Nombres réels

I. Partie bornée, extremum

Dans tout ce cours, A désigne une partie de $\mathbb{R}$.

1 **Définition.**

— Le réel M est un *majorant de A* lorsque $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
Lorsqu'un tel réel existe, on dit que la partie A est majorée par M.

— Le réel m est un *minorant de A* lorsque $\forall x \in A,\ x \geqslant m$.
Lorsqu'un tel réel existe, on dit que la partie A est minorée par m.

- Le sous-ensemble vide de $\mathbb{R}$ est majoré et minoré par tout réel.
Rappelons en effet que toute assertion de la forme « $\forall x \in \emptyset,\ \mathscr{P}(x)$ » est vraie.
- **Notation de Piston III.** On notera dans ce cours $\mathit{Majorants}(A)$ l'ensemble des majorants de A. Cet ensemble est vide lorsque A n'est pas majorée.
- **Une évidence.**
Si M est un majorant de A, alors tout réel supérieur à M est également un majorant de A.

$$\forall M \in \mathit{Majorants}(A), \quad [M, +\infty[\ \subset\ \mathit{Majorants}(A)$$

2 **Définition.** On dit que :

— A est *majorée* lorsque A admet un majorant $\qquad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \leqslant M$

— A est *minorée* lorsque A admet un minorant $\qquad \exists m \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ a \geqslant m$

— A est *bornée* lorsque A est majorée et minorée

- **Reformulation.** On a
$$A \text{ bornée} \iff \exists K \in \mathbb{R},\ \forall a \in A,\ |a| \leqslant K$$
- **Exemples.** La partie $\mathbb{R}^+$ n'est pas majorée. La partie $\left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est bornée.

3 **Lemme.** Soit M et M' deux réels.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ M \in A \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M' \\ M' \in A \end{cases} \quad \text{alors } M = M'$$

4 **Définition.**

On dit que A possède un *maximum* lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M \\ M \in A \end{cases}$

autrement dit lorsque A possède un majorant appartenant à A

Dans ce cas, un tel M est nécessairement unique, et est noté $\max A$.

- **Terminologie.** On dit aussi parfois *plus grand élément* à la place de *maximum*.
- **Attention.** Une partie majorée n'admet pas nécessairement de maximum.
Penser à $A = \mathbb{R}^{-*}$ ou encore à $A = \left\{\frac{-1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.
- **Rebelote.** Tout ce qui vient d'être dit peut être répété en remplaçant *majorée* par *minorée*, et *maximum* par *minimum*.

II. Borne supérieure, borne inférieure

Définition et « propriété de la borne supérieure »

5 **Lemme.** Soit s et s' deux réels.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall a \in A, \ a \leqslant s \\ \forall M \in Majorants(A), \ s \leqslant M \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall a \in A, \ a \leqslant s' \\ \forall M \in Majorants(A), \ s' \leqslant M \end{cases} \quad \text{alors } s = s'$$

6 **Définition.**

On dit que A possède une *borne supérieure* lorsqu'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall a \in A, \ a \leqslant s \\ \forall M \in Majorants(A), \ s \leqslant M \end{cases}$

Dans ce cas, un tel s est nécessairement unique, et est noté $\sup A$.

- **Refrain.** On peut retenir la phrase suivante :

  Lorsqu'elle existe, la borne supérieure de A est le plus petit des majorants de A.

- **Reformulation.** Lorsque $\sup A$ existe, on a $\text{Majorants}(A) = [\sup A, +\infty[$.
- **Cas particulier.** Lorsque $A = \varnothing$, alors $Majorants(A) = \mathbb{R}$, donc l'ensemble $Majorants(A)$ n'a pas de plus petit élément. Donc $\varnothing$ ne possède pas de borne supérieure.
- **Cas particulier.** Lorsque $A = \mathbb{R}$, alors $Majorants(A) = \varnothing$, donc l'ensemble $Majorants(A)$ n'a pas de plus petit élément. Donc $\mathbb{R}$ ne possède pas de borne supérieure.
- **Exemple.**

  Soit $A = \mathbb{R}^{-*}$. Montrons que la borne supérieure de A existe et qu'elle vaut 0, autrement dit montrons que $\sup A = 0$.

  — Soit $a \in A = \mathbb{R}^{-*}$.
  Alors $a < 0$.
  A fortiori, $a \leqslant 0$.

