Fonctions réelles

exercices

Égalités et inégalités chez les nombres réels

101 Max et Min

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les formules suivantes :

$$\max(a,b) = \frac{(a+b)+|a-b|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(a,b) = \frac{(a+b)-|a-b|}{2}$$

Puis, en supposant $a \leqslant b$, faire un dessin du segment $[a,b]$ en indiquant $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{|a-b|}{2}$.

102 Segment

Soit $a \leqslant b$ deux réels. Montrer que $[a,b] = \Big\{x \in \mathbb{R},\ |x-a|+|x-b| = |a-b|\Big\}$.

103 Inégalités

Montrer les inégalités suivantes :

(i) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}^+,\ \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

(ii) $\forall\, a,b,c \in \mathbb{R},\ ab+ac+bc \leqslant a^2+b^2+c^2$

(iii) $\forall\, a,b \in \mathbb{R}^+,\ |\sqrt{a}-\sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$

(iv) $\forall\, a,b \in \mathbb{R},\ (a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4)$

104 Inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

(i) $|x|-3 \leqslant 9$

(ii) $|x-3| \leqslant 9$

(iii) $|x-3| \leqslant -9$

(iv) $|x^2-3| = 1$

(v) $|x^2-8x+11| = 4$

(vi) $|x^2-8x+11| < 4$

(vii) $|x+1| = |2x-3|$

(viii) $|1-2x| = x+1$

(ix) $|x^2-3x-3| = x+2$

(x) $|x^2+5x+3| < x+2$

(xi) $2-x < |x+1|$

(xii) $|x|+|x+1| = 2$

(xiii) $|x-7|+|x-2| \leqslant 3$

105 Inverser une formule

Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\Big(x+\dfrac{1}{x}\Big) \end{array}$

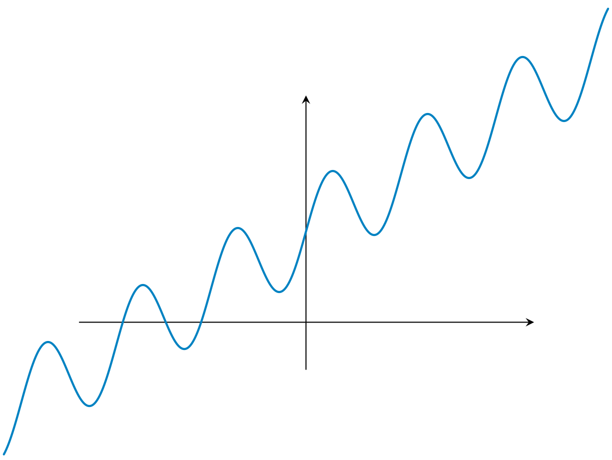
Montrer que f réalise une bijection g de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. Préciser la bijection réciproque g^{-1}.

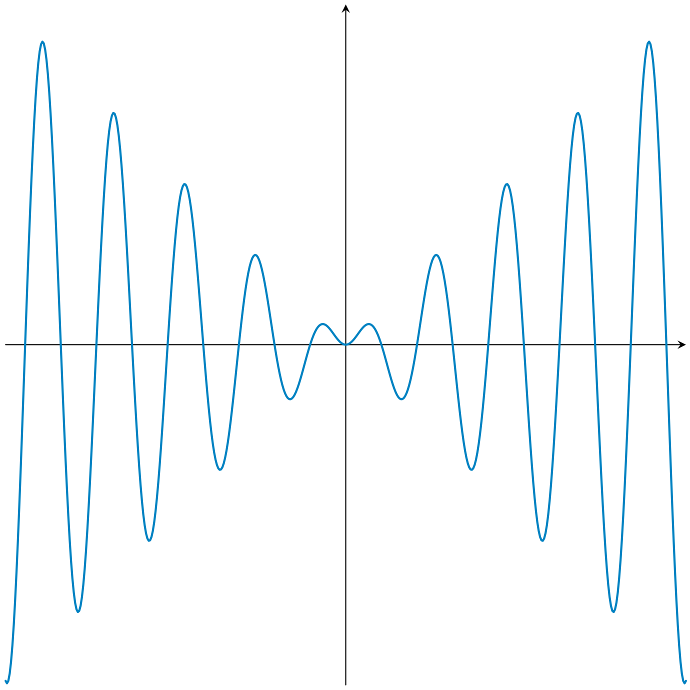
Généralités

106 Allure de courbes

1. Tracer l'allure de la courbe de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x - \lfloor x \rfloor)^2 + \lfloor x \rfloor \end{array}$

