

Suites numériques

exercices



Généralités

101 Un vrai ou faux pour des suites réelles

1. Une suite qui n'a pas de limite est bornée.
2. Si $u_n \rightarrow 0$ alors $u_n v_n \rightarrow 0$.
3. Si $u_n v_n \rightarrow 0$ alors $u_n \rightarrow 0$ ou $v_n \rightarrow 0$.
4. Si $u_n u_{n-1} \rightarrow 0$ alors $u_n \rightarrow 0$.
5. Si $u_n + u_{n+1} \rightarrow +\infty$ alors $u_n \rightarrow +\infty$.
6. Si (u_n) est strictement décroissante à termes positifs ou nuls, alors $u_n \rightarrow 0$.
7. Si $u_n > 0$ pour tout n , alors $nu_n \rightarrow +\infty$.
8. Si $u_n > 1$ pour tout n , alors $u_n^n \rightarrow +\infty$.
9. Si $(|u_n|)$ est convergente, alors (u_n) est convergente.
10. Si (u_n) est convergente, alors $(|u_n|)$ est convergente.
11. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n et si $u_n \rightarrow 0$ et $w_n \rightarrow 1$, alors $\lim v_n \in [0, 1]$.
12. Si $(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 0$, alors (u_n) est convergente.
13. Si (u_n) est convergente, alors $(u_{n+1} - u_n) \rightarrow 0$.
14. Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
15. Si $u_n \rightarrow +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.
16. Si $u_n \rightarrow +\infty$, alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

102 Suites à valeurs entières

Soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbb{Z} convergente.

Montrer, en utilisant la définition épsilonesque, que u est stationnaire.

Puis montrer que la limite de u est dans \mathbb{Z} .

103 Comparaison de deux suites

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

1. On suppose que (v_n) converge vers 0. Montrer que (u_n) converge aussi vers 0.
2. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de (v_n) ?

104 Deux situations amusantes

Soit u une suite réelle. Voici deux situations amusantes où l'on peut montrer que u converge
Les questions sont indépendantes

1. On suppose que u est croissante et que (u_{2n}) converge. Montrer que u converge.

2. On suppose que u vérifie $\forall n, p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}$

Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Des limites

105 Nature

Donner la nature des suites dont le terme général est :

$$a_n = \frac{\cos n}{n+1}$$

$$b_n = \sin\left(n^2 \frac{\pi}{3}\right)$$

$$c_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$$

$$d_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$$

$$e_n = \frac{e^n + n^2}{n^4 + 1}$$

$$f_n = \frac{\ln n + 1}{n + 4}$$

$$g_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

$$h_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$$

$$i_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$$

$$j_n = \frac{n!}{n^n}$$

106 Lemme de d'Alembert pour les suites

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que u est à termes strictement positifs et que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell$.

1. On suppose $\ell < 1$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$.
2. On suppose $\ell > 1$. Montrer que $u_n \rightarrow +\infty$.
3. Étudier le cas $\ell = 1$.

107 Puissance n , warning

Montrer les assertions suivantes.

- i) ~~$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]-1, 1[) \implies u_n^n \rightarrow 0$~~ mais $q \in]-1, 1[\implies q^n \rightarrow 0$
- ii) $u_n \rightarrow 0 \implies u_n^n \rightarrow 0$
- iii) $u_n \rightarrow \ell \in]-1, 1[\implies u_n^n \rightarrow 0$
- iv) ~~$u_n \rightarrow 1 \implies u_n^n \rightarrow 1$~~
- v) ~~$(\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1) \implies u_n^n \rightarrow +\infty$~~ mais $q > 1 \implies q^n \rightarrow +\infty$
- vi) $u_n \rightarrow \ell > 1 \implies u_n^n \rightarrow +\infty$

108 La suite C tend vers $\ln 2$

Soit $C_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

1. Rappeler une façon de montrer que (C_n) converge.
2. Montrer que $\forall x \in [0, 1[, \ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$.
3. En déduire que $C_n \rightarrow \ln 2$.

109 Cosinus et sinus!

Les questions sont indépendantes

1. Déterminer la limite de $u_n = (2 \sin(\frac{1}{n}) + \frac{3}{4} \cos n)^n$.
2. Montrer que la suite (x_n) définie par $x_n = \cos((n + \frac{1}{n})\pi)$ est divergente.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.
En déduire que la suite (s_n) de terme général $s_n = \sin((3 + \sqrt{5})^n \pi)$ converge et déterminer sa limite.

Suites récurrentes

110 Le retour de j

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et soit u la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_1 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$$

En une phrase, justifier que u est une suite réelle et déterminer une forme explicite pour u_n .

111 En passant au log...

Soit u définie par
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1}^a u_n^b \end{cases}$$
 avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $a + b < 1$.

Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

Que se passe-t-il si $a + b = 1$?

