Trigonométrie

exercices

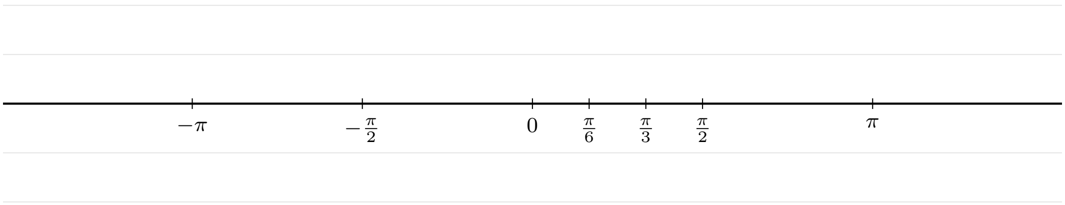
02exo-Trigo.pdf, 16 septembre 2023, 15:12

Trigonométrie

Dessinons !

101 **Des sinusoïdes**

Tracer la fonction sinus ci-dessous



Et le dessin de la fonction cosinus ?

102 **Tangente et arctangente !** mardi, en classe

Tracer le graphe de la fonction tangente.
Sur un autre dessin, tracer le graphe de la fonction tangente restreinte à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, puis symétriser par rapport à la droite d'équation $y = x$ cette courbe (faire un troisième dessin).

Équations

103 **Quatre points**

Résoudre l'équation $\cos(3x) = \cos(x)$.

104 **Quatre points**

Résoudre l'équation $\sin\theta = \sin 2\theta$.

105 **Trois points**

Résoudre l'équation $\sin\theta = \cos 2\theta$.

106 **Deux points**

Résoudre l'équation $\sin\theta = \sqrt{3}\,\cos\theta$.

Se ramener à une équation du type $\tan\theta = \cdots$

107 **Des équations**

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes
(i) $4\sin^2 x - 2(1+\sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$
(ii) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -\sqrt{3}$
(iii) $2\sin x\,\tan x + 4\cos x = 5$
(iv) $\cos(5x) - \cos x = \sin(3x)$

Degré deux ; Déphasage ; Chasser les dénominateurs ; $\cos p - \cos q$

Inéquations

108 **Une inéquation (0)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sin^2\theta \leqslant \frac{1}{2}$.

109 **Une inéquation (1)**

Résoudre dans $]-\pi, \pi[$ l'inéquation $\tan x \geqslant 2\sin x$.

110 **Une inéquation (2)**

Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation $\sin(3x) \geqslant \sin(2x) + \sin(x)$.

Autres formules (tangente)

111 **Formule de l'angle moitié**

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. Soit $x \in \mathcal{D}$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que

$$\cos x \ = \ \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x \ = \ \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x \ = \ \frac{2t}{1-t^2}$$

3. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Manipulation des formules

112 **Expression avec radicaux**

Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ de deux manières à l'aide des relations $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$.

113 **L'angle π divisé par 2, puis redivisé par 2, puis ...**

Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \quad 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}$$

où la formule comporte $n-1$ radicaux.
En déduire une formule analogue pour $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right)$.

114 **Une étude de fonction**

Soit $f : x \mapsto \sin(x)\sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $f(x)$ comme polynôme en $\cos(x)$.
2. Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
3. En déduire que f admet un maximum et un minimum sur $\mathbb{R}$ et les déterminer.

Avec des suites

115 **Une inégalité, par récurrence ?**

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sin(nx)\right| \ \leqslant \ n\,|\sin x|$$

116 **Un produit de cosinus**

Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$. Soit u la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

1. Montrer que la suite u converge.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide de la formule de duplication du sinus, simplifier u_n.
   En déduire la limite de u.

117 **Une belle somme**

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) \ = \ \frac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

118 **Cette formule est fausse !**

Un élève propose la formule (fausse) suivante $\xcancel{\sin p + \sin q \ = \ 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}}$.

