Fonctions usuelles

I Logarithme népérien et exponentielle 2
La fonction logarithme népérien
La fonction exponentielle
Limites de taux d'accroissement en 0
Logarithme et exponentielle en base quelconque

II Fonctions puissances 5
Puissance entière et puissance rationnelle
Puissance réelle quelconque

III Croissances comparées. 8

IV Fonctions circulaires et leurs réciproques 10
La fonction Arc tangente
La fonction Arc sinus
La fonction Arc cosinus

V Fonctions hyperboliques 16
Fonctions cosinus et sinus hyperboliques
Formulaire de trigonométrie hyperbolique

VI Fonctions à valeurs complexes 18
Dérivée d'une fonction complexe
Opérations sur les fonctions dérivables
Dérivée de e^f
Caractérisation des fonctions constantes
Dérivées successives

I. Logarithme népérien et exponentielle

On va d'abord construire la fonction logarithme népérien puis en déduire la construction de l'exponentielle.

La fonction logarithme népérien

1 **Définition.**
La fonction *logarithme népérien*, notée ln, est définie sur $]0,+\infty[$ comme étant l'unique primitive qui s'annule en 1 de la fonction inverse.

- **Remarque.** Par définition, la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2 **Proposition.** La fonction logarithme vérifie :

(i) $\forall\, a,b \in]0,+\infty[,\quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$

(ii) $\forall\, t \in]0,+\infty[,\quad \ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln t$

(iii) $\forall\, x,y \in]0,+\infty[,\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(iv) $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\quad \ln(x^n) = n\ln x$

3 **Proposition.**
La fonction logarithme népérien est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

- On a le tableau :

x	0		1		$+\infty$
ln	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

- **Preuve.** On aura besoin d'utiliser le théorème suivant :

  Théorème de la limite monotone pour les fonctions. *Toute fonction monotone sur un intervalle admet une limite (finie ou infinie) aux extrémités de cet intervalle.*

4 **Proposition (inégalité de concavité).**
On a

$$\forall\, x \in]-1,+\infty[,\quad \ln(1+x) \leqslant x$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

- **Remarque très importante.**
  L'inégalité précédente est une inégalité qui concerne la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.
  Elle fait intervenir la tangente au point d'abscisse 0.

  On peut la voir comme une inégalité concernant la fonction $t \mapsto \ln t$, et la tangente qui intervient est au point d'abscisse 1. On a :

$$\forall\, t \in]0,+\infty[,\quad \ln t \leqslant t-1$$

avec égalité si et seulement si $t = 1$.

La fonction exponentielle

5 **Définition.**
La fonction *exponentielle*, notée exp, est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.

6 **Proposition.**

— La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, vérifiant $\exp 0 = 1$.

— La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $\exp' = \exp$.

- On a le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
exp	0	↗	1	↗	$+\infty$

7 **Proposition.** La fonction exponentielle vérifie :

(i) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x+y) = \exp x \exp y$

(ii) $\forall\, t \in]0,+\infty[, \quad \exp(-t) = \dfrac{1}{\exp(t)}$

(iii) $\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

(iv) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(x)^n = \exp(nx)$

8 **Proposition (inégalité de convexité).**
On a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) \geqslant x+1$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

- **Remarque à lire.**
Soit $a \in \mathbb{R}$. On verra plus tard que le réel $\exp(a)$ peut être vu comme une somme *infinie* de nombres réels :

$$\mathrm{e}^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{4!}a^4 + \cdots + \frac{1}{n!}a^n + \cdots +$$

En particulier, le réel $\mathrm{e} = \exp(1) \approx 2{,}718281$ (irrationnel !) est une somme *infinie* de nombres *rationnels* :

$$\mathrm{e} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

Limites de taux d'accroissement en 0

9 **Proposition.** On a

$$\frac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

- **Remarque très importante.**

La première limite peut se retenir au voisinage de 1 sous la forme $\dfrac{\ln t}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} 1$.

Logarithme et exponentielle en base quelconque

10

Définition. Soit $a \in]0,+\infty[$ différent de 1.

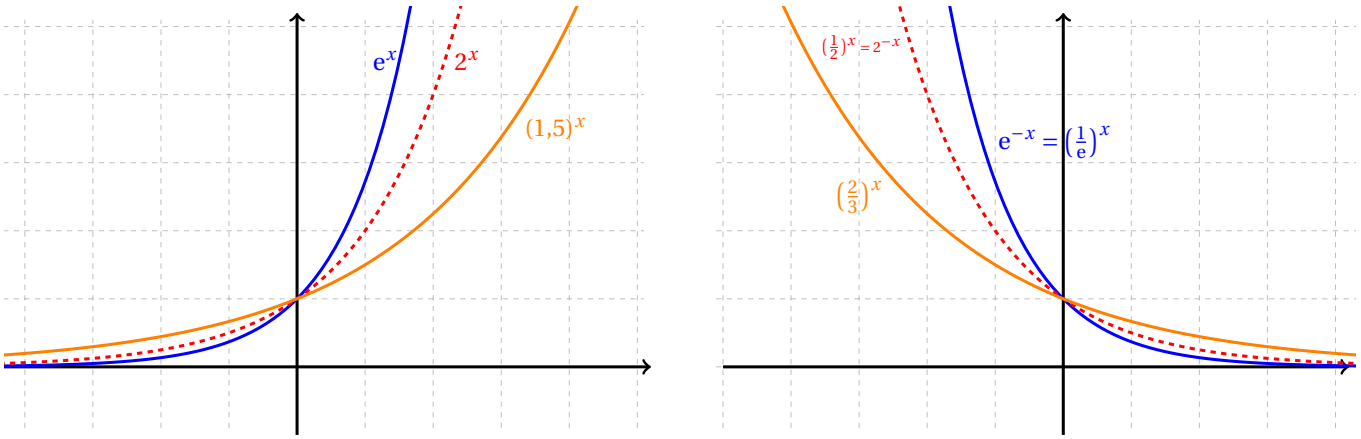
— On appelle logarithme de base a la fonction, notée $\log_a$, définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\log_a(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\ln x}{\ln a}$$