112 Suite récurrente linéaire d'ordre 2, mais affine (pas homogène)

Soit u définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n - 6 \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une suite constante $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n - 6$.
On note c cette constante.
2. On considère la suite v de terme général $v_n = u_n - c$.
Montrer que v est une suite récurrente linéaire (homogène) d'ordre 2.
3. En déduire u_n en fonction de n .
4. Montrer que u admet une limite et la déterminer.

113 Suite récurrente d'ordre 1

Soit u définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$$

Montrer que la suite u est bien définie.

Montrer que u converge et déterminer sa limite.

.(1+n5v) t9 (n5v) z3jns zeb siofopom si teibut3 arporq nO

114 Une suite retard

Soit u définie par
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \end{cases}$$

1. Expliciter la fonction f_n pour que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f_n(u_n)$.
Calculer les premiers termes (disons u_2, u_3, u_4).
2. ** Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n - 3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n + 1})$$

3. En déduire que u est croissante, et donner un équivalent de u_n .
4. Montrer qu'il existe a et b deux réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait :

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1 \right) \leq u_n - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{b}{n}} - 1 \right)$$

5. Déterminer un équivalent de $u_n - \sqrt{n}$.

115 Racines imbriquées

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$$

1. Établir une relation de récurrence pour la suite u .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n - 1}$.
3. Donner un équivalent de u_n (à l'aide de la relation de récurrence).

Suites implicites

116 Une première suite implicite

Soit u la suite dont le terme général u_n est l'unique réel $x \in [0, 1]$ tel que $x^n + x - 1 = 0$. Déterminer la nature de la suite u , puis le cas échéant sa limite.

117 Une deuxième suite implicite

Pour $n \geq 1$, notons f_n la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = \sum_{k=1}^n x^k - 1$$

1. Soit $n \geq 1$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une solution, notée u_n .
2. Calculer u_1 et montrer que $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \geq 2$.
3. Étudier la monotonie de u et donner la nature de u .
4. Déterminer $\lim u_n$.

On pourra commencer par montrer que la limite de u_n existe et ensuite transformer l'expression de u_n .

118 Une troisième suite implicite

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , notée x_n .
2. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite et la déterminer.
3. Montrer que $x_n \sim n$. Puis que $\ln x_n \sim \ln n$.
4. Donner un équivalent de $x_n - n$.

Avec deux suites !

119 Suites imbriquées

Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par

$$1 < x_0 < y_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < x_n < y_n$.
2. Étudier la monotonie de la suite y .
3. En déduire que la suite y converge. On note ℓ_y sa limite.
4. En considérant la suite $(\sqrt{x_n})$, montrer que la suite x converge. On note ℓ_x sa limite.
5. Montrer que $\ell_x = \sqrt{\ell_y}$ et $\ell_y = \sqrt{\ell_x}$.
6. En déduire ℓ_x et ℓ_y .

120 Moyenne arithmétique, moyenne géométrique

Soient a, b deux réels positifs. Soit u et v deux suites définies par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ convergent vers la même limite.

On peut aussi poser la question différemment (c'est un peu plus précis, d'ailleurs) : montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$, définies à partir du rang 1, sont adjacentes.

Dans cet exercice, on aura besoin de l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall x, y \geq 0, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

121**Irrationalité de e**Soit (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

1. Montrer que u et v convergent vers la même limite. On note e leur limite commune.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, n! u_n < n! e < n! u_n + \frac{1}{n}$. On fera attention aux inégalités strictes.
3. En utilisant un raisonnement par l'absurde, en déduire que e est un nombre irrationnel.

Suites complexes

122**Convergence ?**Étudier la nature de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n - 2\bar{u}_n)$.**123****Conjugué !**Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 3z_n - \bar{z}_n$. Déterminer une expression explicite du terme général z_n .**124****Suite géométrique et somme**Soit $z \in \mathbb{C}$. Étudier la convergence des suites $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=0}^n z^k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.**125****Joli !**Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Étudier la convergence de $\left(\prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et le cas échéant, déterminer sa limite.**126****Exponentielle complexe**Soit $z \in \mathbb{C}$.Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $|u_n| \rightarrow e^{\operatorname{Re}(z)}$.
2. Soit $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ un argument de $1 + \frac{z}{n}$. Montrer $\theta_n \rightarrow 0$ et $\theta_n \sim \frac{\operatorname{Im}(z)}{n}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Un peu d'analyse asymptotique

127**Vrai/Faux**Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant).

1. Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n - v_n \rightarrow 0$.
2. Si $u_n - v_n \rightarrow 0$ alors $u_n \sim v_n$.
3. Si $u_n \sim v_n$ alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
4. $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n = o(1)$.
5. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.
6. Si $u_n \sim v_n$ et $u_n \rightarrow +\infty$ alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

128 Classement

Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité.

