Calculs algébriques

I Symboles $\sum$ et $\prod$ 2
Définitions
Changements d'indice
Sommation par paquets
Télescopage
Erreurs classiques

II Quelques calculs remarquables 10
Somme des termes d'une suite arithmétique
Somme des premières puissances
Somme des termes d'une suite géométrique
Formule de Bernoulli

III Sommes doubles 12
Sommes rectangulaires
Sommes triangulaires

IV Coefficients binomiaux. 15
Définition et propriétés
Formule du binôme de Newton

V Des résultats classiques en guise d'exercices 18
Sommes de coefficients binomiaux
Autres résultats

I. Symboles $\sum$ et $\prod$

Définitions

- Étant donné des nombres réels $a_1, \dots, a_n$, il arrive fréquemment que l'on ait besoin de considérer leur somme et/ou leur produit. Une première possibilité est d'utiliser des points de suspension :

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad\qquad a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

- Dans les notations ci-dessus, il faut bien comprendre que si n vaut 1, alors la somme et le produit considérés valent simplement a_1 (l'écriture du terme a_2 avant les points de suspension ne sert qu'à bien expliciter la liste utilisée).
  Pour pallier cet inconvénient et éviter toute ambiguïté, nous introduisons les notations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} = \prod_{k=1}^{n} x$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle n*, et l'on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

  On a ainsi

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120, \quad 6! = 720, \quad 7! = 5040, \quad 8! = 40\,320, \quad 9! = 362\,880.$$

- **Question.** Combien vaut $\prod_{k=1}^{n} (2k)$? Et le produit $n! \times \prod_{k=1}^{n} (n+k)$? Et le quotient $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$?

- Plus généralement, si p et q sont deux entiers vérifiant $p \leqslant q$, et si l'on dispose de $q - p + 1$ nombres réels numérotés de p à q, disons $a_p, \dots, a_q$, alors :
  — leur somme est notée $a_p + \cdots + a_q$, ou $\sum_{k=p}^{q} a_k$;
  — leur produit $a_p \times \cdots \times a_q$, ou $\prod_{k=p}^{q} a_k$
- On utilise indifféremment les notations suivantes :

$$\sum_{k=p}^{q} a_k, \quad \sum_{k \in [\![p,q]\!]} a_k, \quad \sum_{p \leqslant k \leqslant q} a_k, \qquad\qquad \prod_{k=p}^{q} a_k, \quad \prod_{k \in [\![p,q]\!]} a_k, \quad \prod_{p \leqslant k \leqslant q} a_k.$$

- Lorsque tous les termes de la famille $(a_k)_{k \in I}$ sont **égaux**, les calculs de $\sum_{k \in I} a_k$ et $\prod_{k \in I} a_k$ sont immédiats.
  En effet, en notant alors n le nombre de termes de la famille (*i.e.* le nombre d'éléments de I), et α leur valeur commune, on a :

$$\sum_{k \in I} a_k = \underbrace{\alpha + \cdots + \alpha}_{n \text{ termes}} = n\alpha \quad \text{et} \quad \prod_{k \in I} a_k = \underbrace{\alpha \times \cdots \times \alpha}_{n \text{ termes}} = \alpha^n.$$

- **Question.** Chers Pistons 3, que vaut $\prod_{k=1}^{m} 3$? Et $\sum_{k=0}^{m} 3$?

Cas d'une famille finie quelconque

- On étend les notions introduites ci-dessus au cas de n'importe quelle famille $(a_k)_{k\in I}$, où l'ensemble d'indexation I est *fini* et *non vide* :
  - $\sum_{k\in I} a_k$ désigne la somme de tous les termes de la famille ;
  - $\prod_{k\in I} a_k$ désigne le produit de tous les termes de la famille.
- La somme des termes de la famille $(k^2)_{k\in[\![-3,2]\!]}$ vaut :

$$\sum_{k\in[\![-3,2]\!]} k^2 \quad = \quad (-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2 \;=\; 19.$$

  On voit dans cet exemple que les termes d'une famille ne sont pas nécessairement deux à deux distincts. Une valeur peut donc être comptée plusieurs fois dans une somme.
- **Exemple.** Posons $I = \left\{k \in [\![1,7]\!] \mid k \text{ impair}\right\}$. Calculons $\sum_{k\in I} k$ que l'on peut noter également $\sum_{\substack{k\in[\![1,7]\!]\\ k \text{ impair}}} k$.

.....