— On appelle exponentielle de base a la fonction, notée $\exp_a$ ou bien $a^\bullet$, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\exp_a(x) = a^x \overset{\text{def}}{=} \exp(x \ln a)$$

Voici la fonction exponentielle en base a.
À gauche, des $a > 1$ (avec $a = \frac{3}{2}\,;\,2\,;\,\mathrm{e}$) et à droite des $a < 1$ (avec $a = \frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}$)



11

Proposition.

• La fonction $\log_a : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\log_a' : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x} \end{array}$

• La fonction $\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp_a)' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln a\, a^x \end{array}$

II. Fonctions puissances

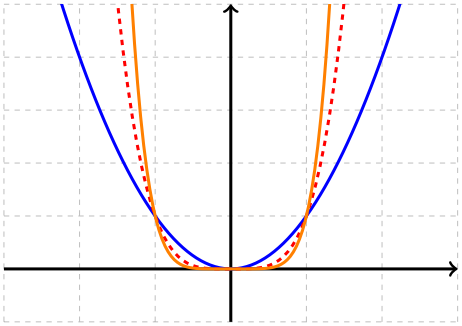
Puissance entière et puissance rationnelle

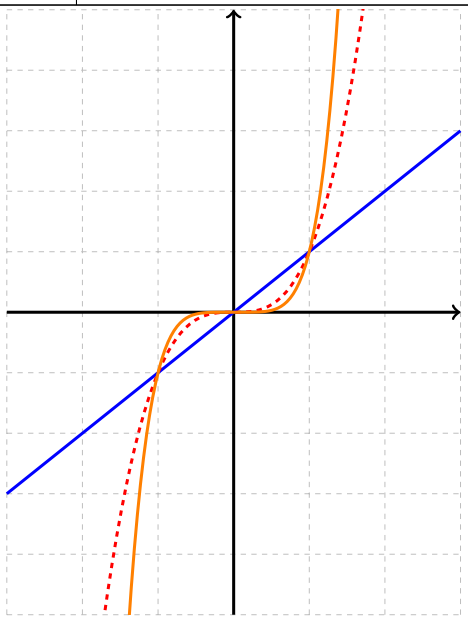
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction « puissance n » est définie par $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \end{array}$

En fonction de la parité de n, les variations sont :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^n n pair	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^n n impair	$-\infty$	↗	$+\infty$





12 **Proposition/Définition (fonction racine n-ième).**

Cas n pair

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est la fonction racine n-ième :

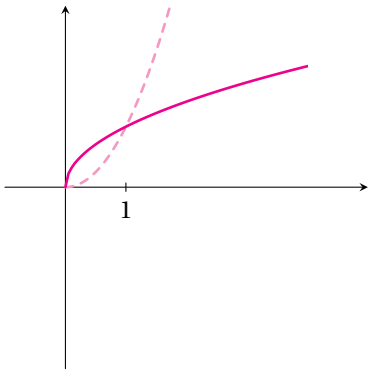
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & \sqrt[n]{t} = \text{l'unique } x \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } x^n = t \end{array}$$

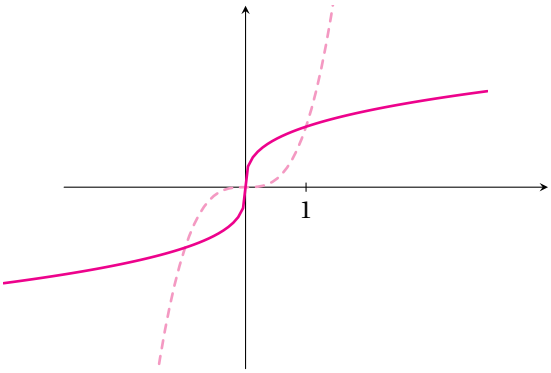
Cas n impair

La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$ est bijective.

Sa bijection réciproque est la fonction racine n-ième :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt[n]{t} = \text{l'unique } x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^n = t \end{array}$$





- **Rebelote.** Tout ce qui vient d'être raconté s'adapte à des puissances entières négatives. La seule chose à changer est l'ensemble de définition : il faut penser à retirer 0.

