Applications

exercices

Retour sur les ensembles

101 **Intersection et union indexées par $\mathbb{R}_+^*$**

Montrer que

$$\bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*}]-h,h[= \{0\} \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*}]-h,h[= \mathbb{R}.$$

102 **$\mathcal{P}$ calligraphique**

Soit E et F deux ensembles.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E\cap F)=\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E\cup F)\supset\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$.
3. Donner un exemple où $\mathcal{P}(E\cup F)\neq\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$.
4. Prouver que : $(F\subset E \text{ ou } E\subset F) \iff \mathcal{P}(E\cup F)=\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$.

103 **Partition**

Soit $f : E\to I$ une application surjective.
Pour tout $i\in I$, on pose $A_i=f^{(-1)}(\{i\})$.
Montrer que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E.

Des applications « concrètes »

104 Quizz

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

105 Une application bijective sur $(\mathbb{R}^*)^2$

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, xy^2) \end{array}$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.

106 Proposez un candidat !

Considérons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

En une phrase, dire pourquoi f est bien définie.
Déterminer une application $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Que peut-on en déduire ?

107 C'est l'identité que dans un sens !

Considérons

$$\sigma : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad \tau : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

1. Déterminer les applications $\tau \circ \sigma$ et $\sigma \circ \tau$.
2. L'application σ est-elle bijective ? Et l'application τ ?

108 Homographie du disque unité

On pose :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Soit $a \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$. Considérons $f_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z} \end{array}$

1. Montrer que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a
$$|1 - \overline{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$$
2. En déduire que f_a est bien définie.
3. Montrer que f_a est une application bijective et déterminer f_a^{-1}.
4. Existe-t-il $b \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{U}$ tel que $f_a^{-1} = f_b$?
5. Déterminer l'image réciproque de $\mathbb{U}$ par f_a, notée $f_a^{(-1)}(\mathbb{U})$.

109 Stricte monotonie et injectivité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement monotone.
Montrer que f est injective.

Des applications « abstraites »

110 Une inclusion toujours vraie

Soit A une partie de E et $f \in F^E$.

1. Montrer l'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(\overline{A})$.
2. Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.

111 Avec le complémentaire

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$.

1. Montrer $\quad f$ injective $\implies f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. Montrer $\quad f$ surjective $\implies \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

112 Avec l'image réciproque

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que $\Big(\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f^{(-1)}\big(f(A)\big) = A\Big) \iff f$ injective
2. Dans le même esprit, caractériser la surjectivité de f.

113 Injectivité et intersection

Soit $f \in F^E$. Montrer que f est injective si et seulement si

$$\forall\,(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

114 Composées

Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

115 f composée 3 fois

Soit $f \in E^E$ telle que $f \circ f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Autres

116 Analyse-Synthèse

Trouver toutes les applications injectives f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$(\star) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$$

117 $\mathbb{N}^2$ est en bijection avec $\mathbb{N}$

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \longmapsto & 2^p(2q+1) \end{array}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.
   On pourra procéder par récurrence forte sur n.
   Conséquence pour f ?
2. Construire, à l'aide de f, une application bijective $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.
3. On dispose donc maintenant d'une bijection g de $\mathbb{N}^2$ vers $\mathbb{N}$.
   On définit alors l'application $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ par

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b,c) & \longmapsto & h(a,b,c) = g\big(g(a,b),c\big) \end{array}$$

   (a) Montrer que h est bijective.
   (b) Déterminer h^{-1} (2023).
4. Construire une application bijective $\varphi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$.

118 Une application $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \longmapsto & p + \frac{1}{q} \end{array}$

L'application f est-elle injective, surjective ?

119 $[0,1]$ est en bijection avec $[0,1[$

1. Déterminer une bijection de $\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 1\}$ dans $\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 2\}$.
2. Déduire de la question précédente une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1[$.
   On pourra noter A le complémentaire de $\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 1\}$ dans $[0,1]$.

120 Produit cartésien d'applications

Soit E, F, G trois ensembles quelconques et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications.
On considère l'application $h: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \times G \\ t & \longmapsto & \big(f(t),\ g(t)\big) \end{array}$

1. Prenons un exemple avec $E = \mathbb{R}$, $F = G = \mathbb{R}^+$, $f : t \mapsto t^2$ et $g : t \mapsto (t+1)^2$.
   Ainsi $h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & \big(t^2,\ (t+1)^2\big) \end{array}$
   (a) Calculer $h(2)$.
   (b) Déterminer les antécédents de $(\frac{1}{4}, 1)$ par h.
   (c) L'application h est-elle surjective ?
   (d) L'application h est-elle injective ?

On revient au cas général.

2. (a) Montrer que si f **ou** g est injective, alors h est injective.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?
3. (a) Montrer que si h est surjective, alors f **et** g sont surjectives.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

Avec $\mathcal{P}(E)$

121 Dans $\mathcal{P}(E)$

Soit E un ensemble non vide contenant un certain x_0.
Considérons l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} A & \text{si } x_0 \in A \\ \overline{A} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

1. L'application f est-elle surjective ? Quelle est l'image de f ?
2. L'application f est-elle injective ?
3. Exprimer $f \circ f$ en fonction de f.