  — Soit $M \in \text{Majorants}(A)$. Montrons que $0 \leqslant M$.
  Raisonnons par l'absurde et supposons $M < 0$.
  On a alors $\frac{M}{2} \in A$.
  Comme M est un majorant de A, on a alors $\frac{M}{2} \leqslant M$.
  D'où $M \geqslant 0$. Cela contredit le fait que $M < 0$.

On admet le théorème suivant, qui est la propriété fondatrice de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

7 **Théorème de la borne supérieure.**
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

- **Réflexe.** Quand on vous demande de montrer qu'un ensemble possède une borne supérieure, le théorème précédent doit être votre première idée !
- **Pour la culture.** L'équivalent de ce théorème pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est faux.
  Par exemple, l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ est non vide (il contient 0) et majoré (par 3, par exemple), mais il ne possède pas de borne supérieure *dans l'ensemble* $\mathbb{Q}$ *lui-même.*
  En revanche, une fois que l'on connaît l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, on peut constater que cet ensemble est $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ et on peut montrer que sa borne supérieure est $\sqrt{2}$.

  D'une certaine façon, c'est cette lacune de $\mathbb{Q}$ qui conduit à l'introduction des nombres réels : on a rajouté à $\mathbb{Q}$ toutes les bornes supérieures qui manquaient. On dit que $\mathbb{R}$ est la complétion de $\mathbb{Q}$ et cette idée est à la base de toutes les constructions rigoureuses de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. Ce faisant, on a ajouté des nombres plus difficiles à comprendre que les rationnels, mais on a obtenu un ensemble possédant de meilleures propriétés structurelles que $\mathbb{Q}$.

8 **Proposition (passage à la borne sup dans les inégalités larges).**
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a l'implication :

$$\left(\forall\, a \in A,\ a \leqslant x\right) \implies \sup A \leqslant x$$

- **Attention** aux inégalités strictes :

$$\cancel{\left(\forall\, a \in A,\ a < x\right) \implies \sup A < x}$$

Contre-exemple, $A = \dots$

- Mais on a :

$$\left(\forall\, a \in A,\ a < x\right) \implies \sup A \leqslant x$$

- **Contraposée.** Elle dit que :

$$x < \sup A \implies \exists\, a \in A,\ x \leqslant a$$

que l'on peut comprendre : « si $x < \sup A$, alors x n'est pas un majorant de A (sinon il serait $\geqslant$ au plus petit des majorants qui est $\sup A$) » ou encore $x < \sup A$ signifie $x \notin [\sup A, +\infty[= \text{Majorants}(A)$.

9 **Proposition (caractérisation epsilonesque de la borne sup).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Soit $s \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$s = \sup A \iff \begin{cases} s \text{ est un majorant de } A : & \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ s \text{ est le plus petit des majorants de } A : & \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon \leqslant a \end{cases}$$

- **Remarque.** Dans la caractérisation ci-dessus, il y a des inégalités larges partout.
Cependant on pourrait énoncer (look at l'inégalité stricte dans le second point) :

$$s = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon < a \end{cases}$$

Mais comme « on doit avoir des scrupules, lorsque l'on écrit des inégalités strictes », on préfère mettre du large ! C'est reposant pour la tête !
Évidemment, on doit prouver que cela ne change rien, autrement dit, je vous laisse prouver que :

$$\left(\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon < a\right) \overset{\text{WHY}}{\iff} \left(\forall\, \varepsilon' > 0,\ \exists\, a \in A,\ s - \varepsilon' \leqslant a\right)$$

Rappel. Pour $d \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :

$$\left(\forall\, \varepsilon > 0,\ d < \varepsilon\right) \iff \left(\forall\, \varepsilon' > 0,\ d \leqslant \varepsilon'\right)$$

— L'implication $\boxed{\implies}$ est automatique. Fixons $\varepsilon' > 0$.
On applique la prémisse à ε égal à ε'. On a alors $d < \varepsilon = \varepsilon'$. Donc $d \leqslant \varepsilon'$.

— L'implication $\boxed{\impliedby}$ est plus subtile. Fixons $\varepsilon > 0$.
On applique la prémisse à ε' égal à $\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $d \leqslant \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Donc $d < \varepsilon$.

- **Explication.**
Le deuxième point traduit le fait que « $s - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$ ».
En effet, $s - \varepsilon$ est un majorant de A s'écrit $\forall\, a \in A,\ a \leqslant s - \varepsilon$ et sa négation est bien ce qui est annoncé.