Puissance réelle quelconque

13 **Définition (puissance α, où α est un réel).**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction « puissance α » est définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\alpha : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

- **Remarque très importante.** Soit $n \in \mathbb{Z}$.
  La fonction $\begin{array}{rccc} \varphi_n : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(n\ln x) \end{array}$ est la restriction à $]0,+\infty[$ de la bonne vieille fonction « puissance n ».
  Autrement dit, $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \exp(n\ln x) = x^n$
  En effet, d'après la proposition ....., on a $\underbrace{\exp(n\ln x)}_{\varphi_n(x)} = \ldots$
- **Conséquence très importante.** D'après la remarque précédente (et pour d'autres raisons à venir), les mathématiciens ont décidé de noter x^α le réel $\varphi_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln x)$.
  À retenir :
  $$\exp(\alpha \ln x) \text{ est noté } x^\alpha \qquad\qquad x^\alpha \overset{\text{notation}}{=} \exp(\alpha \ln x)$$
- **Remarque idiote.** On a $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$ car $\ln\big(\exp(\alpha \ln x)\big) = \alpha \ln x$.
- **Question.**
  Pour quels x, la quantité x^3 est-elle définie ? Que vaut-elle ?

  Pour quels x, la quantité $\sqrt[4]{x}$ est-elle définie ? Que vaut-elle ?

  Pour quels x, la quantité $\sqrt[3]{x}$ est-elle définie ? Que vaut-elle ?

  Pour quels x, la quantité $x^{3,14}$ est-elle définie ? Que vaut-elle ?

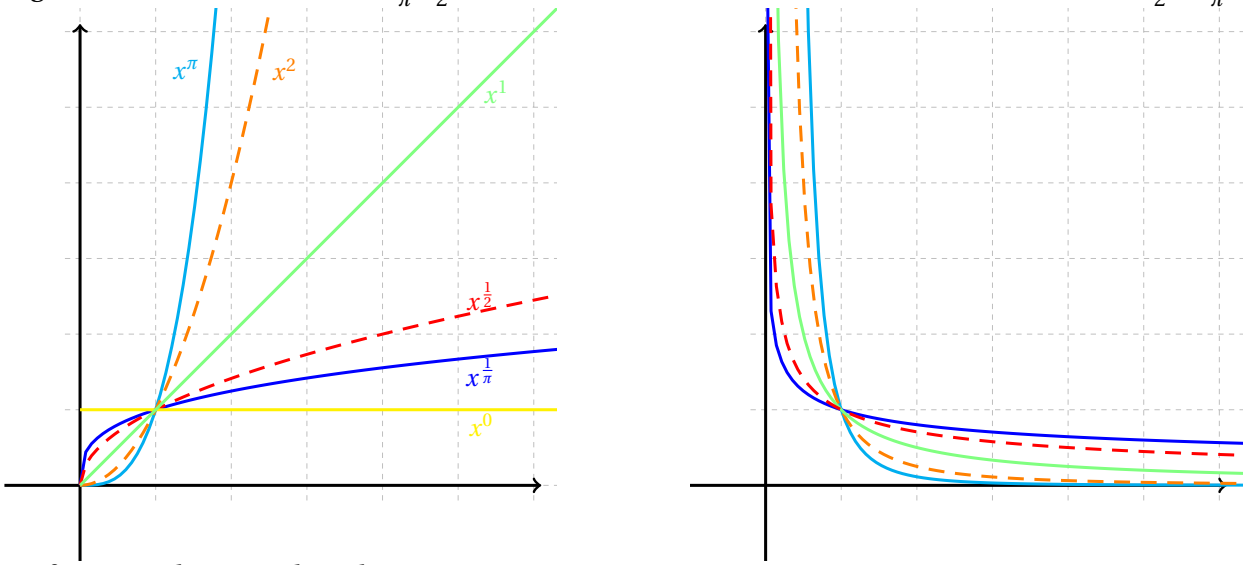
14 **Proposition à méditer.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction « puissance $\frac{1}{n}$ » $\begin{array}{rccc} &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \exp\left(\frac{1}{n}\ln x\right) \end{array}$ est la restriction à $]0,+\infty[$ de la bonne vieille fonction « racine n-ième ».
Autrement dit, $\forall\, x \in]0,+\infty[,\ \exp(\frac{1}{n}\ln x) = \sqrt[n]{x}$

- **À méditer très très très longtemps.** Avec la notation précédente, on a l'égalité :
  $$\forall\, x \in]0,+\infty[, \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$
  À gauche, le réel $x^{\frac{1}{n}}$ est défini pour $x > 0$ et il vaut $\exp(\frac{1}{n}\ln x)$.
  À droite, le réel $\sqrt[n]{x}$ est défini pour $\begin{cases} x \in \mathbb{R}^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ x \in \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ et vaut l'unique $t \in \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \text{si } n \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ tel que $t^n = x$.
- **Conséquence.** Pour tout $x > 0$, on a $\ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln x$.