122 Trace sur A

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$.
Montrer que l'application f_A est injective si et seulement si $A = E$.
Montrer que l'application f_A est surjective si et seulement si $A = E$.

123 Théorème de Cantor

1. Construire une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E sur $\mathcal{P}(E)$.
   Pour cela, raisonner par l'absurde en considérant une bijection $f : E \to \mathcal{P}(E)$ et considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

124 Traces sur les parties de E

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A\,,\, X \cap B) \end{array}$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1}.

125 Point fixe

Soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ une application croissante pour l'inclusion.
Montrer que f admet un point fixe.

Indication : considérer $\mathcal{W} = \Big\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \subset f(A)\Big\}$ et montrer que W est stable par f et par réunion.

126 Applications images

Soit $f : E \to F$. On considère les applications

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ Y & \longmapsto & f^{-1}(Y) \end{array}$$

1. Montrer les équivalences f injective $\iff$ Φ injective $\iff$ Ψ surjective.
2. Montrer les équivalences f surjective $\iff$ Φ surjective $\iff$ Ψ injective.

Applications

corrigés

101

Montrons $\bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*}]-h,h[= \{0\}$.

Il s'agit d'une égalité entre deux ensembles.
On peut procéder par double inclusion (cela fonctionne très bien).
On peut également reformuler l'égalité avec une équivalence. Pour $x \in \mathbb{R}$, il s'agit de montrer que

$$x \in \bigcap_{h\in\mathbb{R}_+^*}]-h,h[\iff x = 0$$

Pour montrer cette équivalence on montre les deux implications suivantes :

$$x = 0 \implies \forall\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ x \in]-h,h[\qquad \text{et} \qquad x \neq 0 \implies \exists\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ x \notin]-h,h[$$

Essayer de comprendre comment se traduisent ces deux implications sur l'égalité d'ensemble.

— Évidemment, on a $\forall\, h \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \in]-h,h[$.

— Soit $x \neq 0$. En posant $h = \dfrac{|x|}{2}$ qui est bien > 0 (car $x \neq 0$), on a $x \notin]-h,h[$.

Montrons $\bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*}]-h,h[= \mathbb{R}$.

$\boxed{\subset}$ Il est évident que $\bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*}]-h,h[= \mathbb{R}$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, alors en posant $h_0 = |x| + 1$, on a $x \in]-h_0,h_0[$, donc a fortiori, $x \in \bigcup_{h\in\mathbb{R}_+^*}]-h,h[$.

102

1. Soit A un ensemble. On a les équivalences :

$$A \in \mathcal{P}(E \cap F) \iff A \subset E \cap F \iff A \subset E \text{ et } A \subset F \iff A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F).$$

2. Soit $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. Montrons que $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$ par disjonction de cas :
   — si $A \in \mathcal{P}(E)$, alors $A \subset E$, donc $A \subset E \cup F$;
   — si $A \in \mathcal{P}(F)$, alors $A \subset F$, donc $A \subset E \cup F$.
3. Si l'on prend $E = \mathbb{R}_-$ et $F = \mathbb{R}_+$, alors :

$$[-1, 1] \in \mathcal{P}(E \cup F) \qquad \text{mais} \qquad [-1, 1] \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F).$$

4. — Supposons $F \subset E$ ou $E \subset F$.

   Cas $F \subset E$**.** On a d'une part $E = E \cup F$, donc $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cup F)$. D'autre part, $\mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E)$ donc $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E \cup F)$.

   Cas $E \subset F$**.** Alors $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

   — Pour montrer l'autre implication, raisonnons par contraposition. Supposons $F \not\subset E$ et $E \not\subset F$. Il existe alors $e \in E \setminus F$ et $f \in F \setminus E$, et en posant $A = \{e, f\}$, on a :

$$A \in \mathcal{P}(E \cup F) \text{ et } A \notin \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F),$$

   ce qui montre que $\mathcal{P}(E \cup F) \neq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$.

103

Attention à ne **pas** dire que $f(A_i) = \{i\}$.

En revanche, on peut reformuler A_i. On a $A_i = \Big\{x \in E \mid f(x) = i\Big\}$.

Il y a trois choses à montrer $\begin{cases} \text{les } A_i \text{ recouvrent } E\text{, c'est-à-dire} \quad E = \bigcup\limits_{i\in I} A_i \\ \text{les } A_i \text{ sont 2 à 2 disjoints, c'est-à-dire} \quad \forall\, i,j \in I, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset \\ \text{les } A_i \text{ sont non vides, c'est-à-dire} \quad \forall\, i \in I,\ A_i \neq \emptyset \end{cases}$

- Montrons l'inclusion $E \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, l'autre inclusion est automatique.