Ce deuxième point aurait pu encore s'écrire :

$$\forall x \in \left]-\infty, s\right[, \exists a \in A,\ x \leqslant a$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x < s \implies \exists a \in A,\ x \leqslant a$$

On retrouve une implication déjà énoncée précédemment. Où ?

- **Remarque.**
Quel que soit ε strictement positif, on peut trouver un élément $a \in A$ compris entre $\sup A - \varepsilon$ et $\sup A$.
Attention, il peut aussi exister des réels n'appartenant pas à A et compris entre $\sup A - \varepsilon$ et $\sup A$.

Borne supérieure versus maximum

Il y a une différence majeure entre les deux notions (voisines) de maximum et de borne supérieure.
Il n'y a pas de doute que le maximum est une notion plus facile à comprendre, mais qui a le grand défaut de n'exister que rarement.
L'idée à retenir est la suivante :

- le maximum, **qui n'existe que rarement**, est un majorant qui appartient à la partie considérée,
- la borne supérieure, **qui existe souvent**, est un majorant qui appartient « presque » à la partie considérée.

Essayons d'expliquer le « presque ».

Lorsque la borne supérieure existe, on a $\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ s - \varepsilon \leqslant a \end{cases}$

d'où $\begin{cases} \forall a \in A,\ 0 \leqslant s - a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ s - a \leqslant \varepsilon \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \forall a \in A,\ 0 \leqslant s - a \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |s - a| \leqslant \varepsilon \end{cases}$

La condition $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ |s - a| \leqslant \varepsilon$ signifie que « s est arbitrairement proche de A », c'est-à-dire que « s est ε-proche d'un élément de A et ce, quel que soit $\varepsilon > 0$ ».

10 **Proposition (max VERSUS sup).**
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

- Si A admet un maximum, alors $\sup A = \max A$.
- Si $\sup A \in A$, alors $\sup A$ est le maximum de A.
- Si $\sup A \notin A$, alors A n'a pas de maximum.

- **Réflexe.** Pour montrer que $\max A$ existe, on peut
  - revenir à la définition $\begin{cases} A \text{ possède un majorant } M \\ M \in A \end{cases}$
  - ou bien, montrer que $\begin{cases} A \text{ est non vide et majorée} \\ \sup A \in A \end{cases}$

Borne inférieure

11 **Définition.**

On dit que A possède une *borne inférieure* lorsqu'il existe $i \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} \forall a \in A, \ i \leqslant a \\ \forall m \in Minorants(A), \ i \geqslant m \end{cases}$

Dans ce cas, un tel i est nécessairement unique, et est noté $\inf A$.

- **Refrain.** On peut retenir la phrase suivante :

  Lorsqu'elle existe, la borne inférieure de A est le plus grand des minorants de A.

- **Reformulation.** Lorsque $\inf A$ existe, on a $Minorants(A) = \,]-\infty, \inf A]$.
- **Cas particulier.** Lorsque $A = \varnothing$, alors $Minorants(A) = \mathbb{R}$, donc l'ensemble $Minorants(A)$ n'a pas de plus grand élément. Donc $\varnothing$ ne possède pas de borne inférieure.
- **Cas particulier.** Lorsque $A = \mathbb{R}$, alors $Minorants(A) = \varnothing$, donc l'ensemble $Minorants(A)$ n'a pas de plus grand élément. Donc $\mathbb{R}$ ne possède pas de borne inférieure.
- **Exemple.**

  Soit $A = \mathbb{R}^{+*}$. Montrons que la borne inférieure de A existe et qu'elle vaut 0, autrement dit montrons que $\inf A = 0$.

12 **Théorème (propriété de la borne inférieure).**
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Montrons comment on peut déduire ce théorème de son cousin germain.
On se donne A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et l'on note E l'ensemble des minorants de A.
On souhaite montrer que E admet un plus grand élément : autrement dit que $\max E$ existe.