2. Proposer des fonctions dont le graphe possède l'allure ci-dessous.





107 4 dessins

Pour une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on pose $f^+ = \dfrac{|f| + f}{2}$ et $f^- = \dfrac{|f| - f}{2}$.

Pour la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2x$, représenter f, $|f|$, f^+ et f^- avec 4 couleurs différentes.

108 Un centre de symétrie

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x-1}$. Montrer que le graphe de f admet le point $(1, 2)$ pour centre de symétrie.

109 Parité

Soit f et g deux fonctions définies sur une partie X de $\mathbb{R}$.

1. Si f et g sont paires, montrer que $f + g$ est paire. Et avec le produit ?
2. Que dire de la parité de $f + g$ et fg lorsque f et g sont impaires ?
3. Que dire de la parité de fg lorsque f est paire et g impaire ?

110 Périodicité

Soit $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions T-périodiques (où $T \in \mathbb{R}_+^*$).
Montrer que $\varphi : x \mapsto f(\frac{x}{2}) + g(\frac{x}{3})$ est périodique.

111 Difficile

Bien sûr, la somme de deux fonctions T-périodiques est T-périodique.
Mais la somme de deux fonctions périodiques est-elle périodique ?

Monotonie

112 **Recollement de la monotonie**

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$ et $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
Montrer que f est croissante sur $[a, c]$ si et seulement si elle est croissante sur $[a, b]$ et $[b, c]$.

113 **Croissance**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) \overset{S}{=} f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) \overset{P}{=} f(x)f(y)$$

Montrer que f est croissante.

114 **Composée dans tous les sens et monotonie**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

115 **« s'annule » VS « est nulle »**

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est croissante.
Montrer que si f s'annule, alors f est la fonction nulle.

Continuité, Dérivabilité

116 **Existence**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(a) - 2f(c) + f(b) = 0$.

117 **La fonction nulle**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable, positive, telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f'(x) \leqslant f(x)$.
En considérant la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} f(x)$, montrer que f est la fonction nulle.

Étude de fonctions

118 Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln x}} \qquad x \mapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}} \qquad x \mapsto \ln\left(\tan \frac{x\pi}{2}\right)$$

119 Une fonction bijective

Soit $f : x \mapsto x^2 + \ln x$ définie sur $I =]0, +\infty[$.

1. Donner (sans faire de calcul) les variations de f.
2. Montrer que f induit une bijection de I sur un ensemble J à préciser, que l'on notera $\widehat{f}$.
3. Montrer que $\widehat{f}^{-1} : J \to I$ est dérivable.

120 Dérivez deux fois !

Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (x-2)\mathrm{e}^x + (x+2)$ est positive.

121 Une équation différentielle

Soit $f : x \mapsto \sqrt{\sqrt{x^2+1} - x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Montrer que f dérivable sur $\mathcal{D}$ et déterminer f'.
3. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$.
4. Montrer que :
$$\forall x \in \mathcal{D},\ 4(x^2+1)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0$$

Petits DM

122 Une fonction stylée

Soit f la fonction définie par $f(x) = \exp\left(\dfrac{\ln\left(\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}\right)}{\ln|2\cos x|}\right)$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f. Que peut-on en déduire sur l'ensemble d'étude de f ?
3. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{1-\sin 2x} = |\sin x - \cos x| \qquad \text{et} \qquad \sqrt{1+\sin 2x} = |\sin x + \cos x|$$
4. En déduire une expression plus simple de f sur $\mathcal{D} \cap [0, \frac{\pi}{2}]$ (on distinguera deux cas).