Somme vide, produit vide

- On étend les notions de somme et produit au cas où l'ensemble d'indexation est vide, en convenant qu'une somme vide vaut 0 et qu'un produit vide vaut 1 :

$$\sum_{k\in\emptyset} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k\in\emptyset} a_k = 1.$$

- Si $p > q$, on convient que $\sum_{k=p}^{q} a_k = 0$ et $\prod_{k=p}^{q} a_k = 1$.
- Cette convention permet d'étendre naturellement :
  - la notation x^n pour $n = 0$ (où $x \in \mathbb{R}$) : $\quad x^0 = \prod_{k=1}^{0} x = 1$
  - la notation $n!$ pour $n = 0$: $\quad 0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1$

1 sol → 21

Question. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant n!$$

Premières règles de calcul

Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ nous donnent les propriétés de calcul suivantes, qui ne sont pas à apprendre par cœur, mais à comprendre ! Pour cela, il ne faut pas hésiter à les vérifier en les écrivant avec des points de suspension.

- Grâce à la commutativité et l'associativité des lois + et ×, on a :

$$\sum_{k\in I}(a_k+b_k) = \sum_{k\in I}a_k+\sum_{k\in I}b_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k\,b_k) = \left(\prod_{k\in I}a_k\right)\left(\prod_{k\in I}b_k\right).$$

Lorsque $I=\{1,2\}$, on a

$$\underbrace{a_1+b_1}_{\text{terme pour } k=1} + \underbrace{a_2+b_2}_{\text{terme pour } k=2} = (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{a_1b_1}_{\text{terme pour } k=1} \times \underbrace{a_2b_2}_{\text{terme pour } k=2} = (a_1a_2)(b_1b_2)$$

- En notant n le nombre d'éléments de I :

$$\sum_{k\in I}(\lambda+a_k) = \sum_{k\in I}\lambda+\sum_{k\in I}a_k = n\lambda+\sum_{k\in I}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(\lambda a_k) = \left(\prod_{k\in I}\lambda\right)\left(\prod_{k\in I}a_k\right) = \lambda^n\prod_{k\in I}a_k$$

Lorsque $I=\{1,2\}$, on a

$$\underbrace{\lambda+a_1}_{\text{terme pour } k=1} + \underbrace{\lambda+a_2}_{\text{terme pour } k=2} = 2\lambda+(a_1+a_2) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{\lambda a_1}_{\text{terme pour } k=1} \times \underbrace{\lambda a_2}_{\text{terme pour } k=2} = \lambda^2\times(a_1a_2)$$

- *Diverses opérations* ($\lambda\in\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{N}$) :

$$\sum_{k\in I}(\lambda\,a_k) = \lambda\sum_{k\in I}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I}(a_k)^p = \left(\prod_{k\in I}a_k\right)^p$$

Lorsque $I=\{1,2\}$, on a

$$\underbrace{\lambda a_1}_{\text{terme pour } k=1} + \underbrace{\lambda a_2}_{\text{terme pour } k=2} = \lambda(a_1+a_2) \qquad \text{et} \qquad \underbrace{a_1^p}_{\text{terme pour } k=1} \times \underbrace{a_2^p}_{\text{terme pour } k=2} = (a_1a_2)^p$$

- *Relation de Chasles.* Pour $p\leqslant r\leqslant q$, on a :

$$\sum_{k=p}^{q}a_k = \sum_{k=p}^{r}a_k+\sum_{k=r+1}^{q}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=p}^{q}a_k = \left(\prod_{k=p}^{r}a_k\right)\left(\prod_{k=r+1}^{q}a_k\right).$$

Lorsque $p=1$, $r=3$ et $q=5$, on a

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = (a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5) \qquad \text{et} \qquad a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5 = (a_1\times a_2\times a_3)\times(a_4\times a_5)$$

- *Sommation par paquets.* Pour I_1 et I_2 deux ensembles finis disjoints, alors :

$$\sum_{k\in I_1\sqcup I_2}a_k = \sum_{k\in I_1}a_k+\sum_{k\in I_2}a_k \qquad \text{et} \qquad \prod_{k\in I_1\sqcup I_2}a_k = \prod_{k\in I_1}a_k\times\prod_{k\in I_2}a_k.$$

Lorsque $I_1=\{k\in[\![1,5]\!]\mid k \text{ pair}\}$ et $I_2=\{k\in[\![1,5]\!]\mid k \text{ impair}\}$

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = (a_2+a_4)+(a_1+a_3+a_5) \qquad \text{et} \qquad a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5 = (a_2\times a_4)\times(a_1\times a_3\times a_5)$$

- **Linéarité de la somme :**

$$\sum_{k\in I}(\lambda a_k+\mu b_k) = \lambda\sum_{k\in I}a_k+\mu\sum_{k\in I}b_k$$

2 sol → 21

Question. *(Produit des entiers pairs, produit des entiers impairs)*
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On note A_n le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ et on note B_n le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$.

1. Que vaut $A_n \times B_n$?
2. Exprimer A_n à l'aide de $n!$.
3. Montrer que $B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}$.