— l'ensemble E est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (WHY)

— l'ensemble E est majoré (WHY)

— le réel $\sup E$ est bien défini (WHY)

— $\sup E$ est un minorant de A (WHY)

— $\max E$ existe (WHY)

13 **Proposition (passage à la borne inf dans les inégalités larges).**
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a l'implication :

$$\left(\forall a \in A, \ x \leqslant a\right) \implies x \leqslant \inf A$$

14 **Proposition (caractérisation epsilonesque de la borne inf).**
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. Soit $i \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence

$$i = \inf A \iff \begin{cases} i \text{ est un minorant de } A : & \forall a \in A, \ i \leqslant a \\ i \text{ est le plus grand des minorants de } A : & \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A, \ a < i + \varepsilon \end{cases}$$

15 **Proposition (min VERSUS inf).**
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

— Si A admet un minimum, alors $\inf A = \min A$.

— Si $\inf A \in A$, alors $\inf A$ est le minimum de A.

— Si $\inf A \notin A$, alors A n'a pas de minimum.

Généralisation

Lorsque A est une partie non majorée (qui est alors non vide, WHY ?) de $\mathbb{R}$, on convient que $\sup A = +\infty$.
Lorsque A est une partie non minorée (qui est alors non vide, WHY ?) de $\mathbb{R}$, on convient que $\inf A = -\infty$.

Avec cette généralisation, on observe alors que :

> *toute partie non vide de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que celle-ci est réelle si et seulement si la partie est majorée.*

Idem pour la borne inférieure.

Cette généralisation pourra parfois être utile dans certaines preuves, mais je vous conseille de ne pas trop l'utiliser en pale.

III. Intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in I, \quad x < y \implies [x, y] \subset I$$

- **Intervalles triviaux (2 types).** L'ensemble vide et les singletons sont des intervalles, appelés intervalles triviaux.
- **Intervalles non triviaux (9 types).**
  Un intervalle est dit non trivial s'il est non vide et non réduit à un point.
  Les intervalles suivants sont non triviaux :
  - un *segment* $[a, b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$;
  - un *intervalle ouvert* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, pour $a < b$;
  - un *intervalle semi-ouvert* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, pour $a < b$;
  - un *intervalle semi-ouvert* $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, pour $a < b$;
  - une *demi-droite fermée* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - une *demi-droite fermée* $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - une *demi-droite ouverte* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - une *demi-droite ouverte* $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - la *droite* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

On reconnaît que ces intervalles ont des propriétés différentes :
par exemple, $[a, b[$ est borné,
et vérifie $\min[a, b[= a$ et $\sup[a, b[= b$ (mais ce n'est pas un maximum).

16 **Théorème (classification des intervalles).**
Tout intervalle non trivial est de l'un des neuf types précédents.

Preuve. Soit I un intervalle non trivial.
En particulier I est non vide, et on peut donc considérer les bornes inférieure et supérieure généralisées de I.
Posons $a = \inf I$ et $b = \sup I$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Montrons les égalités du tableau ci-dessous. Il y a donc 9 cas à distinguer, et dans chaque cas, une égalité à montrer, ou encore une double inclusion.

	$b \in I$	$b \in \mathbb{R} \setminus I$	$b = +\infty$
$a \in I$	$I \overset{?}{=} [a, b]$	$I \overset{?}{=} [a, b[$	$I \overset{?}{=} [a, +\infty[$
$a \in \mathbb{R} \setminus I$	$I \overset{?}{=}]a, b]$	$I \overset{?}{=}]a, b[$	$I \overset{?}{=}]a, +\infty[$
$a = -\infty$	$I \overset{?}{=}]-\infty, b]$	$I \overset{?}{=}]-\infty, b[$	$I \overset{?}{=}]-\infty, +\infty[$

- Par définition de a et b, on obtient les inclusions $I \subset \ldots$.
- Pour conclure, il suffit de montrer les inclusions $\boxed{\supset}$.
  On va d'abord montrer l'inclusion $]a, b[\subset I$ et en fonction de l'appartenance de a et b à I, on aura alors

$$]a, b[\subset I\,, \quad]a, b] \subset I\,, \quad [a, b[\subset I\,, \quad [a, b] \subset I$$

  Soit $z \in]a, b[$. Montrons que $z \in I$.
  Distinguons deux cas :
  - si $b = +\infty$, alors I n'est pas majoré , donc z n'est pas un majorant de I.
  - si $b \in \mathbb{R}$, alors l'inégalité $z < b$ se réécrit $z \notin [\sup I, +\infty[$, donc z n'est pas un majorant de I.