123 Une mini-pâle

Les deux questions sont indépendantes.

1. Étudier le signe, sur $[-1, +\infty[$, de la fonction f définie par :
$$\forall x \geqslant -1, \quad f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}.$$
2. (a) Pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, donner une expression de $\tan^{(n)}$ en fonction de $\tan$.

   (b) Montrer que la fonction $\tan$ est *absolument monotone* sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan^{(n)}(x) \geqslant 0.$$
   On pourra montrer que $\tan^{(n)}$ s'exprime sous la forme $P(\tan)$, où P est un polynôme à coefficients positifs.

124 Être ou ne pas être périodique...

On « rappelle » qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite périodique lorsqu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x+T) = \varphi(x).$$
On dit ainsi que φ est T-périodique.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$.

1. On suppose que α est un nombre rationnel que l'on écrit $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que f est périodique.
2. On suppose désormais que α est un nombre irrationnel ($\alpha \notin \mathbb{Q}$).
   (a) Montrer
$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \Big(a \leqslant 1 \text{ et } b \leqslant 1 \text{ et } a+b=2\Big) \implies \Big(a = 1 \text{ et } b = 1\Big).$$
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = 2$.
   (c) En déduire que f n'est pas périodique.
3. Qu'a-t-on démontré dans cet exercice ?

Fonctions réelles

corrigés

101

On a le système somme-différence suivant :

$$\begin{cases} \max(a,b)+\min(a,b)=a+b \\ \max(a,b)-\min(a,b)=|a-b| \end{cases}$$

Par somme et différence, on trouve

$$\max(a,b) \;=\; \frac{(a+b)+|a-b|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(a,b) \;=\; \frac{(a+b)-|a-b|}{2}$$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in [a, b]$.
Alors $a \leqslant x \leqslant b$, donc $x - a \geqslant 0$ et $x - b \leqslant 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} |x-a| + |x-b| &= (x-a) + (b-x) \\ &= b - a \\ &= |a-b| \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| + |x-b| = |a-b|$.
Cette égalité se réécrit

$$|x-a| + |b-x| = |(x-a) + (b-x)|$$

Il s'agit donc du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
Il y a deux cas

— $b - x = 0$, auquel cas $x = b$ et alors $x \in [a, b]$

— $b - x \neq 0$ et alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $x - a = \lambda(b - x)$.
On a alors $x = \dfrac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$.
Il s'agit de montrer que $x \in [a, b]$.
On peut démontrer à la main les deux inégalités suivantes :

$$a \leqslant \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} \qquad \text{et} \qquad \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda} \leqslant b$$

ou encore remarquer que

$$x = \frac{(1+\lambda)a + \lambda(b-a)}{1+\lambda} = a + \frac{\lambda}{1+\lambda}(b-a)$$

avec $\dfrac{\lambda}{1+\lambda} \in [0, 1]$ car $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Ainsi $x \in [a, b]$ (voyez-vous pourquoi ?).

Mq $[a,b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| + |x-b| = |a-b| \}$

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in [a,b]$

Alors $a \leq x \leq b$, donc $x - a \geq 0$

$x - b \leq 0$

On a

$$\begin{aligned} |x-a| + |x-b| &= (x-a) + (b-x) \\ &= b-a \\ &= |a-b| \quad \text{car } a \leq b. \end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $|x-a| + |x-b| = |a-b|$

On a

$$\underbrace{|x-a|}_{\geq 0} + \underbrace{|x-b|}_{\geq 0} = \underbrace{b-a}_{\geq 0} \quad \text{car } a \leq b$$

- Donc :

$$|x-b| \leq b-a$$

d'où $a-b \leq x-b \leq b-a$

d'où $a \leq x \leq 2b-a$

a fortiori $a \leq x$

- On a aussi :

$$|x-a| \leq b-a$$

d'où $a-b \leq x-a \leq b-a$

d'où $x \leq b$

- Ainsi $a \leq x \leq b$ donc $x \in [a,b]$.

d'après Jean-Baptiste Fournier

2022-2023

(i) Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$.
On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} &\iff 2\sqrt{ab} \leqslant a+b \\
&\iff 0 \leqslant \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 \\
&\iff 0 \leqslant (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2
\end{aligned}$$

L'assertion finale est vraie donc l'assertion initiale aussi.