15 **Question.** Sans effort, sans calcul, montrer et illustrer :
$$\forall\, x > 0, \quad \ln x \leqslant 2\sqrt{x} - 2$$

Des dessins

À gauche, des $\alpha > 0$ (avec $\alpha = \frac{1}{\pi}\,;\frac{1}{2}\,;1\,;2\,;\pi$) et à droite des $\alpha < 0$ (avec $\alpha = -\pi\,;-2\,;-1\,;-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{\pi}$)



En fonction du signe de α, les variations sont :

x	0	$+\infty$
x^α $\alpha > 0$	0 ↗	$+\infty$

x	0	$+\infty$
x^α $\alpha < 0$	$+\infty$ ↘	0

Les résultats ci-dessous confortent le bien fondé de la *notation* puissance, puisqu'ils généralisent les règles de calcul que l'on connaît déjà sur les puissances *entières*.

16 **Proposition (propriétés de la fonction puissance).**
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit $x, y \in]0,+\infty[$.

$$x^\alpha\, y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha\, x^\beta = x^{\alpha+\beta} \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \qquad 1^\alpha = 1$$

17 **Proposition (dérivée de la fonction puissance).**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction φ_α est dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'_\alpha(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}.$$

- **Remarque pertinente ?**
- **Réflexe.** Lorsque l'on voit « du x en bas et du x en haut », il est quasiment obligatoire de revenir à l'écriture exponentielle :

$$u(x)^{v(x)} = \exp\Big(v(x)\ln\big(u(x)\big)\Big)$$

- **Pour plus tard.** On a l'égalité remarquable (WHY ?)

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad (\ln n)^{\ln n} = n^{\ln(\ln n)}$$

18 **Question.** Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{\ln x}$.

19 **Question.** Étudier la fonction $f : x \mapsto x^x$.

III. Croissances comparées

20 **Proposition (puissance de x et logarithme, au voisinage de $+\infty$ et 0).**

— On a :

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

— Soit $\alpha, \beta > 0$. On a :

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x^\alpha |\ln x|^\beta \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

• **À comprendre.**

La valeur absolue est indispensable dans la seconde relation car la fonction logarithme est négative sur l'intervalle $]0,1]$.

Le résultat précédent ne traite que les cas $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans les autres cas :

— si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$, on s'y ramène facilement par passage à l'inverse,

— sinon, les opérations sur les limites permettent de conclure directement.

21 **Proposition (puissance de x et exponentielle, au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$).**

— On a :

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad x\mathrm{e}^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

— Soit $\alpha, \gamma > 0$. On a :

$$\frac{\mathrm{e}^{\gamma x}}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad |x|^\alpha \mathrm{e}^{\gamma x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

• **Remarque.** Avec l'exponentielle de base $a > 1$. On a :

$$\frac{a^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad xa^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Il suffit d'appliquer le deuxième point avec $\alpha = 1$ et $\gamma = \ldots$

22 **Question.** Déterminer la limite en $+\infty$ de $x^3\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$.

IV. Fonctions circulaires et leurs réciproques

La fonction Arc tangente

La restriction de la fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
En effet, la fonction $f = \tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$

— est injective, par stricte monotonie de f

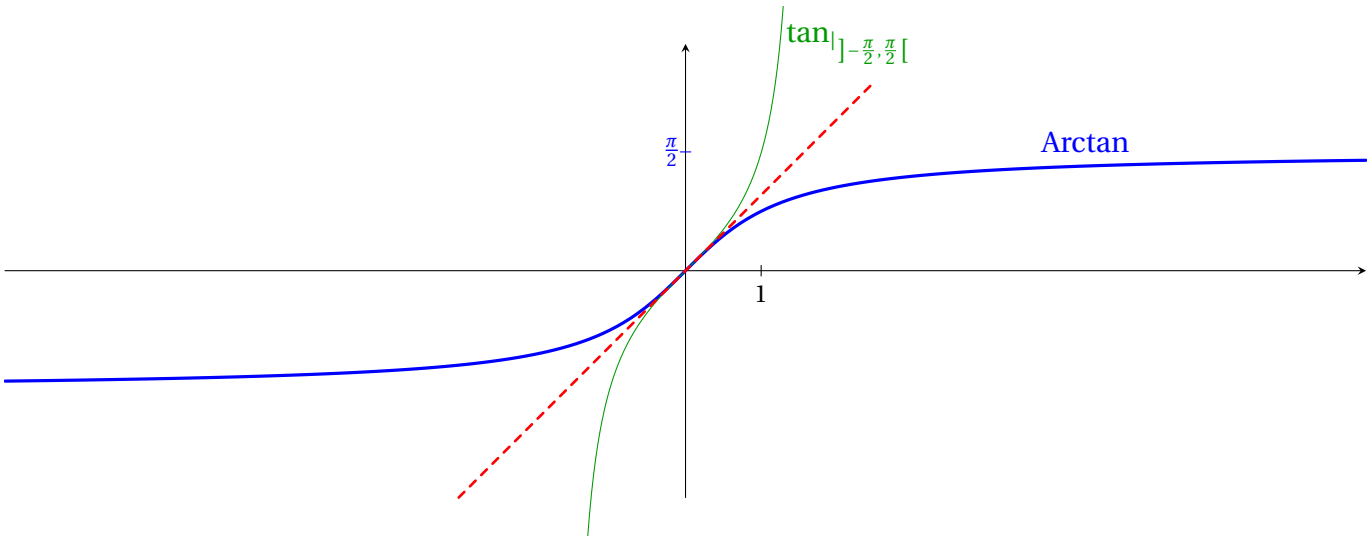
— a pour image $]-\infty, +\infty[$.