3 sol → 21

Question. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \prod_{k=1}^{n} (4k-2) \;=\; \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Changements d'indice

Décalage d'indice

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \dots \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \frac{1}{j} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \sum_{j=1}^{n} \dots$$

4 sol → 23

Question. Soit $n \geqslant 2$.
En remarquant que $\dfrac{2}{k(k+2)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}$, simplifier la somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)}$.
La formule trouvée est-elle encore valable pour $n = 1$?

Symétrisation

Dans certains calculs, il peut être judicieux d'inverser l'ordre des termes.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons une somme de la forme :

$$S = \sum_{k=0}^{n} a_k. \qquad (\star)$$

Pour inverser l'ordre de sommation, effectuons le changement d'indice $j = n - k$.
Lorsque k décrit l'ensemble $[\![0, n]\!]$, alors j décrit sans redondance le même ensemble $[\![0, n]\!]$.
On a donc :

$$S = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}. \qquad (\star\star)$$

Si l'on écrit les sommes avec des points de suspension :

— l'écriture $(\star)$ correspond à $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$;
— l'écriture $(\star\star)$ correspond à $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$.

- **Exemple.** On a

$$\sum_{\ell=1}^{n} (n-\ell)^2 = \sum_{k=\dots}^{\dots} k^2 \qquad \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \dots$$

Sommation par paquets

Dans ce qui suit, I désigne un ensemble fini d'entiers.

- Étant donné une somme $\sum_{k\in I} a_k$, il peut être intéressant de traiter séparément les termes d'indice pair et ceux d'indice impair ; cela consiste à écrire :

$$\sum_{k\in I} a_k \quad = \quad \sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ pair}}} a_k \quad + \quad \sum_{\substack{k\in I\\ k \text{ impair}}} a_k.$$

- Considérons la somme $\sum_{k=1}^{2n+1} a_k$ dans laquelle on souhaite séparer les termes d'indice pair et ceux d'indice impair.
  On peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} a_k \quad = \quad \sum_{\substack{k\in[\![1,2n+1]\!]\\ k \text{ pair}}} a_k \quad + \quad \sum_{\substack{k\in[\![1,2n+1]\!]\\ k \text{ impair}}} a_k.$$

  Pour rendre la formule plus explicite, constatons que, dans l'ensemble $[\![1,2n+1]\!]$:
  - les éléments pairs sont les entiers de la forme $2p$ avec $1 \leqslant 2p \leqslant 2n+1$, autrement dit $\frac{1}{2} \leqslant p \leqslant n+\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, puisque p est un entier, $1 \leqslant p \leqslant n$;
  - les éléments impairs sont les entiers de la forme $2p+1$ avec $1 \leqslant 2p+1 \leqslant 2n+1$, autrement dit $0 \leqslant p \leqslant n$.

  On aboutit à la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{2n+1} a_k \quad = \quad \sum_{p=1}^{n} a_{2p} \quad + \quad \sum_{p=0}^{n} a_{2p+1}.$$

- **Autre exemple.** Considérons $\sum_{k=1}^{2n} a_k$ qui contient un nombre pair de termes.
  Parfois, il peut être judicieux de grouper les termes par deux, via l'écriture

$$\sum_{k=1}^{2n} a_k \quad = \quad \sum_{\dots} (a_\ell + a_{\ell+1})$$

5 preuve **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.

Télescopage

Dans ce qui suit, on suppose $p \leqslant q$.

- On appelle *somme télescopique* toute somme de la forme $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k)$.

  L'intérêt de ce type de somme est que sa simplification est immédiate, car tous les termes, sauf le premier et le dernier, se simplifient. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) &= (a_{q+1} - a_q) + (a_q - a_{q-1}) + \cdots + (a_{p+2} - a_{p+1}) + (a_{p+1} - a_p) \\ &= a_{q+1} - a_p.\end{aligned}$$

  Une autre manière de voir les choses est la suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) &= \sum_{k=p}^{q} a_{k+1} - \sum_{k=p}^{q} a_k \\ &= \sum_{j=p+1}^{q+1} a_j - \sum_{k=p}^{q} a_k \qquad [j = k+1] \text{ dans la première somme} \\ &= a_{q+1} + \underbrace{\sum_{j=p+1}^{q} a_j - \sum_{k=p+1}^{q} a_k}_{=0} - a_p \\ &= a_{q+1} - a_p.\end{aligned}$$

- On appelle *produit télescopique* tout produit de la forme $\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k}$, où les a_k sont supposés tous non nuls. La simplification d'un tel produit est immédiate. De façon analogue au calcul précédent, on a :

$$\begin{aligned}\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{a_{p+1}}{a_p} \cdot \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} \cdots \frac{a_q}{a_{q-1}} \cdot \frac{a_{q+1}}{a_q} \\ &= \frac{a_{q+1}}{a_p}\end{aligned}$$

  que je vous laisse écrire de manière plus formelle, si cela vous fait plaisir.