(ii) Soit $b, c \in \mathbb{R}$.
Montrons que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc)$.
Posons $f : x \mapsto x^2 - (b+c)x + (b^2 - bc + c^2)$.
Le discriminant de cette fonction polynomiale du second degré vaut

$$(b+c)^2 - 4(b^2 - bc + c^2) \;=\; -3b^2 + 6bc - 3c^2 \;=\; -3(b-c)^2$$

qui est négatif, donc f est de signe constant, du signe de son coefficient dominant.
Donc f est positive.

(iii) Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|} &\iff (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \leqslant |a-b| \\
&\iff a - 2\sqrt{ab} + b \leqslant |a-b| \\
&\iff \frac{(a+b) - |a-b|}{2} \leqslant \sqrt{ab} \\
&\iff \min(a,b) \leqslant \sqrt{ab} \\
&\iff \min(a,b)^2 \leqslant ab \qquad\qquad \text{car } a, b \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Rompons les équivalences.
On a

$$\begin{cases} 0 \leqslant \min(a,b) \leqslant a \\ 0 \leqslant \min(a,b) \leqslant b \end{cases}$$

Par produit d'inégalités positives, on en déduit

$$\min(a,b)^2 \leqslant ab$$

L'assertion finale des équivalences est donc vraie. Donc l'assertion initiale est également vraie.
Bilan général :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+, \quad |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leqslant \sqrt{|a-b|}$$

(iv) **Preuve de Émil Sarzynski (année 2022-2023, promo 2024).**
Après avoir décortiqué sa preuve, on obtient quelques lignes très élégantes.
On cherche à montrer que $8(a^4 + b^4) - (a+b)^4 \geqslant 0$.
On a l'égalité remarquable suivante :

$$(a+b)^4 + (a-b)^4 \;=\; 2\Big[a^4 + 6a^2b^2 + b^4\Big]$$

Ainsi, la différence $8(a^4 + b^4) - (a+b)^4$ vaut (en remplaçant $(a+b)^4$ avec l'expression précédente) :

$$\begin{aligned}
8(a^4 + b^4) - (a+b)^4 &= 8(a^4 + b^4) - 2\Big[a^4 + 6a^2b^2 + b^4\Big] + (a-b)^4 \\
&= 6(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) + (a-b)^4 \\
&= 6(a^2 - b^2)^2 + (a-b)^4
\end{aligned}$$

Et cette dernière expression est bien entendu positive (somme de carrés).

Preuve standard (faisable et trouvable par tous). Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$.

— Cas $b = 0$. L'inégalité à montrer est triviale.

— Cas $b \neq 0$. L'inégalité à montrer est alors équivalente à

$$\frac{1}{b^4}(a+b)^4 \leqslant \frac{1}{b^4} 8(a^4+b^4)$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^4 \;\leqslant\; 8\left(\frac{a^4}{b^4}+1\right)$$

Montrons que $f : x \mapsto 8(x^4+1) - (x+1)^4$ est positive sur $\mathbb{R}$.
En développant, on trouve $f : x \mapsto 7x^4 - 4x^3 - 6x^2 - x + 7$.
Cette fonction f est 3 fois dérivable et on a :

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 28x^3 - 12x^2 - 12x - 4 \\ f''(x) &= 84x^2 - 24x - 12 \\ f'''(x) &= 12(14x - 2) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
Signe de $f'''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f''		$\searrow$	> 0	$\nearrow$	
signe de $f''(x)$		$+$		$+$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

On en déduit que f est positive.
Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x+1)^4 \leqslant 8(x^4+1)$$

En particulier, pour $x = \dfrac{b}{a}$, on a

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^4 \;\leqslant\; 8\left(\frac{a^4}{b^4}+1\right)$$

D'où $(a+b)^4 \leqslant 8(a^4+b^4)$.