  Soit $x \in E$.

  Montrons que $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, c'est-à-dire montrons $\exists\, i \in I,\ x \in A_i$.

  Posons $i = f(x)$.

  Alors i est bien dans I (car f est à valeurs dans I).

  De plus, par définition de A_i, on a bien $x \in A_i$.
- Montrons $\forall\, i, j \in I, \quad A_i \cap A_j \neq \emptyset \implies i = j$

  Soit $i, j \in I$.

  Supposons $A_i \cap A_j \neq \emptyset$.

  On peut donc trouver $x \in A_i \cap A_j$.

  Par définition de A_k, on a donc $f(x) = i$ et $f(x) = j$.

  D'où $i = j$.
- Soit $i \in I$. Montrons que A_i est non vide.

  Comme f est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = i$.

  Ainsi, $x \in A_i$.

Supposons f strictement monotone. On va distinguer deux cas.

— Supposons f strictement croissante. Montrons que f est injective par contraposée, c'est-à-dire montrons

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x').$$

Soit $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x'$. Distinguons deux cas.

1. Si $x < x'$, la stricte croissance de f entraîne $f(x) < f(x')$.
2. Si $x > x'$, la stricte croissance de f entraîne $f(x) > f(x')$.

Dans les deux cas, on a $f(x) \neq f(x')$.
Cela démontre l'injectivité de f.

— On peut démontrer exactement de la même façon que si f est strictement décroissante, alors f est injective. Ramenons-nous plutôt astucieusement au cas que nous venons de traiter.
Si f est strictement décroissante, alors $-f$ est strictement croissante.
D'après le cas déjà traité, $-f$ est alors injective.
On a alors $f = (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \circ (-f)$.
Ainsi, f apparaît comme la composée de deux fonctions injectives. Donc f est alors injective.

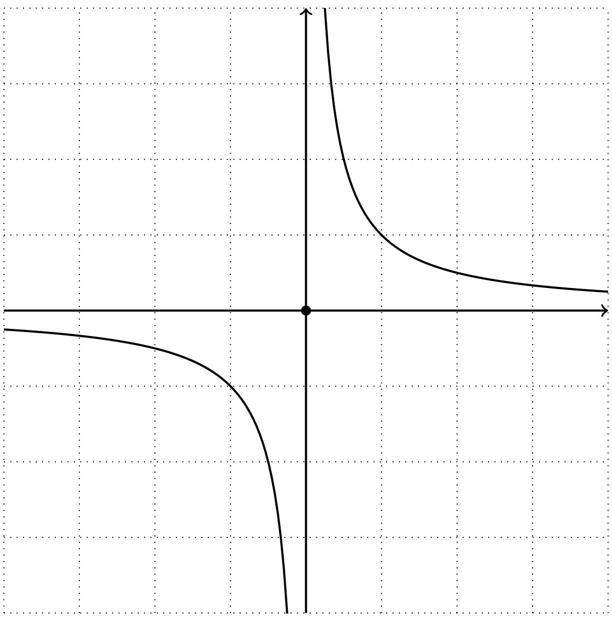
La réciproque de la question précédente est fausse : il existe des fonctions injectives non strictement monotones.
C'est par exemple le cas de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Cette fonction est injective (elle est même bijective, ce que l'on peut montrer facilement en vérifiant que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$), mais elle n'est pas strictement monotone :

— on a $3 > 1$, et pourtant $f(3) \leqslant f(1)$, donc elle n'est pas strictement croissante.

— on a $1 > -1$, et pourtant $f(1) \geqslant f(-1)$, donc elle n'est pas strictement décroissante.



110

1. Soit $y \in f(E) \setminus f(A)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $y \notin f(A)$, on a $x \notin A$ (raisonner par l'absurde : si x était dans A, alors...).
   On en déduit que $x \in \overline{A}$ puis $y \in f(\overline{A})$.
2. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ et $A = \mathbb{R}^+$.
   On a alors $f(A) = f(\mathbb{R})$ (car les deux parties sont égales à $\mathbb{R}^+$), donc $f(\mathbb{R}) \setminus f(A) = \emptyset$.
   Pourtant, on a $\overline{A} = \mathbb{R}^{-*}$, donc $f(\overline{A}) = \mathbb{R}^{+*} \neq \emptyset$.

Rappel :
Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, on a toujours $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$ et $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.

1. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\spadesuit\ \forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$
   Montrons que f est injective.

   Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) \overset{\star}{=} f(x')$.
   On cherche à montrer que $x = x'$, ou encore que $\{x\} = \{x'\}$.
   L'hypothèse $f(x) = f(x')$ se réécrit :
   $$\big\{f(x)\big\} \;=\; \big\{f(x')\big\}$$
   Ou encore :
   $$f\big(\{x\}\big) \;=\; f\big(\{x'\}\big)$$
   D'où l'égalité des images réciproques suivantes :
   $$f^{(-1)}\Big(f\big(\{x\}\big)\Big) \;=\; f^{(-1)}\Big(f\big(\{x'\}\big)\Big)$$
   On applique l'hypothèse $\spadesuit$, à gauche avec $A = \{x\} \in \mathcal{P}(E)$ et à droite avec $A = \{x'\} \in \mathcal{P}(E)$, et on obtient
   $$\{x\} \;=\; \{x'\}$$
   D'où $x = x'$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f injective.
   Montrons que $\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   On cherche à montrer que $f^{-1}\Big(f(A)\Big) \subset A$ l'autre inclusion est tjs vraie.
   Soit $x \in f^{-1}\Big(f(A)\Big)$. Montrons que $x \in A$
   Par définition de l'image réciproque, on a $f(x) \in f(A)$.
   Donc il existe $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$.
   Par injectivité de f, on obtient $x = a \in A$.
   Donc $x \in A$.

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\heartsuit\ \Big(\forall\, B \in \mathcal{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B\ \Big)$.
   Montrons que f est surjective.

   Soit $y \in F$.
   On pose $B = \{y\} \subset F$. Appliquons $\heartsuit$ à cette partie B.
   On a alors $y \in f\Big(f^{-1}(\{y\})\Big)$.
   En particulier, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ en effet, si cette partie était vide, son image directe par f le serait aussi, et ne pourrait pas contenir l'élément y
   Puisque $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$, il existe $x \in f^{-1}(\{y\})$.
   Ce x est un élément de E qui vérifie $f(x) \in \{y\}$ càd $f(x) = y$.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f surjective.
   Montrons que $\forall\, B \in \mathcal{P}(F),\ f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

   Soit $B \in \mathcal{P}(F)$.
   On cherche à montrer que $B \subset f\Big(f^{-1}(B)\Big)$ l'autre inclusion est tjs vraie.

   Soit $y \in B$. Montrons que $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$
   Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
   Donc $x \in f^{-1}(B)$ car $f(x) = y \in B$.
   Comme y s'écrit $f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$, on a $y \in f\Big(f^{-1}(B)\Big)$.

- Supposons f injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrons que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
  - L'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ est vraie en toute généralité.
    Je vous laisse la remontrer.
  - Montrons l'autre inclusion. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Montrons que $y \in f(A \cap B)$.
    - Comme $y \in f(A)$, on peut trouver $a \in A$ tel que $y = f(a)$.
    - Comme $y \in f(B)$, on peut trouver $b \in B$ tel que $y = f(b)$.

    On a donc $f(a) = f(b)$.
    L'injectivité de f entraîne alors $a = b$.
    Ainsi, l'élément $a = b$ appartient à $A \cap B$.
    D'où $y \in f(A \cap B)$.
- Montrons l'implication réciproque. Supposons donc :

  $$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \; f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

  et montrons que f est injective.
  Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
  Posons $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$. D'après l'hypothèse, on a :

  $$f\Big(\{x\} \cap \{x'\}\Big) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\})$$

  À droite, on obtient un ensemble *non vide* par hypothèse, à savoir $\{f(x)\}$, qui vaut aussi $\{f(x')\}$.
  Donc à gauche, l'ensemble $\{x\} \cap \{x'\}$ est *non vide*. Donc $x = x'$.
  D'où l'injectivité de f.

1. Supposons $g \circ f$ surjective et g injective et prouvons la surjectivité de f.
   Soit $y \in F$. Comme $g(y) \in G$, par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $g \circ f\,(x) = g(y)$. On a alors :
   $$g(y) = (g \circ f)\,(x) = g\,(f\,(x))\,.$$
   Comme g est injective, on en déduit que $y = f\,(x)$. Cela prouve que f est surjective.
2. Supposons $g \circ f$ injective et f surjective et prouvons l'injectivité de g.
   Soit $(y_1, y_2) \in F^2$ tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Comme f est surjective, on peut trouver $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $y_1 = f\,(x_1)$ et $y_2 = f\,(x_2)$. Comme $g(y_1) = g(y_2)$, on a $(g \circ f)\,(x_1) = (g \circ f)\,(x_2)$, ce qui, par injectivité de $g \circ f$, entraîne $x_1 = x_2$.
   Cela prouve que g est injective.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective.

Montrons que f est surjective, c'est-à-dire $\forall\, y \in E,\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)$.
Soit $y \in E$.
Par hypothèse de l'énoncé, on a $f \circ f \circ f = f$, d'où $(f \circ f \circ f)(y) = f(y)$.
On écrit cette dernière égalité sous la forme $f\Big(f\big(f(y)\big)\Big) = f(y)$.
Par injectivité de f, on a $f\big(f(y)\big) = y$.
Posons $x = f(y)$.

- $\star$ On a $x \in E$
- $\star$ On a $f(x) = f\big(f(y)\big) = y$.

Donc f est surjective.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f surjective.

