cos(\theta)&=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)&&\\&=\frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}&&\text{car }\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=1\\&=\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}&&\text{en divisant en haut et en bas par }\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

et pour les mêmes raisons :

$$\begin{aligned}\sin(\theta)&=2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\&=\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\\&=\frac{2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\end{aligned}$$

20

Les sens $\Longleftarrow$ sont évidents.
Pour le cosinus.
Supposons $\cos t = \cos\theta$.
Alors $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$.
Donc $\sin t = \pm\sin\theta$.

Le cas $\boxed{+}$

Alors on a $\left\{\begin{array}{rcl}\cos t & = & \cos\theta \\ \sin t & = & \sin\theta\end{array}\right.$. D'après la proposition 1, on en déduit $t \equiv \theta \mod 2\pi$.

Le cas $\boxed{-}$

Alors on a $\left\{\begin{array}{rcl}\cos t & = & \cos\theta \\ \sin t & = & -\sin\theta\end{array}\right.$, ce que l'on peut réécrire en utilisant la parité/imparité

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos t & = & \cos(-\theta) \\ \sin t & = & \sin(-\theta)\end{array}\right.$$

D'après la proposition 1, on en déduit $t \equiv -\theta \mod 2\pi$.

Dans les deux cas, on a bien $t \equiv \theta\ [2\pi]$ ou $t \equiv -\theta\ [2\pi]$

Pour le sinus.
Supposons $\sin t = \sin\theta$.
Alors $\cos t = \pm\cos\theta$.

Le cas $\boxed{+}$

Alors on a $\left\{\begin{array}{rcl}\cos t & = & \cos\theta \\ \sin t & = & \sin\theta\end{array}\right.$. D'après la proposition 1, on en déduit $t \equiv \theta \mod 2\pi$.

Le cas $\boxed{-}$

Alors on a $\left\{\begin{array}{rcl}\cos t & = & -\cos\theta \\ \sin t & = & \sin\theta\end{array}\right.$, ce que l'on peut réécrire en utilisant les propriétés de symétrie :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\cos t & = & \cos(\pi-\theta) \\ \sin t & = & \sin(\pi-\theta)\end{array}\right.$$

D'après la proposition 1, on en déduit $t \equiv \pi - \theta \mod 2\pi$.

Dans les deux cas, on a bien $t \equiv \theta\ [2\pi]$ ou $t \equiv \pi - \theta\ [2\pi]$

22

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Puisque $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on a $|\sin x| \leqslant 1$; l'inégalité $|\sin x| \leqslant |x|$ est donc évidemment vraie si $x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$.
Puis, par parité des fonctions $x \mapsto |\sin x|$ et $x \mapsto |x|$, on peut supposer $x \in [0,1]$.

Par définition, $\sin x$ correspond, sur le dessin ci-contre, à la distance HM_x, tandis que x est la longueur de l'arc de cercle reliant le point I au point M_x.

— D'une part, le triangle M_xHI, rectangle en H, nous offre :

$$M_xH \leqslant M_xI \quad \textit{i.e.} \quad \sin x \leqslant M_xI.$$

— D'autre part, la distance M_xI est inférieure à la longueur de l'arc de cercle correspondant, *i.e.* $M_xI \leqslant x$.

On a donc $0 \leqslant \sin x \leqslant x$, donc *a fortiori* $|\sin x| \leqslant |x|$.