En effet, par continuité de f, le TVI affirme que l'ensemble $f\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$ est un intervalle.

Et les extrémités de cet intervalle sont $-\infty$ et $+\infty$.

23 **Définition.**
La fonction Arc tangente est la bijection réciproque de la fonction tangente restreinte à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Arctan}: &]-\infty,+\infty[& \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ tel que } \tan\theta = x \end{array}$$



- **Bonus.** La fonction Arc tangente est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est impaire.
- **Valeurs remarquables.** On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\text{Arctan}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- **Piège.** Que vaut $\text{Arctan}\left(\tan(\frac{2024\pi}{3})\right)$?
- **Attention.**
  On a
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\left(\text{Arctan}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \text{Arctan}\left(\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\theta\right) = \theta$$
  On a
  $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan\left(\text{Arctan}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \cancel{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}\left(\tan\theta\right) = \theta}$$
- **Dans la pratique.**
  Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence (c'est surtout l'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ qui est utilisée dans les exos) :
  $$\text{Arctan}\, x = \theta \iff \begin{cases} \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x = \tan\theta \end{cases}$$

24 **Question.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

25 **Proposition.**

— La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

— On a

$$\frac{\operatorname{Arctan} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

La courbe de la fonction Arc tangente admet une tangente au point $(0,0)$: c'est la droite ayant pour équation $y = x$.

— Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
La fonction $\operatorname{Arctan} \circ u$ est dérivable sur I et on a

$$(\operatorname{Arctan} \circ u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

26 **Question.** La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par opérations.

Sa dérivée vaut …
Qu'en déduire ?

La fonction Arc sinus

La restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
En effet, la fonction $f = \sin_{|\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$

— est injective, par stricte monotonie de f

— a pour image $[-1,1]$.

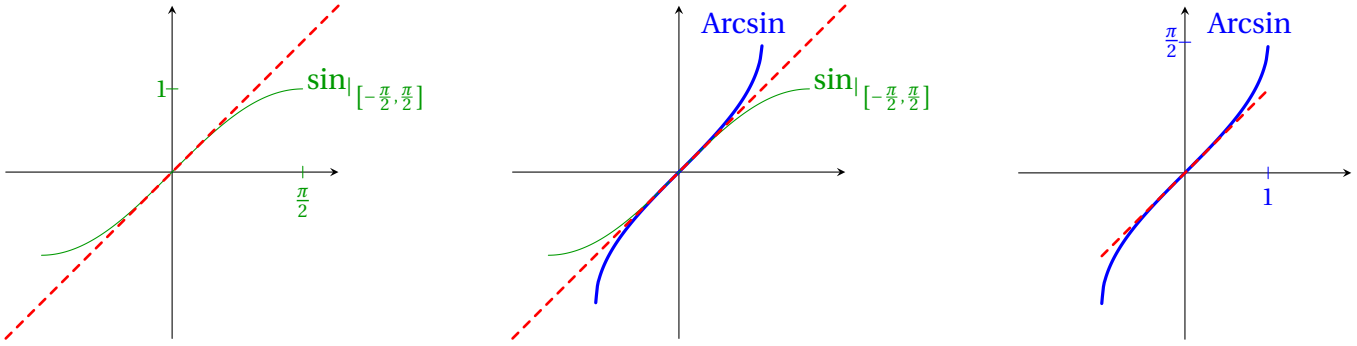
En effet, par continuité de f, le TVI affirme que l'ensemble $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ est un intervalle.

Et les extrémités de cet intervalle sont -1 et 1.

27

Définition.
La fonction Arc sinus est la bijection réciproque de la fonction sinus restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et corestreinte à $[-1,1]$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Arcsin}: & [-1,1] & \longrightarrow & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin\theta = x \end{array}$$



- **Bonus.** La fonction Arc sinus est strictement croissante et continue sur $[-1,1]$.
  De plus, elle est impaire.
- **Valeurs remarquables.** On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

- **Piège.** Que vaut $\text{Arcsin}\left(\sin(\frac{2024\pi}{3})\right)$?
- **Attention.** On a

$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\left(\text{Arcsin}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \text{Arcsin}\left(\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\theta\right) = \theta$$