Trouver un argument pour lui dire qu'il ne peut pas avoir raison !

Trigonométrie

corrigés

103

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences :

$$\begin{array}{rcl} \cos(3x) = \cos(x) & \Longleftrightarrow & 3x \equiv x\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 3x \equiv -x\,[2\pi] \\ & \Longleftrightarrow & 2x \equiv 0\,[2\pi] \quad \text{ou} \quad 4x \equiv 0\,[2\pi] \\ & \Longleftrightarrow & x \equiv 0\,[\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv 0\,\left[\frac{\pi}{2}\right] \end{array}$$

Finalement, la deuxième condition englobant la première, on déduit que x est solution si et seulement si $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$.
L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Comme cela correspond à 4 points sur le cercle trigonométrique, on peut écrire l'ensemble solution sous la forme :

$$\left\{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

104

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin\theta = \sin 2\theta &\iff \theta \equiv 2\theta\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \pi - 2\theta\ [2\pi] \\
&\iff -\theta \equiv 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 3\theta \equiv \pi\ [2\pi] \\
&\iff \theta \equiv 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{3}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$S = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Cela correspond à 4 points sur le cercle trigonométrique.

105

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On a les équivalences :

$$\sin(\theta) = \cos(2\theta) \iff \sin\theta = 1 - 2\sin^2\theta \iff 2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$

L'équation $2x^2 + x - 1 = 0$ ayant comme racines réelles -1 et $\frac{1}{2}$, on a :

$$\sin(\theta) = \cos(2\theta) \iff \sin\theta \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

Cela correspond à 3 points sur le cercle trigonométrique, et l'on obtient comme ensemble solution :

$$\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

106

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

— Si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\sin\theta = \pm 1$ et $\cos\theta = 0$.
Un tel θ n'est donc pas solution de l'équation.

— Supposons $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$. Alors on a $\cos\theta \neq 0$ et donc :

$$\sin\theta = \sqrt{3}\,\cos\theta \iff \tan\theta = \sqrt{3}$$

Puisque $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$, l'ensemble des solutions de est

$$S = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

107

(i) Le discriminant du polynôme $4X^2-2(1+\sqrt{3})X+\sqrt{3}$ vaut $4(1-\sqrt{3})^2$. Il possède donc deux racines qui sont $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
On a donc, pour $x\in\mathbb{R}$, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}4\sin^2 x-2(1+\sqrt{3})\sin x+\sqrt{3}=0 &\iff \sin x=\frac{1}{2} \text{ ou } \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \begin{cases} x\equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \\ x\equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x\equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ x\equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(ii) Soit $x\in\mathbb{R}$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x-\sin x=-\sqrt{3} &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\frac{-\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \cos(\tfrac{\pi}{6}+x)=\cos(\tfrac{5\pi}{6})\\ &\iff \begin{cases}\frac{\pi}{6}+x\equiv\frac{5\pi}{6}\ [2\pi]\\ \frac{\pi}{6}+x\equiv\frac{-5\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\\ x\equiv-\pi\ [2\pi]\end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(iii) L'équation est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)$.
Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\not\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}2\sin x\tan x+4\cos x=5 &\iff 2\sin^2 x+4\cos^2 x=5\cos x\\ &\iff 2(1-\cos^2 x)+4\cos^2 x=5\cos x\\ &\iff 2\cos^2 x-5\cos x+2=0\end{aligned}$$

L'équation $2y^2-5y+2=0$ a pour solution 2 et $\frac{1}{2}$.
D'où :

$$\begin{aligned}2\sin x\tan x+4\cos x=5 &\iff \cos x=2 \text{ ou } \cos x=\tfrac{1}{2}\\ &\iff \cos x=\tfrac{1}{2}\\ &\iff x\equiv\tfrac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } x\equiv-\tfrac{\pi}{3}\ [2\pi]\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