  Dans les deux cas, on peut trouver $y \in I$ tel que $z < y$.
  De même, on montre que z n'est pas un minorant de I, donc on peut trouver $x \in I$ tel que $x < z$.
  On a ainsi $z \in [x, y]$.
  Comme $x \in I$ et $y \in I$ et que I est un intervalle, on a $[x, y] \subset I$.
  On en déduit que $z \in I$.

IV. Partie entière

Définition

17 **Définition.** Soit $x \in \mathbb{R}$.
La partie entière de x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On la note $\lfloor x \rfloor$.

- **Reformulation 1.** On a
$$\lfloor x \rfloor \;=\; \max\left\{k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x\right\}$$

- **Reformulation 2.** La partie entière de x est l'unique entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \leqslant x < m+1$.
Autrement dit :
$$\begin{cases} m \leqslant x < m+1 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \implies \lfloor x \rfloor = m$$

- **Reformulation 3.**
Si $x = \underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{r}_{\in [0,1[}$ alors $\lfloor x \rfloor = q$.

- **Justification de la définition.** La définition de la partie entière nécessite une justification (car on ne sait pas, *a priori*, que « le plus grand entier inférieur ou égal à x » existe).
Pour faire proprement cette justification, on utilise la proposition suivante.

18 **Proposition.**

— Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée (par un réel) admet un maximum.

— Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée (par un réel) admet un minimum.

— En particulier, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

- **Corollaire de cette proposition :** preuve de l'existence de la partie entière de x.
Notons $A_x = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$. Montrons que $\max A_x$ existe.

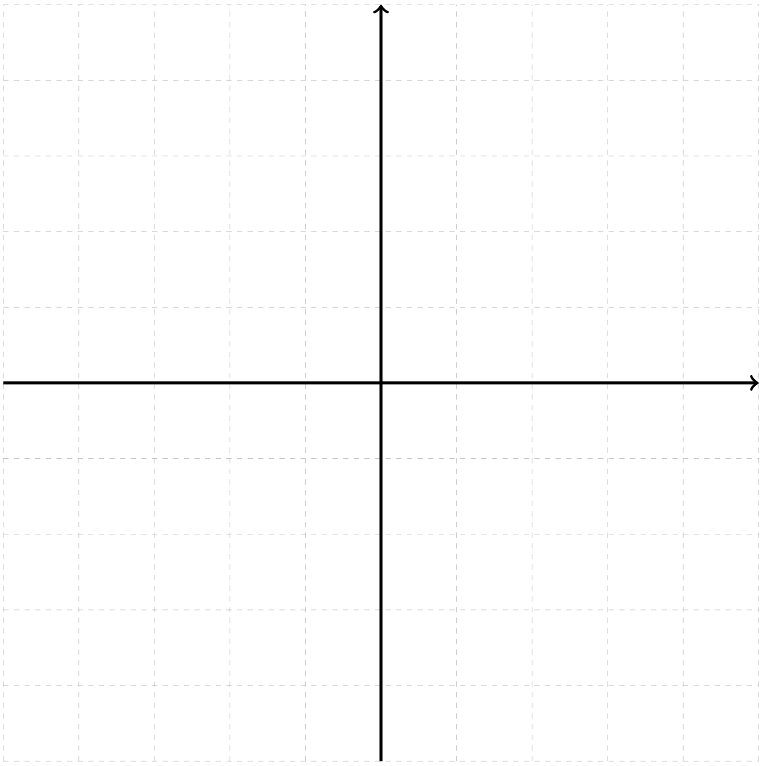
  — La partie A_x est une partie de $\mathbb{Z}$ (WHY).

  — La partie A_x est non vide (WHY).

  — La partie A_x est majorée (WHY).

Donc (WHY), la partie A_x admet un maximum.

19 **Proposition.** La fonction $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ est croissante, mais n'est pas strictement croissante.



20 **Proposition.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

— On a les encadrements :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

et

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$$

— On a

$$\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$$

— On a

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$$

- **Attention** $\cancel{\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor}$
- **Utile de temps en temps.** Soit $n \in \mathbb{Z}$.
  Le plus grand entier pair inférieur ou égal à n est ...

  Le plus grand entier impair inférieur ou égal à n est ...

21 **Question.** Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$p \leqslant x < q \implies p \leqslant \lfloor x \rfloor < q$$

22 **Question.** Soit n et k deux entiers de $\mathbb{Z}$.
Trouver un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que

$$2k < n \quad \iff \quad k \leqslant a$$

Un élève propose la solution suivante.