Une remarque. Un élève (Baptiste) me fait astucieusement remarquer que si on garde l'expression initiale de f (sans développer), on trouve une expression très agréable de f' que l'on peut factoriser à l'aide de Bernoulli :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8(4x^3) - 4(x+1)^3 \\ &= 4\Big((2x)^3 - (x+1)^3\Big) \\ &= 4\Big(2x - (x+1)\Big)\Big((2x)^2 + (2x)(x+1) + (x+1)^2\Big) \\ &= 4(x-1)(7x^2 + 4x + 1) \end{aligned}$$

Comme le discriminant du polynôme de degré 2 est négatif, on obtient directement :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Montrons que pour tout $y \in [1,+\infty[$, il existe un unique $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$.

Soit $y \in [1,+\infty[$.

Analyse. Supposons qu'il existe $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$.
On a alors
$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = y$$
d'où en multipliant par 2, puis par x
$$x^2+1 = 2yx$$
d'où
$$x^2-2yx+1 = 0$$
d'où
$$x = y+\sqrt{y^2-1} \text{ ou } x = y-\sqrt{y^2-1}$$
Comme $y \in [1,+\infty[$, on a $y+\sqrt{y^2-1} \geqslant 1$ et $y+\sqrt{y^2-1} \leqslant 1$; de plus, ces deux réels sont égaux (ils valent 1) lorsque $y = 1$.
Comme $x \in [1,+\infty[$, on a nécessairement $x = y+\sqrt{y^2-1}$.
Bilan de l'analyse. Si x existe, alors il n'y a pas le choix, $x = y+\sqrt{y^2-1}$.

Synthèse. Posons $x = y+\sqrt{y^2-1}$. Vérifions que $x \in [1,+\infty[$ et $f(x) = y$.

- ⋆ On a $y \geqslant 1$ et $\sqrt{y^2-1} \geqslant 0$. Par somme $x \geqslant 1$.
- ⋆ On peut calculer par la brute force $f(x)$ et tomber sur y. Mais on peut aussi remonter les calculs de l'analyse : notre x est solution de $x^2-2yx+1 = 0$, d'où $x^2+1 = 2yx$, d'où en multipliant par $\frac{1}{x}$, on obtient $x+\dfrac{1}{x} = 2y$, puis $f(x) = y$.

Bilan. On a montré qu'il existe un unique $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$, à savoir $x = y+\sqrt{y^2-1}$.

Bilan général. Pour tout $y \in [1,+\infty[$, il existe un unique $x \in [1,+\infty[$ tel que $y = f(x)$, à savoir $x = y+\sqrt{y^2-1}$.
Autrement dit, l'application $g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bijective et
$$g^{-1} : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ y & \longmapsto & y+\sqrt{y^2-1} \end{array}$$

Une autre solution

On étudie les variations de la fonction f sur $[1,+\infty[$.
La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et on a
$$\forall\, x \in [1,+\infty[, \quad f'(x) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x^2}$$
On a le tableau suivant :

x	1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$+$	
Variations de f	1	$\nearrow$	$+\infty$

A la lecture de ce tableau, on constate que f induit une bijection g de $[1,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$:
$$g : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
Mais ce tableau ne donne pas l'expression de la fonction réciproque de g.
Allons-y pour la recherche de g^{-1}.
Soit $y \in [1,+\infty[$.