Montrons que f est injective.
Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
Par surjectivité de f, on peut trouver $t \in E$ tel que $x = f(t)$.
Par surjectivité de f, on peut trouver $t' \in E$ tel que $x' = f(t')$.
On a alors

$$f\big(f(t)\big) = f\big(f(t')\big)$$

Appliquons f, on a alors

$$f\Big(f\big(f(t)\big)\Big) = f\Big(f\big(f(t')\big)\Big)$$

ce que l'on réécrit sous la forme

$$(f \circ f \circ f)(t) \;=\; (f \circ f \circ f)(t')$$

Par hypothèse, on a $f \circ f \circ f = f$, d'où $f(t) = f(t')$.
D'où $x = x'$.

Analyse. Soit f une application injective vérifiant $(\star)$.
Montrons que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Par récurrence forte, montrons que

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_p : \text{« } f(p) = p \text{ »}$$

Initialisation. $\mathcal{H}_0$ est vraie. En effet, on a $f(0) \in \mathbb{N}$ et $f(0) \leqslant 0$, d'où $f(0) = 0$.

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$ sont vraies. Montrons $\mathcal{H}_{p+1}$.
D'après $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_p$, on a :

$$f(0) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad \dots \qquad f(p) = p$$

et d'après $(\star)$ avec $n = p+1$, on a $f(p+1) \in [\![0, p+1]\!]$.
Comme f est injective, l'image de $f(p+1)$ est nécessairement égale à $p+1$.
D'où $\mathcal{H}_{p+1}$.

Bilan de l'Analyse. Une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $(\star)$ appartient à $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Synthèse. La fonction identité est injective et vérifie $(\star)$.

Bilan. L'ensemble des applications injectives de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $(\star)$ est $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

Autre façon de présenter la solution.

On va montrer que $\left\{ f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \text{ injective vérifiant } (\star) \right\} = \left\{ \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \right\}$.
Montrons cette égalité par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit f une application injective vérifiant $(\star)$.
Montrons que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
Par récurrence forte etc...

Ainsi, f appartient à $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

$\boxed{\supset}$ La fonction identité est injective et vérifie $(\star)$.

Bilan. L'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ injectives vérifiant $(\star)$ est $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

118

• Montrons que f est injective.
Soit (p, q) et (p', q') tels que $f(p, q) = f(p', q')$.
On a donc
$$p + \frac{1}{q} = p' + \frac{1}{q'} \text{ c'est-à-dire } p' - p = \frac{1}{q} - \frac{1}{q'}$$
Or $0 < \frac{1}{q'} \leqslant 1$ et $-1 \leqslant -\frac{1}{q} < 0$. Donc, en sommant ces inégalités, on obtient :
$$-1 < \frac{1}{q} - \frac{1}{q'} < 1$$
On a donc $|p - p'| < 1$. Or $p - p'$ est un entier, d'où $p - p' = 0$, puis $p = p'$.
En utilisant $f(p, q) = f(p', q')$, on tire $q = q'$.

• Montrons que f n'est pas surjective.
Le rationnel $\frac{2}{3}$ n'a pas d'antécédents.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons que $\frac{2}{3}$ s'écrive $p + \frac{1}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.
On a toujours $p < p + \frac{1}{q} \leqslant p + 1$. Et comme $p + \frac{1}{q} = \frac{2}{3}$, on aurait nécessairement $p = 0$.
D'où $\frac{2}{3} = \frac{1}{q}$ puis $q = \frac{3}{2}$. D'où la contradiction car $q \in \mathbb{N}^*$.

1. Posons $g : \{\frac{1}{n}, n \geqslant 1\} \to \{\frac{1}{n}, n \geqslant 2\}$, définie par $g : \frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n+1}$.
   Cette application g est bien définie.
   Elle est bijective de bijection réciproque $\frac{1}{n} \mapsto \frac{1}{n-1}$.
2. Notons A le complémentaire de $\left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 1\right\}$ dans $[0,1]$ de sorte que

$$[0,1] = \left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 1\right\} \cup A$$

   Remarquons que A vérifie également :

$$[0,1[= \left\{\frac{1}{n},\ n \geqslant 2\right\} \cup A$$

   On définit $h : [0,1] \to [0,1[$ de la façon suivante :

$$h : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } x \text{ s'écrit } \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon, c'est-à-dire } x \in A \end{cases}$$

   Alors h est bien définie.
   Posons $\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{si } x = \frac{1}{n} \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$
   Alors φ est bien définie
   On a $h \circ \varphi = \mathrm{id}_{[0,1[}$ et $\varphi \circ h = \mathrm{id}_{[0,1]}$.
   Cela montre que h est bijective.

121

1. L'application f n'est pas surjective.
   La partie vide n'est pas dans l'image de f.
   Prouvons-le en utilisant un raisonnement par l'absurde.
   Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(A) = \emptyset$.
   Distinguons deux cas.

   — Cas $x_0 \in A$.
   Alors $f(A) = A$. Or $f(A) = \emptyset$. D'où $A = \emptyset$. Ainsi, l'ensemble vide contient x_0.
   C'est absurde.