On a les équivalences :

$$\begin{aligned} 2k < n &\iff k < \frac{n}{2} \\ &\iff \lfloor k \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor && \textit{par croissance de la fonction partie entière} \\ &\iff k \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor && \textit{car k est un entier} \end{aligned}$$

L'entier $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ répond donc à la question.

Le prof lui répond :

Pour $n = 6$, on obtient $a = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 3$ et l'équivalence proposée ne fonctionne pas avec $k = 3$.

Où est l'erreur ? Proposez une solution.

23 **Proposition (caractère archimédien de $\mathbb{R}$).**

(i) Quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n > x$.

(ii) Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

(iii) (Axiome d'Archimède). Soit $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

- Une variante du point (i) : *Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n' \in \mathbb{Z}$ tel que $n' \geqslant x$.*
  En effet, prendre $n' = \ldots$
- L'entier $\lfloor x \rfloor + 1$ n'est pas en général le plus petit entier $\geqslant x$.
  Plus exactement il l'est, sauf si $x \in \mathbb{Z}$.
  Il peut être conceptuellement plus clair de donner un nom à ce plus petit entier $\geqslant x$, et on le qualifie de partie entière supérieure :

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

  En pratique, la partie entière (inférieure) $\lfloor x \rfloor$ suffira largement à nos besoins.

24 **Proposition (Division euclidienne dans $\mathbb{R}$).**
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $T \in]0, +\infty[$.

Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} x = qT + r \\ 0 \leqslant r < T. \end{cases}$

- Le réel r est l'unique élément de $[0, T[$ tel que $x \equiv r\ [T]$.
- Dans le cas particulier $T = 1$, le quotient est la partie entière $\lfloor x \rfloor$ et le reste est la partie fractionnaire $x - \lfloor x \rfloor$.

V. Compléments

Densité

25 **Définition.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, a \in A \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.
Autrement dit, A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque tout point de $\mathbb{R}$ est arbitrairement proche de points de A.

26 **Proposition.**
Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Principe de récurrence

27 **Proposition.** Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. *Principe de récurrence* : étant donné une assertion P portant sur les entiers naturels,
$$\text{si } \begin{cases} P(0) \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases} \quad \text{alors} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ P(n).$$
2. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

$\boxed{1. \implies 2.}$ Supposons le principe de récurrence vrai.
Soit A une partie de $\mathbb{N}$ n'admettant pas de plus petit élément. Montrons que A est vide.
Pour cela, montrons que tout entier naturel est un minorant de A (explication en fin de preuve).
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: « n est un minorant de A ».
On peut procéder par récurrence (car on a supposé le principe de récurrence vrai).

Initialisation. Comme $A \subset \mathbb{N}$, tous les éléments de A sont positifs. Donc 0 est un minorant de A.
D'où $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$.
D'après $P(n)$, l'entier n minore A.
On a $n \notin A$ sinon n serait le plus petit élément de A (et on a supposé que A n'admettait pas de plus petit élément).
Ainsi $\forall\, a \in A,\ n \leqslant a$ et $n \neq a$.
D'où $\forall\, a \in A,\ n+1 \leqslant a$.
D'où $P(n+1)$.

Bilan. Tout entier naturel est un minorant de A.

Donc A est vide : en effet, s'il existait $a_0 \in A$, tous les entiers naturels seraient des minorants de A donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \leqslant a_0$.
En particulier, pour $n = a_0 + 1$, on aurait une contradiction.

Donc toute partie *non vide* de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

$\boxed{2. \implies 1.}$
Supposons que toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément.
Soit P un prédicat portant sur les entiers naturels.
$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{cases}$$

Posons $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \ P(n) \text{ est fausse} \right\}$. Montrons que A est vide.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que A soit non vide.
En tant que partie de $\mathbb{N}$ non vide, A possède un plus petit élément n_0 d'après l'hypothèse.
Comme $P(0)$ est vraie, $0 \notin A$. Donc $n_0 \neq 0$ donc $n_0 \geqslant 1$.
On a alors $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin A$ (car n_0 est le plus petit élément de A).
Donc $P(n_0 - 1)$ est vraie.
D'après l'implication supposée, on en déduit que $P(n_0)$ est vraie donc que $n_0 \notin A$.
Ce qui contredit le fait que $n_0 \in A$.

Donc A est vide et ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Nombres réels

preuve et éléments de correction