On a

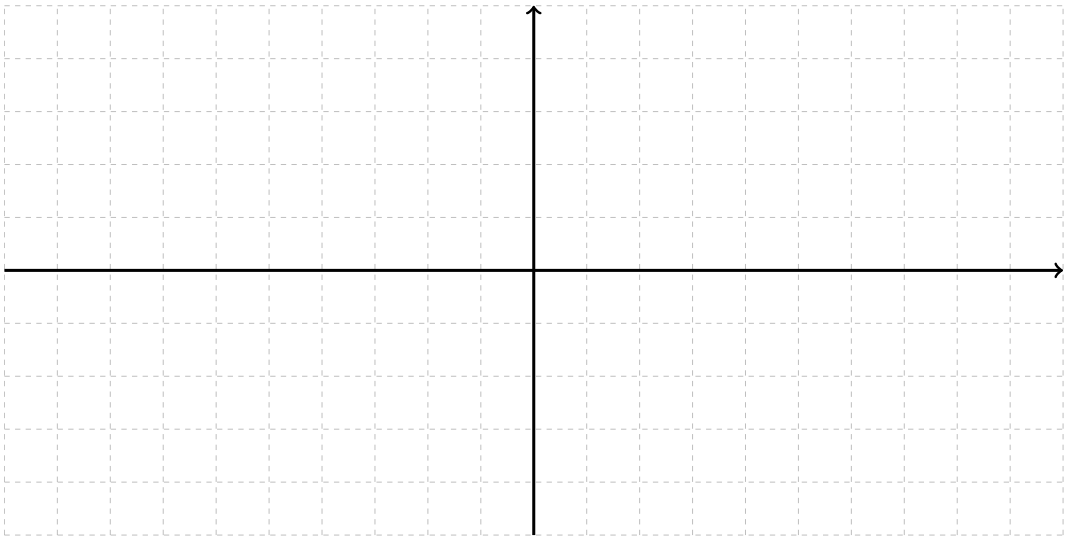
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin\left(\text{Arcsin}\, x\right) = x \qquad \text{et} \qquad \cancel{\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \text{Arcsin}\left(\sin\theta\right) = \theta}$$

- **Dans la pratique.**
  Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence (c'est surtout l'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ qui est utilisée dans les exos) :

$$\text{Arcsin}\, x = \theta \iff \begin{cases} \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x = \sin\theta \end{cases}$$

28 **Question.** Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$.

29 **Question.** Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f.
Pourquoi peut-on restreindre l'étude de f à $[0,\pi]$?
En déduire le graphe de f.
On peut montrer que la courbe de f admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ comme axe de symétrie.



30 **Proposition.**

- ⋆ La fonction Arcsin n'est pas dérivable en ± 1.
- ⋆ La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- ⋆ Soit $u : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ et dérivable.
  La fonction $\operatorname{Arcsin} \circ u$ est dérivable sur I et on a

$$(\operatorname{Arcsin} \circ u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

- La non-dérivabilité de Arcsin en ± 1 se lit sur la courbe : présence de tangente verticale.
- La dérivée de Arcsin est paire (la dérivée d'une fonction impaire, à savoir Arcsin, est paire).

La fonction Arc cosinus

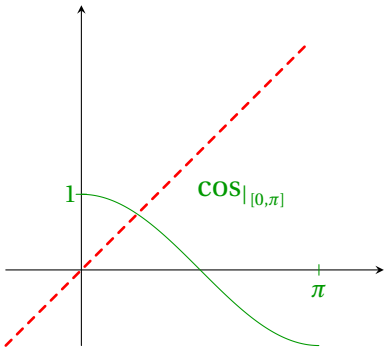
La restriction de la fonction cosinus à $[0,\pi]$ réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
En effet, la fonction $f = \cos_{|[0,\pi]}$

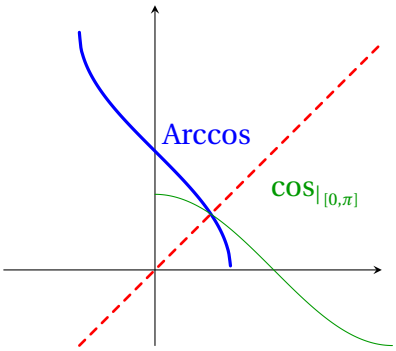
— est injective, par stricte monotonie de f

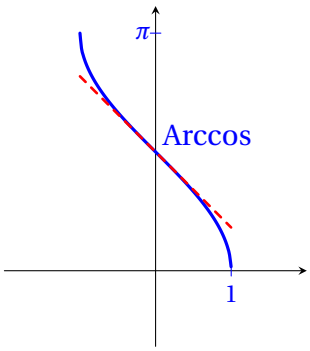
— a pour image $[-1,1]$.
En effet, par continuité de f, le TVI affirme que l'ensemble $f\big([0,\pi]\big)$ est un intervalle.
Et les extrémités de cet intervalle sont -1 et 1.