- **À l'oral.** En écrivant des pointillés dans sa tête (ou sur son brouillon), on a :

$$\sum_{k=3}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \ldots \qquad \sum_{k=3}^{n} \left(\ln k - \ln(k+1)\right) = \ldots \qquad \sum_{k=3}^{n} \left(\sqrt{k-1} - \sqrt{k}\right) = \ldots$$

6 sol → 24 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

7 sol → 24 **Question.** Déterminer deux nombres a et b vérifiant : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une écriture simplifiée de $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

8 sol → 25 **Question.** Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $\forall\, k \in \mathbb{N},\quad v_k = u_k + u_{k+1}$.
On suppose que $u_0 = 0$.

Par un calcul « formel », montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k = (-1)^n u_{n+1}$.

Erreurs classiques

9 **Attention.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $C_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Calculer $S_{n+1} - S_n$ et $C_{n+1} - C_n$.

10 **Attention.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $A_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$.

Un élève propose la solution suivante :

On fait le changement de variables $j = 2k-1$ et on a alors

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{j=1}^{2n-1} j = \frac{(2n-1)(2n)}{2} = (2n-1)n$$

Un camarade lui répond :

Tu as dû faire une erreur…
En effet, pour $n = 2$, on a $A_n = 1+3 = 4$, et avec ta formule, tu trouves :

$$(2n-1)n = (2\times 2-1)\times 2 = 6$$

II. Quelques calculs remarquables

Somme des termes d'une suite arithmétique

11 **Proposition.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- La formule peut bien sûr s'adapter très facilement lorsque la somme commence à 0. On a $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- **Preuve.** Le résultat est évident pour $n = 0$, puisqu'une somme qui porte sur l'ensemble vide vaut 0.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Optons pour une démonstration intuitive, en utilisant des points de suspension.
  Notons S la somme considérée, et sommons une fois dans un sens, et une fois dans l'autre ; puis ajoutons !

$$\begin{array}{rcccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

  On a donc $2S = n(n+1)$, c'est-à-dire $S = \frac{n(n+1)}{2}$.
- **Preuve écrite formellement.** Posons $S = \sum_{k=1}^{n} k$. On a

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) && \text{changement d'indice } [j = n-k+1] \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) && \text{on renomme } j \text{ en } k \text{ dans la } 2^{\text{ème}} \text{ somme} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (n+1) && \text{linéarité du symbole } \Sigma \\ &= n(n+1) && \text{somme dont le terme général est constant} \end{aligned}$$

  D'où $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

12 **Proposition.** Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$.

— On a

$$\sum_{k=p}^{q} k = \frac{(q-p+1)(p+q)}{2}$$

— Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. On a

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = (q-p+1)\frac{u_p + u_q}{2}.$$

- **À retenir.**

La somme des termes *consécutifs* d'une suite arithmétique est égale à

$$\frac{\text{nb termes} \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{d}^{\text{er}} \text{ terme})}{2}$$

Somme des premières puissances

13 preuve

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Somme des termes d'une suite géométrique

14 preuve

Proposition. Soit $q \in \mathbb{C}$. Soit $m \leqslant n$ deux entiers. On a

$$\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **À retenir.**

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut $\dfrac{1^{er}\ t.\ présent\ -\ 1^{er}\ t.\ absent}{1-q}$

La somme des termes d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ vaut $1^{er}\ t. \times \dfrac{1-q^{nb\ de\ t.}}{1-q}$

15 sol → 26 **Question.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

Formule de Bernoulli

16 preuve

Proposition (Bernoulli). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

- **Pour la culture.** Cette formule peut aussi être écrite

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{i+j=n-1} a^i b^j$$

où la somme porte sur les couples $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $i + j = n - 1$.
En effet, un tel couple peut s'écrire $(k, n-1-k)$ d'où l'égalité des deux sommes.

- **Remarque.** *Factorisation de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.*
Comme $2n+1$ est impair, on a $a^{2n+1} + b^{2n+1} = a^{2n+1} - (-b)^{2n+1}$.
Ainsi, en appliquant la formule de Bernoulli, on a

$$\begin{aligned} a^{2n+1} + b^{2n+1} &= \big(a - (-b)\big) \sum_{k=0}^{2n} a^k (-b)^{(2n+1)-1-k} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2n-k} a^k b^{2n-k} \\ &= (a+b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a^k b^{2n-k} \qquad (k \text{ et } 2n-k \text{ ont la même parité}). \end{aligned}$$

III. Sommes doubles

Sommes rectangulaires

On a, jusqu'ici, considéré des sommes simples, c'est-à-dire des sommes qui sont indexées par un seul indice.
On va maintenant considérer des sommes indexées par deux indices.
Considérons ce tableau

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$

La somme des éléments de ce tableau est notée

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}} a_{i,j}$$

On peut évaluer cette somme de plusieurs façons :

— on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les trois sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{4} a_{i,j}\right)$$

— on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=1}^{3} a_{i,j}\right)$$

17

À retenir. Le calcul d'une somme double sur un rectangle se ramène au calcul de deux sommes simples imbriquées.