   — Cas $x_0 \notin A$.
   Alors $x_0 \in \overline{A}$ et $f(A) = \overline{A}$. Or $f(A) = \emptyset$. D'où $\overline{A} = \emptyset$ Ainsi, l'ensemble vide contient x_0.
   C'est absurde.

2. L'application f n'est pas injective.
   En effet, $f(\emptyset) = E$ et $f(E) = E$ et pourtant $E \neq \emptyset$ (d'après l'énoncé).
3. Montrons que $f \circ f = f$.
   Déjà, les applications $f \circ f$ et f ont même ensemble de départ et d'arrivée.
   Montrons qu'elles ont même expression.
   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.
   Montrons que $(f \circ f)(A) = f(A)$.
   Vu la définition de f, on procède par disjonction de cas.

   — Cas $x_0 \in A$.
   Alors $f(A) = A$.
   On a donc $x_0 \in f(A)$, d'où $f\big(f(A)\big) = f(A)$.
   Dans ce cas, on a donc $(f \circ f)(A) = f(A)$.

   — Cas $x_0 \notin A$, c'est-à-dire $x_0 \in \overline{A}$.
   Alors $f(A) = \overline{A}$.
   On a donc $x_0 \in f(A)$, d'où $f\big(f(A)\big) = f(A)$.
   Dans ce cas, on a donc $(f \circ f)(A) = f(A)$.

— Supposons $A = E$, alors f est l'identité de $\mathcal{P}(E)$; elle est donc injective.

— Supposons f injective. On a $f(A) = f(E)$ (car $f(A) = A \cap A = A$ et $f(E) = E \cap A = A$). Par injectivité de f, on a $A = E$.

— Supposons $A = E$, alors f est l'identité de $\mathcal{P}(E)$; elle est donc surjective.

— Supposons f surjective. Montrons que $A = E$.
Montrons surtout $E \subset A$!
Par surjectivité de f, il existe $X_0 \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(X_0) = E$, c'est-à-dire $X_0 \cap A = E$, d'où $E \subset A$.

1. Montrons que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$.
   — Supposons f injective.
   On a $f(A \cup B) = (A, B) = f(E)$. Par injectivité de f, on en déduit $A \cup B = E$.
   — Réciproquement, supposons $A \cup B = E$ et montrons que f est injective.
   Soit $(X_1, X_2) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $f(X_1) = f(X_2)$ *i.e.* :
$$X_1 \cap A = X_2 \cap A \quad \text{et} \quad X_1 \cap B = X_2 \cap B.$$
   On a alors
$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 \cap E \\ &= X_1 \cap (A \cup B) \\ &= (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) \\ &= (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) \\ &= X_2 \cap (A \cup B) \\ &= X_2 \cap E \\ &= X_2. \end{aligned}$$
   D'où $X_1 = X_2$.
   D'où l'injectivité de f.
2. Montrons que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \emptyset$.
   $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f surjective.
   On peut donc trouver une partie $X \in \mathcal{P}(E)$ telle que $(\emptyset, A \cap B) = f(X)$. On a alors :
$$(\emptyset, A \cap B) = (X \cap A, X \cap B) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \emptyset = X \cap A \\ A \cap B = X \cap B \end{cases}$$
   En intersectant la première ligne avec B et la seconde avec A, on obtient :
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \emptyset \cap B &=& (X \cap A) \cap B \\ (A \cap B) \cap A &=& (X \cap B) \cap A \end{array} \right.$$
   D'où
$$\left\{ \begin{array}{rcl} \emptyset &=& X \cap A \cap B \\ A \cap B &=& X \cap A \cap B \end{array} \right.$$
   D'où $A \cap B = \emptyset$.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $A \cap B = \emptyset$ et montrons que f est surjective.
   Soit $(Y_1, Y_2) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.
   Posons $X = Y_1 \cup Y_2$.
   - ⋆ On a $X \in \mathcal{P}(E)$.
   - ⋆ Montrons que $f(X) = (Y_1, Y_2)$. On a
$$X \cap A = (Y_1 \cup Y_2) \cap A = (Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A).$$
     — Comme $Y_1 \subset A$, on a $Y_1 \cap A = Y_1$.
     — Comme $Y_2 \subset B$ et $A \cap B = \emptyset$, on a $Y_2 \cap A = \emptyset$.
     On en déduit $X \cap A = Y_1$.
     On prouve de même $X \cap B = Y_2$.
     On en déduit $(Y_1, Y_2) = f(X)$.
   D'où la surjectivité de f.
3. L'application f est bijective si, et seulement si, elle est injective et surjective, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} A \cup B = E \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$
   Dans ce cas, en examinant la preuve de la surjectivité, on obtient que f^{-1} est l'application :
$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ (Y_1, Y_2) & \longmapsto & Y_1 \cup Y_2 \end{array}$$

Exercice de colle de François Sarcos (2022-2023, promo 2024)

— Montrons que $\mathcal{W}$ est stable par f, càd $\forall\, A \in \mathcal{W},\ f(A) \in \mathcal{W}$.
Soit $A \in \mathcal{W}$.
Puisque $A \in \mathcal{W}$, on a $A \subset f(A)$.
Par croissance de f, on a $f(A) \subset f\big(f(A)\big)$.
Donc $f(A) \in \mathcal{W}$.