D'après l'étude précédente (le tableau de variations), on sait qu'il existe $x \in [1, +\infty[$ tel que $y = f(x)$.
On a alors
$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$$
d'où en multipliant par 2, puis par x
$$x^2 + 1 = 2yx$$
d'où
$$x^2 - 2yx + 1 = 0$$
d'où
$$x = y + \sqrt{y^2 - 1} \text{ ou } x = y - \sqrt{y^2 - 1}$$
Comme $y \in [1, +\infty[$, on a $y + \sqrt{y^2 - 1} \geqslant 1$ et $y + \sqrt{y^2 - 1} \leqslant 1$; de plus, ces deux réels sont égaux (ils valent 1) lorsque $y = 1$.
Comme $x \in [1, +\infty[$, on a nécessairement $x = y + \sqrt{y^2 - 1}$.
Ainsi, $x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ est l'unique antécédent de y par la fonction g.
Bilan :
$$\begin{array}{rccl} g^{-1}: & [1, +\infty[& \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & y & \longmapsto & y + \sqrt{y^2 - 1} \end{array}$$

109

1. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x).$$

La fonction $f+g$ est donc impaire.

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (fg)(x).$$

La fonction fg est donc paire.

2. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -(fg)(x).$$

La fonction fg est donc impaire.

— On ne peut rien dire en général de la somme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$$

  — La fonction $(f+g)$ sera donc paire si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - g(x) = f(x) + g(x),$$

  si et seulement si g est la fonction nulle.

  — De même $(f+g)$ sera donc impaire si et seulement si $f = 0$.

110

On montre que φ est $6T$-périodique. Je vous laisse faire la vérification.

114

Montrons que f est strictement décroissante.
Soit $x < y$. Montrons que $f(x) > f(y)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(x) \leqslant f(y)$.
Comme $f(x) \leqslant f(y)$, on a, par croissance de $f \circ f$:

$$f \circ f\big(f(x)\big) \leqslant f \circ f\big(f(y)\big)$$

Comme $x < y$, on a, par stricte décroissance de $f \circ f \circ f$:

$$f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(y)$$

Ces deux dernières inégalités centrées sont contradictoires.

115

Voici une solution élégante.
Supposons que f s'annule.
Il existe donc $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) = 0$. On a aussi $g(a) = 0$.

* $\star$ La décroissance de f implique que la fonction taux d'accroissement de f en a est négative :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

En effet, si $x \leqslant a$, alors $f(x) \geqslant f(a)$ et si $x \geqslant a$, alors $f(x) \leqslant f(a)$.

En utilisant le fait que $f(a) = 0$ et en multipliant par $x > 0$, on obtient

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} \leqslant 0$$

* $\star$ La coissance de g implique que la fonction taux d'accroissement de g en a est positive :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \geqslant 0$$

En utilisant le fait que $g(a) = 0$ et la définition de g, on obtient :

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} \geqslant 0$$

On obtient donc

$$\forall\, x \neq a, \quad \frac{xf(x)}{x - a} = 0$$

D'où

$$\forall\, x \neq a, \quad xf(x) = 0$$

Comme x est non nul, on obtient

$$\forall\, x \neq a, \quad f(x) = 0$$

De plus, $f(a) = 0$.
On obtient donc $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 0$.
Donc f est nulle.

118

On doit trouver

$]1, +\infty[$ $\qquad$ $]\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ $\qquad$ $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k,\ 2k+1[$

123

1. Étudions le signe de la fonction f sur $[-1,+\infty[$.

   — La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
   En effet,

   $$\begin{cases} x \mapsto x+1 \text{ est dérivable sur }]-1,+\infty[\text{ et à valeurs dans }]0,+\infty[\\ t \mapsto \sqrt{t} \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

   Par composition, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
   De plus, $x \mapsto -1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en tant que fonction polynomiale.
   Par somme, f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

   — On peut recommencer la même preuve que le point précédent en remplaçant le mot « dérivable » par le mot « indéfiniment dérivable », qui a le même sens que « de classe $\mathcal{C}^\infty$ ». Nous verrons cela plus tard dans l'année.