- La somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$ notée encore $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}$, peut s'écrire à l'aide de deux $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) \qquad \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

- La somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{i,j}$ notée encore $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$, peut s'écrire à l'aide de deux $\sum$:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

18 **Question.** Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer $S_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \min(i,j)$.

Un cas particulier

Un cas particulier intéressant est celui où la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est telle qu'il existe deux familles $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\quad a_{i,j} = b_i\,c_j.$$

En sommant les éléments de ce tableau $\begin{array}{|c|c|c|}\hline b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3\\ \hline b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3\\ \hline\end{array}$, on trouve .....

19 **Proposition.** Soit $(b_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(c_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ deux familles de réels. On a :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} b_i\,c_j \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} c_j\right).$$

20 sol → 26 **Question.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} i\,2^j$.

21 **Proposition (Le carré d'une somme simple est une somme double).**
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x_1,\dots,x_n$ des réels. On a

- $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} x_i x_j$
- $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2 + \sum_{i\neq j} x_i x_j$
- $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$

Généralisation : somme rectangulaire quelconque

Plus généralement, on parle de *somme double rectangulaire* lorsque l'ensemble d'indexation est un produit cartésien : $\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$.
Ce qui a été énoncé dans le cas $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ se généralise à un produit cartésien $I\times J$:

— une somme double rectangulaire se ramène à deux sommes simples imbriquées :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right);$$

— le cas où la famille est de la forme $(b_i\,c_j)_{(i,j)\in I\times J}$ mène à un produit de deux sommes simples :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i\,c_j = \left(\sum_{i\in I} b_i\right)\left(\sum_{j\in J} c_j\right).$$

Sommes triangulaires

Considérons ce tableau

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$
	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$
		$a_{3,3}$	$a_{3,4}$
			$a_{4,4}$

La somme des éléments de ce tableau est notée

$$S = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4} a_{i,j}$$

On peut évaluer cette somme de plusieurs façons :

— on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{i=1}^{4} \left(\sum_{j=i}^{4} a_{i,j} \right)$$

— on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j} \right)$$

22 **À retenir.** Le calcul d'une somme double sur un *triangle* se ramène au calcul de deux sommes simples imbriquées *dont le deuxième indice dépend du premier.*
On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant j}} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

23 sol → 26 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$. Que vaut S_2 ? Simplifier S_n.

24 sol → 27 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S = \sum_{i=1}^{n} i\,2^i$.
En écrivant i comme une somme de 1, montrer que $S = (n-1)2^{n+1} + 2$.

IV. Coefficients binomiaux

Définition et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que *factorielle n* est le nombre entier $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. On a en particulier $0! = 1$.

25 **Définition.** Soit $n, p \in \mathbb{N}$.

Le *coefficient binomial « p parmi n »* noté $\binom{n}{p}$ est le nombre (rationnel, a priori) défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ termes}}}{p!} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **Convention.** On étend la définition à $p \in \mathbb{Z}$. On convient que $\binom{n}{p} = 0$ pour tout $p < 0$.
- Pour $n, p \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ peut s'interpréter comme le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. De manière informelle, cela signifie qu'il y a $\binom{n}{p}$ manières de choisir p objets parmi n. Confer le chapitre « Dénombrement ».

26 **Proposition.**

- **Petites valeurs de k.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$
- **Symétrie**
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- **Formule d'absorption, dite aussi « formule du capitaine »**
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{Z}^*,\quad \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
- **Formule du triangle de Pascal**
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$
- **C'est un entier !**
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{Z},\quad \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

- **Remarque.** La formule du capitaine peut aussi s'écrire sous cette belle forme :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \boxed{\forall k \in \mathbb{Z}},\quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
qui peut être retenue sous la forme « pour tout n pour lequel cela a du sens, et pour tout k du monde entier, on a … »

- **Savoir s'adapter !**
  Il faut savoir « translater » de tête les indices, et passer d'un membre à un autre.
  Par exemple, la formule du triangle de Pascal s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

  ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

  Par exemple, la formule du capitaine de l'énoncé peut aussi s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \binom{n}{k} = \frac{k+1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

27 **Question.** Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Formule du binôme de Newton