(iv) Soit $x\in\mathbb{R}$. En utilisant la formule de factorisation, le théorème de la classe de $3^{\text{ème}}$, on obtient les équivalences :

$$\begin{aligned}\cos 5x-\cos x=\sin 3x &\iff \sin(3x)\Big[1+2\sin(2x)\Big]=0\\ &\iff \sin(3x)=0 \text{ ou } \sin(2x)=-\frac{1}{2}\\ &\iff x\equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } \begin{cases}2x\equiv-\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ 2x\equiv-\dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]\end{cases}\\ &\iff x\equiv 0\left[\frac{\pi}{3}\right] \text{ ou } \begin{cases}x\equiv-\dfrac{\pi}{12}\ [\pi]\\ x\equiv-\dfrac{5\pi}{12}\ [\pi]\end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{3}k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Le premier ensemble correspond à 6 points sur le cercle, les deuxième et troisième ensembles fournissent chacun 2 points, soit au total 10 points.

108

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :

$$\sin^2\theta \leqslant \frac{1}{2} \iff \sin\theta \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Sur le cercle trigonométrique, cet encadrement de $\sin\theta$ correspond à deux arcs de cercles, indiqués en gras sur le dessin ci-contre.

L'ensemble des solutions est :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right].$$

110

Soit $x \in [0, 2\pi]$. Posons $A(x) = \sin(3x) - \sin(2x) - \sin(x)$.
En factorisant $\sin(3x) - \sin(x)$ et utilisant la formule de duplication du sinus, on a :

$$\begin{aligned}
A(x) &= 2\sin(x)\cos(2x) - 2\sin x\cos x \\
&= 2\sin x\,\big(\cos(2x) - \cos x\big) \\
&= 2\sin x\left(-2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) && \text{(factorisation du cosinus)} \\
&= -4\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(x)\sin\left(\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

Comme la fonction sinus

— est strictement positive sur $]0, \pi[$ et $]2\pi, 3\pi[$,

— est strictement négative sur $]\pi, 2\pi[$,

— s'annule en tout point de $\pi\mathbb{Z}$,

on obtient le tableau de signes :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\sin\left(\frac{3x}{2}\right)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$\sin x$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0
$A(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

On en déduit que $A(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in \{0\} \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

$$\{0\} \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ existe} \iff \frac{x}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi \iff x \not\equiv \pi \mod 2\pi$$

Donc l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ est

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left](2k-1)\pi, (2k+1)\pi\right[$$

2. Avec les formules d'addition, on obtient :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

En appliquant cette formule à $a = \frac{x}{2}$, on obtient

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

• Soit $x \in \mathcal{D}$. Montrons que $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ où $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
Partons du membre droit.
On a

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} \overset{\text{WHY}}{=} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x$$

• Pour la formule avec le sinus, partons également du membre droit :

$$\frac{2t}{1+t^2} = 2\frac{\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1+\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} = 2\frac{\cos^2(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})} = 2\cos(\tfrac{x}{2})\sin(\tfrac{x}{2}) = \sin x$$

• Pour la formule avec la tangente, utilisons les deux formules précédentes.
On obtient

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

On peut aussi utiliser la formule d'addition

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

avec $a = b = \frac{x}{2}$, ce qui donne le résultat directement.

3. Notons $T = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ qui s'écrit $\tan(\frac{x}{2})$ avec $x = \frac{\pi}{4}$.
Utilisons la dernière formule avec cette valeur de x.
On obtient

$$\tan(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{2T}{1-T^2}$$

Comme $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, on obtient $1 - T^2 = 2T$.
Après calcul du discriminant du polynôme du second degré $X^2 + 2X - 1$, on obtient

$$T = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Comme $T \geqslant 0$ (WHY), on obtient $T = -1 + \sqrt{2}$, c'est-à-dire

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -1 + \sqrt{2}$$

ce qui peut encore s'écrire $\sqrt{2} - 1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\sin x \sin(2x) &= \sin x \times 2 \sin x \cos x \\
&= 2 \sin^2 x \cos x \\
&= 2(1 - \cos^2 x) \cos x \\
&= 2 \cos x - 2 \cos^3 x
\end{aligned}$$