— Montrons que $\mathcal{W}$ est stable par réunion.
Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{W}^I$. Montrons que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{W}$.
D'une part, par définition de $\mathcal{W}$, on a

$$\forall\, i \in I,\ A_i \subset f(A_i)$$

D'autre part, comme on a toujours $A_i \subset \bigcup\limits_{j\in I} A_j$, la croissance de f implique

$$\forall\, i \in I,\ f(A_i) \subset f\Big(\bigcup_{j\in I} A_j\Big)$$

Par transitivité, on a

$$\forall\, i \in I,\ A_i \subset f\Big(\bigcup_{j\in I} A_j\Big)$$

Ainsi, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subset f\Big(\bigcup\limits_{j\in I} A_j\Big)$.

— Considérons $R = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{W}} A$.
Autrement dit, R est la réunion de toutes les parties appartenant à $\mathcal{W}$.

  — Comme $\mathcal{W}$ est stable par réunion, on a $R \in \mathcal{W}$. Ainsi, $R \subset f(R)$.

  — Reprenons ce que l'on a obtenu au point précédent, à savoir $R \in \mathcal{W}$.
  Comme $\mathcal{W}$ est stable par f, on en déduit $f(R) \in \mathcal{W}$.
  Ainsi, $f(R)$ est une partie de $\mathcal{W}$, donc est dans R (qui est la réunion des parties de $\mathcal{W}$).
  En maths : $f(R) \subset R$.

Les deux points précédents fournissent $f(R) = R$.

Voilà le plan de démonstration.

1. f injective $\implies$ ϕ injective.
2. ϕ injective $\implies$ f injective.
3. f injective $\implies$ ψ surjective.
4. ψ surjective $\implies$ f injective (par contraposée).

1. Supposons f injective.
   Soit $X, X' \in \mathscr{P}(E)$ tels que $\phi(X) = \phi(X')$. On a donc $f[X] = f[X']$. Montrons $X = X'$.
   On procède par double inclusion.

   — Soit $x \in X$.
   Puisque $f[X] = f[X']$, l'élément $f(x)$, qui appartient clairement à $f[X]$, doit appartenir à $f[X']$. On peut donc trouver $x' \in X'$ tel que $f(x) = f(x')$.
   Comme f est injective, cette dernière égalité entraîne que $x = x'$, et donc que $x \in X'$.
   On a donc montré l'inclusion $X \subset X'$.

   — On montre exactement de la même façon l'inclusion réciproque $X' \subset X$.

2. Supposons ϕ injective.
   Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.
   Posons [1] $X = \{x\}$ et $X' = \{x'\}$. Ce sont des éléments de $\mathscr{P}(E)$ pour lesquels on a

$$\phi(X) = f[\{x\}] = \{f(x)\} \quad \text{et} \quad \phi(X') = f[\{x'\}] = \{f(x')\}.$$

   Ainsi, $\phi(X) = \phi(X')$, donc l'injectivité de ϕ entraîne que $X = X'$, c'est-à-dire $\{x\} = \{x'\}$.
   On en déduit que $x = x'$.
   On a donc montré l'injectivité de f.
3. Supposons f injective.
   Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a donc $X \subset E$.
   Soit $Y = f[X] = \Big\{ f(x) x \in X \Big\}$. Montrons que $\psi(Y) = X$.
   On procède par double inclusion.

   — Soit $x \in \psi[Y] = f^{-1}[Y]$.
   Par définition, cela signifie que $f(x) \in Y$, c'est-à-dire que $f(x) \in f[X]$.
   On peut donc trouver $x' \in X$ tel que $f(x) = f(x')$.
   Par injectivité de f, on en déduit $x = x'$, et donc $x \in X$.
   On a ainsi montré l'inclusion $\psi(Y) \subset X$.

   — Réciproquement, soit $x \in X$.
   On a $f(x) \in f[X] = Y$, donc $x \in f^{-1}[Y]$.
   On a ainsi montré l'inclusion $X \subset \psi(Y)$.

   On en déduit que $\psi(Y) = X$.
   On a donc bien montré la surjectivité de ψ.
4. Supposons que f n'est pas injective. On peut donc trouver deux éléments $x \neq x'$ de E tels que $f(x) = f(x')$. Notons $y = f(x) = f(x')$.
   Montrons que ψ n'est pas surjective. Plus précisément, on va montrer que $\{x\}$ n'a pas d'antécédent, c'est-à-dire que $\forall Y \in \mathscr{P}(F), \psi(Y) \neq \{x\}$.
   Pour cela, soit $Y \in \mathscr{P}(F)$. Distinguons deux cas.