28 **Proposition (Formule du binôme de Newton).** On a :

$$\forall\, a,b\in\mathbb{C},\ \forall\, n\in\mathbb{N},\quad (a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

- **Preuve.** Fixons $a,b\in\mathbb{C}$. Montrons, par récurrence, que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \underbrace{(a+b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}}_{\mathscr{H}_n}$$

Initialisation. On a $\mathscr{H}_0$ (WHY?)
Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}_n$. On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1}\\
&= \left(a^{n+1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}}_{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1}}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}\right)\\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]}_{\binom{n+1}{k}}a^k b^{n-k+1} + b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

- **Autre expression.** Écrivons avec des points de suspension la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^0b^n}_{b^n} + \underbrace{\binom{n}{1}a^1b^{n-1}}_{nab^{n-1}} + \cdots + \binom{n}{k}a^k b^{n-k} + \cdots \underbrace{\binom{n}{n-1}a^{n-1}b^1}_{na^{n-1}b} + \underbrace{\binom{n}{n}a^nb^0}_{a^n}$$

On a aussi, par symétrie du coefficient binomial :

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0}a^nb^0}_{a^n} + \underbrace{\binom{n}{1}a^{n-1}b^1}_{na^{n-1}b} + \cdots + \binom{n}{j}a^{n-j}b^j + \cdots \underbrace{\binom{n}{n-1}a^1b^{n-1}}_{nab^{n-1}} + \underbrace{\binom{n}{n}a^0b^n}_{b^n}$$

Bref, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \;=\; \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{n-j}b^j$$

- **Remarque super importante pour la suite de l'année!**
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$(x+1)^n \;=\; x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + nx + 1$$

Dit autrement, le coefficient en x^k de $(1+x)^n$ vaut $\binom{n}{k}$.

V. Des résultats classiques en guise d'exercices

Sommes de coefficients binomiaux

29

Exercice.

- **Somme sur une même ligne**
  On a
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
  La somme des coefficients de la ligne n du triangle de Pascal vaut 2^n.

- **Somme alternée sur une même ligne**
  On a
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$
  La somme alternée des coefficients binomiaux sur une même ligne est nulle, sauf pour la ligne n° 0

- **Somme des indices pairs (et impairs)**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose
  $$S_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{2p+1}$$
  On a
  $$S_n = 2^{n-1} \qquad \text{et} \qquad T_n = 2^{n-1}$$

- **Formule de Pascal généralisée**
  On a
  $$\forall m \in \mathbb{N}, \ \forall c \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=c}^{m} \binom{i}{c} = \binom{m+1}{c+1}$$

- **Autres sommes**
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
  $$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$$

- **Formule de Vandermonde**
  $$\forall n, m, p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

Autres résultats

30 **La formule du capitaine.**
Soit $c, j, n \in \mathbb{N}$ avec $c \leqslant j \leqslant n$. On a la formule suivante :

$$\binom{n}{j}\binom{j}{c} = \binom{n}{c}\binom{n-c}{j-c}$$

Plus tard dans l'année, on prouvera cette égalité en récitant le petit texte suivant
« Pour constituer une équipe de j joueurs ayant c capitaines (avec n joueurs à disposition), on peut procéder de deux façons :

- commencer par choisir les j joueurs (parmi les n à disposition), puis parmi ces j joueurs, choisir les c capitaines
- ou bien, commencer par choisir les c capitaines (parmi les n joueurs à disposition), puis choisir $j-c$ joueurs parmi les $n-c$ joueurs restants. »

31 **La formule d'inversion de Pascal.**
Soit (a_n) et (b_n) deux suites vérifiant la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Il existe une formule permettant d'« inverser » la formule précédente et ainsi exprimer a_n en fonction des b_k :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} b_k$$

Une remarque anecdotique. La formule s'écrit aussi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k b_k$$

Pour le fun, si on veut retenir cette formule, on peut se dire que c'est la même que l'égalité initiale, mais avec des suites "signées", c'est-à-dire $a'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b'_k$ avec $u'_i = (-1)^i u_i$.

32 **L'inégalité de Cauchy-Schwarz.**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.
On a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Pour $n = 1$, cela dit $(a_1 b_1)^2 \leqslant a_1^2 b_1^2$, ce qui est évident.

Pour $n = 2$, cela dit $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$, ce qui n'est **pas** évident.