31 **Définition.**
La fonction Arc cosinus est la bijection réciproque de la fonction cosinus restreinte à $[0,\pi]$ et corestreinte à $[-1,1]$.
Autrement dit :

$$\begin{array}{rccl} \text{Arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } \theta \in [0,\pi] \text{ tel que } \cos\theta = x \end{array}$$







- **Bonus.** La fonction Arc cosinus est strictement décroissante et continue sur $[-1,1]$.
Elle n'a pas de parité. En revanche, sa courbe possède le point $(0,\frac{\pi}{2})$ comme centre de symétrie.
- **Valeurs remarquables.** On a

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arccos}\, x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- **Piège.** Que vaut $\text{Arccos}\big(\cos(\frac{2024\pi}{3})\big)$?
- **Attention.** On a

$$\forall\, x \in [-1,1],\quad \cos_{|[0,\pi]}\Big(\text{Arccos}\, x\Big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, \theta \in [0,\pi],\quad \text{Arccos}\Big(\cos_{|[0,\pi]}\theta\Big) = \theta$$

On a

$$\forall\, x \in [-1,1],\quad \cos\Big(\text{Arccos}\, x\Big) = x \qquad \text{et} \qquad \cancel{\forall\, \theta \in \mathbb{R},\quad \text{Arccos}\Big(\cos\theta\Big) = \theta}$$

- **Dans la pratique.**
Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence (c'est surtout l'implication $\boxed{\Longleftarrow}$ qui est utilisée dans les exos) :

$$\text{Arccos}\, x = \theta \iff \begin{cases} \theta \in [0,\pi] \\ x = \cos\theta \end{cases}$$

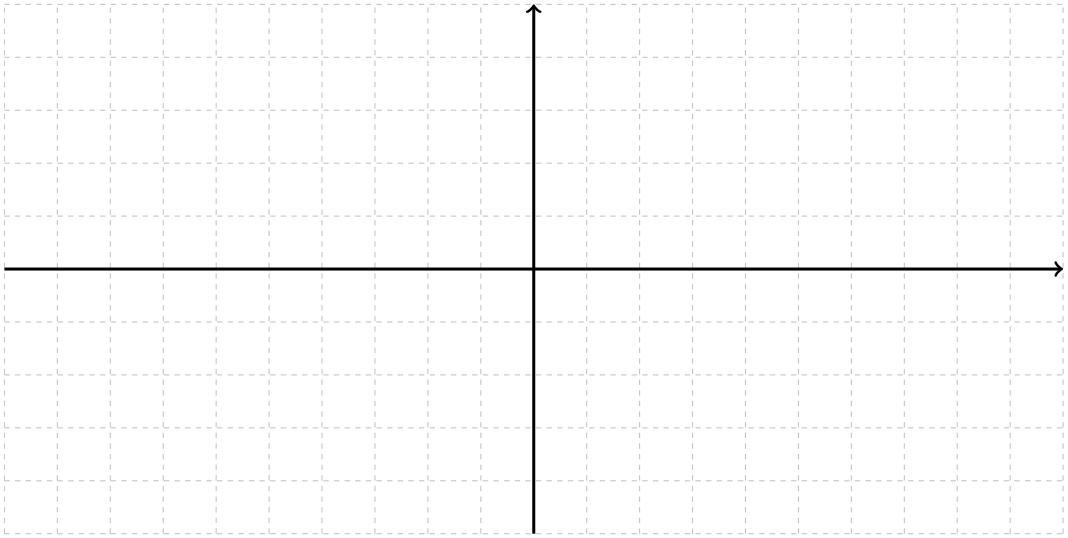
- **Une égalité.** On a $\quad \forall\, x \in [-1,1],\quad \sin(\text{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$.

32 **Question.** Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arccos}(-x) = \pi$. Conséquence sur la courbe de Arccos ?

33 sol → 21

Question. Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos x)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f.
Pourquoi peut-on restreindre l'étude de f à $[0,\pi]$?
En déduire le graphe de f.

Défi. Même si cela ne sert à rien dans la construction de la courbe, on peut montrer que la courbe de f admet le point d'abscisse $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ comme centre de symétrie.



34

Proposition.

- ⋆ La fonction Arccos n'est pas dérivable en ± 1.
- ⋆ La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- ⋆ Soit $u : I \to \mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ et dérivable.
  La fonction $\operatorname{Arccos} \circ u$ est dérivable sur I et on a

$$(\operatorname{Arccos} \circ u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

- La non-dérivabilité de Arccos en ± 1 se lit sur la courbe : présence de tangente verticale.
- La dérivée de Arccos n'a pas de parité.

V. Fonctions hyperboliques

Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Rappel. Toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

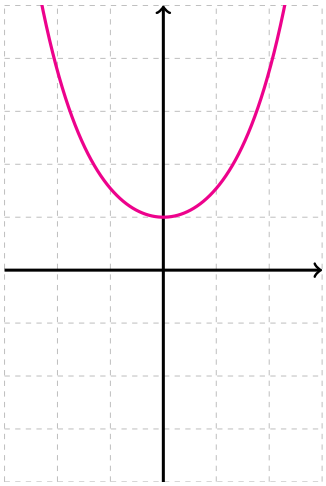
35 **Définition.**
Les fonctions *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* sont définies sur $\mathbb{R}$ par

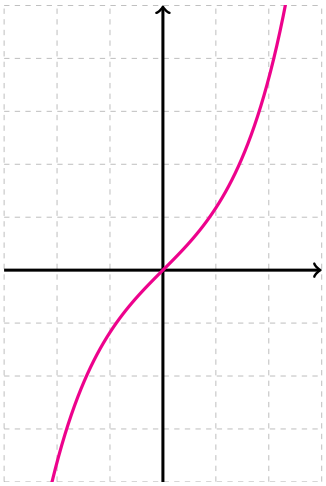
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ce sont respectivement les parties paires et impaires de la fonction exponentielle.