   — Soit $x \in]-1,+\infty[$. On a :

   $$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/2} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\,; \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4}\,; \\ f''(x) &= \frac{-1}{4}(1+x)^{-3/2} + \frac{1}{4}\,; \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \;\geqslant 0. \end{aligned}$$

   On remarque par ailleurs que

   $$f(0)=0, \quad f'(0)=0, \quad f''(0)=0.$$

   On en déduit le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $f^{(3)}(x)$	‖	$+$		$+$	
Variations de f''	‖	↗	0	↗	
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f'	‖	↘	0	↗	
signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
Variations de f		↗	0	↗	
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

   En particulier, nous pouvons répondre à la question initialement posée :

   $$\begin{cases} f \text{ est à valeurs strictement négatives sur } [-1,0[\\ f(0)=0 \\ f \text{ est à valeurs strictement positives sur }]0,+\infty[\end{cases}$$

(Remarque : notons au passage que $1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2$ est le polynôme de Taylor à l'ordre 2 au point 0, pour la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Un peu plus tard dans l'année, nous aurons d'autres façons de traiter cette question, à l'aide par exemple de la formule de Taylor avec reste-intégral.)

2. (a) D'après le cours, la fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition (qui est une réunion infinie d'intervalles).

   On écrira plus tard dans l'année que la fonction tangente est indéfiniment dérivable (ou encore de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur son ensemble de définition, ce qui permet de considérer les dérivées successives.

   D'après le cours, on a :

$$\begin{aligned}\tan^{(0)} &= \tan\,;\\ \tan^{(1)} &= \tan^2+1.\end{aligned}$$

   On poursuit le calcul en dérivant successivement, à l'aide de la formule de dérivation pour une composée de fonctions :

$$\begin{aligned}\tan^{(2)} &= (\tan^2+1)2\tan\\ &= 2\tan^3+2\tan\end{aligned}$$

   puis :

$$\begin{aligned}\tan^{(3)} &= 2(\tan^2+1)3\tan^2+2(\tan^2+1)\\ &= 6\tan^4+8\tan^2+2.\end{aligned}$$

   enfin :

$$\begin{aligned}\tan^{(4)} &= 6(\tan^2+1)4\tan^3+8(\tan^2+1)2\tan\\ &= (\tan^2+1)(24\tan^3+16\tan)\\ &= 24\tan^5+40\tan^3+16\tan\end{aligned}$$

   Bilan :

$$\begin{aligned}\tan^{(0)} &= \tan\,;\\ \tan^{(1)} &= \tan^2+1\,;\\ \tan^{(2)} &= 2\tan^3+2\tan\,;\\ \tan^{(3)} &= 6\tan^4+8\tan^2+2\,;\\ \tan^{(4)} &= 24\tan^5+40\tan^3+16\tan\end{aligned}$$

   (b) Au vu des calculs ci-dessus, on se propose de montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$, avec P_n un polynôme à coefficients entiers naturels.

   Notons $\mathcal{H}_n$:

   « il existe un polynôme P_n à coeffs. entiers naturels tel que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$ »

   Initialisation. On pose $P_0 = X$ qui est bien un polynôme à coefficients entiers naturels.
   On a $\tan^{(0)} = \tan = P_0(\tan)$, d'où $\mathcal{H}_0$.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$.
   Il existe donc un polynôme P_n à coeffs entiers naturels tel que $\tan^{(n)} = P_n(\tan)$.
   En dérivant cette égalité (ce qui se peut, car tout le monde est dérivable à l'envi), on obtient :

$$\tan^{(n+1)} = (1+\tan^2)P_n'(\tan).$$

   On pose $P_{n+1} = (1+X^2)P_n'$.
   - ⋆ P_{n+1} est un polynôme à coefficients entiers naturels.
   - ⋆ On a $\tan^{(n+1)} = P_{n+1}(tan)$.

   D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

   Bilan. On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{il existe un polynôme } P_n \text{ à coefficients entiers naturels tel que } \tan^{(n)} = P_n(\tan).$$

Prouvons maintenant que tan est absolument monotone.
Sachant que tan est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit aussitôt que $P_n(\tan)$ l'est aussi (car les coefficients de P_n sont positifs).
Donc $\tan^{(n)}$ est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Bilan général : $\boxed{\text{tan est absolument monotone.}}$