Calculs algébriques

preuve et éléments de correction

1

On a

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad k! \leqslant (n-1)!$$

Par somme de ces n inégalités, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} k! \quad \leqslant \quad \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (n-1)!}_{n\times(n-1)!}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} k! \leqslant n!$$

2

1. En multipliant le produit des entiers pairs compris entre 1 et $2n$ multiplié par le produit des entiers impairs compris entre 1 et $2n+1$, on obtient le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n+1$, qui vaut $(2n+1)!$.
   Ainsi, $A_n \times B_n = (2n+1)!$
2. Par définition, on a $A_n = \prod_{k=1}^{n} (2k)$.
   Les règles de calculs du symbole $\prod$ nous donnent alors :
   $$A_n \;=\; 2^n \prod_{k=1}^{n} k \;=\; 2^n\, n!$$
3. On utilise le jeu d'écriture suivant $B_n = \dfrac{B_n}{1}$ et l'on multiplie en haut et en bas par A_n, de sorte que $B_n = \dfrac{A_n \times B_n}{A_n}$.
   On voit apparaître :
   - au numérateur, le produit de tous les entiers compris entre 1 et $2n+1$, c'est-à-dire $(2n+1)!$
   - au dénominateur A_n, c'est-à-dire $2^n\, n!$

   On en déduit :
   $$B_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!}.$$

3

Optons pour un raisonnement direct en fixant $n \in \mathbb{N}$.
Le cas où $n = 0$ est évident car les deux produits portent sur l'ensemble vide, donc sont égaux à 1.
Passons au cas où $n \in \mathbb{N}^*$. On a les égalités (je vous préviens, j'en fais 10 fois trop, donc vous pouvez enlever des étapes !)

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(4k-2) &= 2^n \prod_{k=1}^{n}(2k-1) \\
&= 2^n \prod_{\substack{j\in[\![1,2n]\!] \\ j \text{ impair}}} j \\
&= 2^n \frac{\prod_{j\in[\![1,2n]\!]} j}{\prod_{\substack{j\in[\![1,2n]\!] \\ j \text{ pair}}} j} \\
&= 2^n \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\
&= 2^n \frac{(2n)!}{2^n n!} \\
&= \frac{(2n)!}{n!} \\
&= \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n\times(n+1)\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)}{1\times 2\times\cdots\times(n-1)\times n} \\
&= \prod_{j\in[\![n+1,2n]\!]} j \\
&= \prod_{k=1}^{n}(n+k)
\end{aligned}$$

BILAN. On a montré que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

• **Autre solution.** Un élève (Louis Cayol, HEC 2023) me propose un raisonnement par récurrence, essayons !

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathscr{H}_n$ la propriété

$$\mathscr{H}_n :\quad \text{« } \prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k) \text{ »}$$

Initialisation. Montrons $\mathscr{H}_0$.

Le membre gauche vaut $\prod_{k=1}^{0}(4k-2)=1$, car le produit porte sur l'ensemble vide.

Le membre droit vaut $\prod_{k=1}^{0}(0+k)=1$, car le produit porte sur l'ensemble vide.

Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}_n$. Montrons $\mathscr{H}_{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2) &= \prod_{k=1}^{n}(4k-2)\times\big(4(n+1)-2\big)\\
&= \prod_{k=1}^{n}(n+k)\times 2(2n+1) && \text{d'après } \mathscr{H}_n\\
&= (n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)\times 2(2n+1)\\
&= (n+2)(n+3)\cdots(2n)\times(2n+1)\times 2(n+1)\\
&= (n+2)(n+3)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)\\
&= \prod_{k=1}^{n+1}(n+1+k)
\end{aligned}$$

D'où $\mathscr{H}_{n+1}$.

Bilan On a montré que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \prod_{k=1}^{n}(4k-2)=\prod_{k=1}^{n}(n+k)$$

4

On a

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) && \text{calcul}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} && \text{linéarité du symbole } \Sigma\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j} && \text{changement d'indice } j=k+2 \text{ dans la deuxième somme}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} && \text{variable muette dans la deuxième somme}\\
&= \left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)-\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right) && \text{car } n\geqslant 2\\
&= \frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

À l'avant-dernière égalité du calcul précédent, on notera la justification « $n\geqslant 2$ ». En effet, pour pouvoir sortir deux termes des sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$, celles-ci doivent en comporter au moins deux.

Pour $n=1$, on a $S=\dfrac{2}{3}$. Et la formule donne $\dfrac{2}{3}$. La formule est donc encore valable pour $n=1$, chose que l'on justifie a posteriori !

5

Remarquons que l'on a :

$$S = -1+2-3+4-5+6-\cdots-(2n-1)+2n.$$

En regroupant les termes deux à deux, il vient :

$$\begin{aligned} S &= (-1+2)+(-3+4)+(-5+6)+\cdots+\big(-(2n-1)+2n\big) \\ &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n \text{ termes}} \\ &= n. \end{aligned}$$

Le plus souvent, pour mettre en évidence un regroupement de termes pertinent, il est plus facile d'utiliser l'écriture avec des points de suspension. Effectuer une sommation par paquets revient alors à placer judicieusement les parenthèses.