2. La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$, même sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) &= -2 \sin x - 2 \times 3(-\sin x) \cos^2 x \\
&= 2 \sin x \,(3 \cos^2 x - 1) \\
&= 6 \sin x \,(\cos x - \tfrac{1}{\sqrt{3}})(\cos x + \tfrac{1}{\sqrt{3}})
\end{aligned}$$

Appelons θ l'unique réel de $[0, \pi]$ tel que $\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

x	0		θ		$\pi - \theta$		π
$\sin x$	0	$+$		$+$		$+$	0
$\cos x - \frac{1}{\sqrt{3}}$		$+$	0	$-$		$-$	
$\cos x + \frac{1}{\sqrt{3}}$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
f	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	0

Calculons $f(\theta)$, sachant que $\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$.
On a

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= 2(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta \\
&= 2(1 - \tfrac{1}{3}) \tfrac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \tfrac{4}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

On calcule de même $f(\pi - \theta)$, ou bien on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\pi - x) = \sin(\pi - x) \sin(2\pi - 2x) = \sin x \sin(-2x) = -f(x)$$

Ainsi $f(\pi - \theta) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

3. Comme f est 2π-périodique, étudier f sur $\mathbb{R}$ revient à l'étudier sur $[-\pi, \pi]$.
Comme f est paire, on peut restreindre l'intervalle à $[0, \pi]$.
Ainsi, f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ qui vaut $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ et est atteint en tous les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ ou $-\theta + 2k\pi$.
De la même façon, f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ qui vaut $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$ et est atteint en tous les réels de la forme $\pi - \theta + 2k\pi$ ou $\theta - \pi + 2k\pi$.

1. — Montrons que la suite u est minorée par 0.
Par récurrence immédiate sur k, on a (ne pas oublier que $\theta \in]0, \pi[$, utile pour l'initialisation) :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\theta}{2^k} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$
On en déduit que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) > 0$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $u_n \geqslant 0$.
Le réel u_n est un produit de n termes (même strictement) positifs donc $u_n \geqslant 0$.

— Montrons que la suite u est décroissante (on pourrait même montrer qu'elle l'est strictement).
On a
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$$
Comme $\dfrac{\theta}{2^{n+1}} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on en déduit que $\cos\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leqslant 1$ (même < 1). D'où $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, puis $u_{n+1} \leqslant u_n$ (car u_n est positif).
La suite u est donc (strictement) décroissante.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite u converge.

2. En appliquant la formule de $\sin(2x)$ avec $x = \dfrac{\theta}{2^k}$, on obtient :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$
Comme $\sin\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right) \neq 0$ (WHY ?), on en déduit que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)}$$
Par produit puis télescopie, on obtient
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$
Déterminons la limite de u_n.
On a $\begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{cases}$ donc par composition de limites, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}} = 1$.

Donc par passage à l'inverse, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = 1$.

Or
$$u_n = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sin\theta \times \frac{\frac{1}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$$
Par produit de limites, on obtient que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sin\theta}{\theta}$$

117

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \text{« } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \text{ »}$$

— Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_1$ s'écrit

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

ce qui est vrai car les deux membres valent $\frac{1}{4}$.

— Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.
On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \\
&\overset{\mathcal{H}_n}{=} \frac{1}{2^n\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{3}} \left(2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{3}} \left(2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{3}} \left(2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\frac{1}{2} - \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{3}} \left(\underbrace{(2 - \frac{3}{2})}_{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{3}} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Bilan. On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathcal{H}_n \text{ est vraie}$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \frac{1}{2^n\sqrt{3}} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

118

Il suffit de prendre $p = q$.
Le membre gauche fournit $2 \sin p$ et le membre droit est nul car égal à $2 \sin 0 \cos p$.
Or, si on avait $\sin p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}$, cela se saurait !