   — Si $y \in Y$, alors x et x' appartiennent à $f^{-1}[Y] = \psi(Y)$. Comme $x' \in \psi(Y)$, on a $\psi(Y) \neq \{x\}$.

1. L'hypothèse que nous avons sous la main (l'injectivité de ϕ) est une assertion quantifiée commençant par un quantificateur existentiel ($\forall X, X' \in \mathscr{P}(E), \phi(X) = \phi(X')$). Comme toute hypothèse de ce type, c'est à nous de trouver des ensembles à qui l'appliquer pour en déduire quelque chose de pertinent. On a ici eu une idée, celle d'appliquer cette hypothèse à nos deux singletons. Cela peut paraître assez malin, mais on constate que c'est en fait presque forcé : dans un contexte aussi abstrait, à quels éléments de $\mathscr{P}(E)$, c'est-à-dire à quelles parties de E, pouvons-nous appliquer l'hypothèse ? Les premières parties que nous pouvons nommer sont $\varnothing$ et X ; viennent ensuite les parties que nous pouvons définir à partir de x et x', c'est-à-dire $\{x\}$, $\{x'\}$, $\{x, x'\}$ et leurs complémentaires, puis enfin d'autres parties plus complexes construites à partir de f comme $f^{-1}[f[\{x\}]]$, etc. Se demander naïvement à qui nous pouvons bien appliquer l'hypothèse nous conduit assez directement à la bonne solution.

— Si $y \notin Y$, alors ni x ni x' n'appartient à $f^{-1}[Y] = \psi(Y)$. Comme $x \notin \psi(Y)$, on a $\psi(Y) \neq \{x\}$.

Cela prouve donc que ψ n'est pas surjective.

Voilà le plan de démonstration.

1. f surjective $\implies$ ϕ surjective.
2. ϕ surjective $\implies$ f surjective.
3. f surjective $\implies$ ψ injective.
4. ψ injective $\implies$ f surjective (par contraposée).

1. Supposons f surjective et montrons que ϕ est surjective.
   Soit $Y \in \mathscr{P}(F)$.
   Posons $X = f^{-1}[Y]$ et montrons que $\phi(X) = Y$.
   On procède par double inclusion.

   — Soit $y \in \phi(X) = f[X]$.
   On peut donc trouver $x \in X$ tel que $y = f(x)$.
   Puisque $X = f^{-1}[Y]$, on en déduit que x vérifie $f(x) \in Y$, donc que $y \in Y$.
   Cela montre l'inclusion $\phi(X) \subset Y$.

   — Réciproquement, soit $y \in Y$.
   Comme f est surjective, on peut trouver $x \in X$ tel que $f(x) = y$.
   Comme $y \in Y$, on a $f(x) \in Y$, donc $x \in f^{-1}[Y] = X$.
   Cela montre que $y = f(x) \in f[X] = \phi(X)$.
   On a donc montré l'inclusion $Y \subset \phi(X)$.

   On a donc bien montré que $\phi(X) = Y$.
   Cela montre la surjectivité de ϕ.

2. Supposons ϕ surjective. Montrons que f est surjective.
   Soit $y \in Y$.
   Comme ϕ est surjective, on peut trouver un ensemble $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $\phi(X) = \{y\}$.
   L'ensemble X est non vide. En effet, $\phi(\varnothing) = f[\varnothing] = \varnothing \neq \{y\}$.
   On peut donc trouver un élément $x \in X$. On a alors $f(x) \in f[X] = \{y\}$, d'où l'on déduit $y = f(x)$.
   Cela prouve la surjectivité de f.

3. Supposons f surjective. Montrons ψ injective.
   Soit $Y, Y' \in \mathscr{P}(F)$ tels que $\psi(Y) = \psi(Y')$, c'est-à-dire $f^{-1}[Y] = f^{-1}[Y']$. Montrons $Y = Y'$.
   On procède par double inclusion.

   — Soit $y \in Y$.
   Comme f est surjective, on peut trouver $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
   Puisque $y \in Y$, on a $x \in f^{-1}[Y]$.
   D'après l'hypothèse, on en déduit que $x \in f^{-1}[Y']$, donc que $y = f(x) \in Y'$.
   Cela montre l'inclusion $Y \subset Y'$.

   — On montre exactement de la même façon l'inclusion réciproque $Y' \subset Y$.

   On a donc $Y = Y'$, ce qui prouve que ψ est injective.

4. Supposons f non surjective. On peut donc trouver $y \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) \neq y$.
   En particulier, on a alors
   $$f^{-1}[\{y\}] = \left\{x \in E f(x) = y\right\} = \varnothing = f^{-1}[\varnothing],$$
   c'est-à-dire $\psi(\{y\}) = \psi(\varnothing)$. Comme $\{y\} \neq \varnothing$, cela montre que ψ n'est pas injective.