6

On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1)-\ln k\Big) \\ &= \ln(n+1)-\ln 1 \qquad \text{par télescopage} \\ &= \ln(n+1) \end{aligned}$$

7

Au brouillon. En réduisant au même dénominateur, on a :

$$\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k} = \frac{ka+(k+1)b}{k(k+1)} = \frac{k(a+b)+b}{k(k+1)}.$$

Sur la copie. On a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Donc le couple $(a,b) = (-1,1)$ convient.
On a donc :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\ &\overset{\text{WHY}}{=} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} \qquad \text{par télescopage} \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

8

Soit $n \in \mathbb{N}$.
En multipliant par $(-1)^k$ et avec un jeu d'écriture, on a :

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \qquad (-1)^k v_k \;=\; (-1)^k u_k \;-\; (-1)^{k+1} u_{k+1}$$

Par somme télescopique entre 0 et n :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k \;=\; (-1)^0 u_0 \;-\; (-1)^{n+1} u_{n+1}$$

Comme $u_0 = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k \;=\; (-1)^n u_{n+1}$$

13

• **Preuve de la somme des carrés.**
Une preuve par récurrence est envisageable, mais nécessite de connaître à l'avance le résultat. Nous optons pour une autre démonstration, qui consiste à calculer de deux manières la somme télescopique $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right)$.
▷ La formule est évidemment vraie pour $n = 0$, puisqu'une somme portant sur l'ensemble vide est nulle.
▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1).$$

— À gauche, on reconnaît une somme télescopique $\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = (n+1)^3 - 1$.

— À droite, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1) \;&=\; 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &=\; 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n. \end{aligned}$$

En identifiant les deux membres, on obtient

$$(n+1)^3 - 1 \;=\; 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Isolons $3\sum_{k=1}^{n} k^2$ puis simplifions :

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} k^2 \;&=\; (n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &=\; (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &=\; (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right) \\ &=\; (n+1)\left(n^2 + \frac{n}{2}\right) = (n+1)\frac{n(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

ce qui donne la formule souhaitée $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14

On a, par télescopage :

$$(1-q)\sum_{k=m}^{n} q^k = \sum_{k=m}^{n} (q^k - q^{k+1}) = q^m - q^{n+1}.$$

Prenons une suite géométrique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$. On a alors $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ u_k = u_0 q^k$.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_0 \sum_{k=m}^{n} q^k$$

Prenons les deux expressions pour $q \neq 1$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_0 \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0 q^m - u_0 q^{n+1}}{1-q} = \frac{1^{\text{er}}\text{ t. présent } - 1^{\text{er}}\text{ t. absent}}{1-q}$$

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = u_0 q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} = 1^{\text{er}}\text{ t.} \times \frac{1-q^{\text{nb de t.}}}{1-q}$$

15

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k\right)$.

En calculant la somme des termes d'une suite géométrique, on finit par obtenir après factorisation par l'angle moitié : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \begin{cases} \sin\left(n\frac{\theta}{2}\right)\dfrac{\sin\left((n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin(\frac{\theta}{2})} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

16

On a, en partant du membre de droite de l'égalité souhaitée :

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{k+1} b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right).$$

On reconnaît alors une somme télescopique qui vaut $a^n b^0 - a^0 b^n$, *i.e.* $a^n - b^n$.

20

On est dans les conditions de la proposition précédente, d'où :

$$S = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j\right) = \frac{n(n+1)}{2}(2^{n+1}-2) = n(n+1)(2^n-1).$$

23

Sous cette forme le calcul est difficile car à i fixé, nous ne connaissons pas d'expression simple pour la somme $\displaystyle\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$. Intervertissons les deux symboles $\sum$:

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ i\leqslant j\leqslant n}} \frac{1}{j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{1}{j} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ 1\leqslant i\leqslant j}} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j}.$$

Le calcul est alors immédiat, car pour $j \in [\![1,n]\!]$ fixé, on a $\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j} = 1$. On obtient :

$$S = \sum_{j=1}^{n} 1 = n.$$

24

À i fixé, on a $\sum_{j=1}^{i} 2^i = i\,2^i$, ce qui explique que $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} 2^i$.
Intervertissons les deux symboles $\sum$:

$$S = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant i}} 2^i = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} 2^i = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\leqslant i\leqslant n}} 2^i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^i.$$

La somme interne est le somme des termes d'une suite géométrique, que l'on sait donc calculer : $\sum_{i=j}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2^j$.
On obtient :

$$S = \sum_{j=1}^{n} (2^{n+1} - 2^j) = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - \sum_{j=1}^{n} 2^j$$

et donc, à nouveau en reconnaissant une somme géométrique (la seconde somme ci-dessus) :

$$S = n2^{n+1} - (2^{n+1} - 2) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$