36 **Proposition.** Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$$





- On a les tableaux de variations

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
signe de $\operatorname{sh}'(x)$		$+$	
variations de sh	$-\infty$	↗	$+\infty$

- La stricte monotonie et la continuité de ces fonctions impliquent que :
  - la fonction cosinus hyperbolique induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$.
  - la fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

Formulaire de trigonométrie hyperbolique

37 **Proposition.** Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad e^{-t} = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \qquad \text{et} \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

VI. Fonctions à valeurs complexes

Ici I est un intervalle non trivial.
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ (c'est une *fonction de la variable réelle à valeurs complexes*).
Pour une telle fonction f, on définit alors les fonctions :

— *partie réelle de* f, notée $\operatorname{Re} f$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Re}\big(f(t)\big) \end{array}$

— *partie imaginaire de* f, notée $\operatorname{Im} f$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Im}\big(f(t)\big) \end{array}$

— *module de* f, notée $|f|$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \big|f(t)\big| \end{array}$

— *conjuguée de* f, notée $\overline{f}$, définie par $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \overline{f(t)} \end{array}$

En définissant l'opération + sur les fonctions complexes comme pour les fonctions réelles, on a

$$f = \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \operatorname{Im} f \qquad \text{et} \qquad |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = f\overline{f}$$

38 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
On dit que la fonction *complexe* f est bornée lorsque la fonction *réelle* « *module-de-f* » $|f|$ est bornée.

39 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
La fonction *complexe* f est bornée si et seulement si les fonctions *réelles* $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont bornées.

40 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : I \to \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si f et g sont bornées, alors $f+g$, fg, λf sont bornées.

Dérivée d'une fonction complexe

41 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$.
On dit que f est dérivable sur I lorsque les fonctions réelles $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont dérivables sur I.
Dans ce cas, la dérivée de f, notée f', est définie par

$$f' = (\operatorname{Re} f)' + \mathrm{i}\,(\operatorname{Im} f)'$$

- **Remarque.** Quand $f : I \to \mathbb{C}$ est dérivable, on a donc $\operatorname{Re}(f') = (\operatorname{Re} f)'$ et $\operatorname{Im}(f') = (\operatorname{Im} f)'$.
- **Fonctions polynomiales.** Soit f une fonction polynomiale à valeurs complexes, disons $f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$.
  Alors f est dérivable et $f' : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} k\alpha_k t^{k-1}$.
- **Le conjugué.**
  Soit f une fonction à valeurs complexes.
  Si f est dérivable, alors la fonction $\overline{f}$ est dérivable et on a $\overline{f}' = \overline{f'}$.
  En effet, …

Opérations sur les fonctions dérivables

42 **Proposition (opérations sur I).** Soit $f, g \in \mathbb{C}^I$. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
Si f et g sont dérivables sur I, alors :

- $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.
- pour $n \in \mathbb{Z}^{-*}$, si f ne s'annule pas sur I, la fonction f^n est dérivable sur I et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.
- si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$.
- si g ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

43 **Proposition.** Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $\varphi : I \to J$ une fonction *réelle* dérivable et $g : J \to \mathbb{C}$ une fonction *complexe* dérivable.
Alors la fonction complexe $g \circ \varphi$ est dérivable sur I et on a $(g \circ \varphi)' = (g' \circ \varphi) \times \varphi'$

44 **Question.**

Dérivée de e^f

45 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable.
Alors la fonction $e^f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{f(t)} \end{array}$ est dérivable sur I et $\left(e^f\right)' = f'e^f$.

- Pour la preuve, on ne peut pas appliquer la proposition précédente. WHY ?

46 **Proposition.** Soit $\omega \in \mathbb{C}$.
La fonction complexe $\psi_\omega : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{\omega t} \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\psi'_\omega = \omega \psi_\omega$.

47 **Question.** Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ et $\theta : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles dérivables sur I.
Montrer que la fonction complexe $f : t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$ est dérivable sur I et donner sa dérivée.

Caractérisation des fonctions constantes

48 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur l'*intervalle* I.
La fonction f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.

Dérivées successives

Même définition que pour les fonctions à valeurs réelles.

49 **Question.**
Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t-i} \end{array}$. Montrer que f est dérivable et donner sa dérivée.
Plus généralement, montrer que f est n-fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de $f^{(n)}$.

Fonctions usuelles

preuve et éléments de correction

33

Pour le centre de symétrie, il s'agit de montrer que

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(\frac{\pi}{2}+h)+f(\frac{\pi}{2}-h)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

c'est-à-dire

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-h\right) = \pi$$

c'est-à-dire

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos(\frac{\pi}{2}+h)\right)+\operatorname{Arccos}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-h)\right) = \pi$$

c'est-à-dire

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Arccos}(-\sin h)+\operatorname{Arccos}(\sin h) = \pi$$

ce qui est vérifié car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{Arccos}(x)+\operatorname{Arccos}(-x) = \pi$ (WHY?).