- $n, n^2, n \ln n, \sqrt{n} \ln n, \frac{n}{\ln n}, \frac{n^2}{\ln n}$.
- $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{\ln n}{n}, \frac{\ln n}{n^2}, \frac{1}{\ln n}, \frac{1}{n \ln n}$.

129 En bas et en haut

Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \quad v_n = \sqrt[n]{n} \quad w_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \quad x_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \quad y_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

130 Fibonacci

On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Déterminer un équivalent simple de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

131 Équivalent simple

Déterminer un équivalent simple et la limite des suites données par les termes généraux suivants :

$$\begin{aligned} a_n &= (n + 3 \ln n) e^{-(n+1)} & e_n &= \frac{2n^3 - \ln n + 1}{n^2 + 1} \\ b_n &= \frac{\ln(n^2 + 1)}{n + 1} & f_n &= \frac{n! + e^n}{2^n + 3^n} \\ c_n &= \frac{\sqrt{n^2 + n + 1}}{\sqrt[3]{n^2 - n + 1}} & g_n &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \\ d_n &= \frac{n^3 - \sqrt{n^2 + 1}}{\ln n - 2n^2} & h_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \\ & & i_n &= \sqrt{\ln(n+1) - \ln(n)} \end{aligned}$$

132 Rapide ?

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

Montrer que $u_n \rightarrow 0$, déterminer le signe de u_n , et en donner un équivalent simple.

133 Un équivalent, cela peut servir à ça

On suppose que (nu_n) admet une limite.

Montrer que la suite (nu_{n+1}) admet la même limite.

134 Somme de parties entières

Soit $x \in \mathbb{R}$. Trouver une constante $C \in \mathbb{R}$ et un exposant $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{k=1}^n [kx] \sim Cn^\alpha$.

135 Une belle limite

- Soit $a > 0$.

Déterminer un équivalent simple de $\sqrt[n]{a}$. Même question avec $\ln(\sqrt[n]{a})$.

Et avec $\sqrt[n]{a} - 1$. On pourra utiliser que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Soit u une suite telle que $u_n \rightarrow 1$.

Montrer que $\ln u_n \sim u_n - 1$. On pourra utiliser que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$.

- Soit a, b strictement positifs.

Trouver une constante $C \in \mathbb{R}$ et un exposant $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\ln\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right) \sim Cn^\alpha$.

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$$

136 Qui l'emporte ?

On souhaite déterminer $\lim u_n$ où $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n!}$.

Commencer par déterminer $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis utiliser un lemme avec un joli nom.

Autres**137** Série alternée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle.

Montrer que la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ converge.

En déduire que la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ converge.

138 Difficile...

Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles convergeant respectivement vers α et β .

L'objectif est de montrer que la suite w de terme général $w_n = \frac{a_0 b_n + \dots + a_n b_0}{n+1}$ converge vers $\alpha\beta$.

1. Expliquer comment déduire de ce résultat le théorème de Cesàro.
2. Démontrer le théorème avec la définition epsilonlesque de la limite.

— Exploiter la convergence de (a_n) et (b_n) .

— Découper, à pcr, w_n en trois morceaux G_n, C_n, D_n puis montrer que

$$|w_n - \alpha\beta| \leq |G_n| + |C_n - \alpha\beta| + |D_n|$$

— Constater que $|G_n|$ et $|D_n|$ sont aussi petits que l'on veut.

— Découper $C_n - \alpha\beta$ en deux morceaux et montrer que ces morceaux sont aussi petits que l'on veut (pour le « premier » morceau, utiliser un jeu d'écriture comme celui utilisé dans la limite d'un produit, puis exploiter que les suites (a_n) et (b_n) sont bornées ; pour le « deuxième », montrer qu'il est du type $\frac{\text{cste}}{n+1}$).

139 Un exercice de Khôlle

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Montrer qu'elle converge.

140 $e^{in\theta}$

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos(n\theta)$ et $v_n = \sin(n\theta)$.

1. On suppose que $\frac{\theta}{2\pi}$ est rationnel.
 - (a) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont périodiques.
 - (b) En déduire que (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On suppose que $\frac{\theta}{2\pi}$ est irrationnel.
 - (a) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge.
Utiliser les formules de trigonométrie pour écrire $\cos((n+1)\theta)$.
 - (b) En déduire que (u_n) et (v_n) divergent.

141 Somme des inverses des coefficients binomiaux

Soit B la suite de terme général $B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{n}{k}}$. Montrer que la suite (B_n) converge.

142 Encore du cosinus et du sinus

Soit θ non congru à 0 modulo π . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \cos(n\theta)$ et $s_n = \sin(n\theta)$.

Montrer que $(c_n) \text{ CV} \iff (s_n) \text{ CV}$. En déduire que les deux suites divergent.

Suites numériques

corrigés

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{Z} . On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \rightarrow \ell$.

Remarquons qu'*a priori*, rien ne nous indique que $\ell \in \mathbb{Z}$ (ce sera en fait une conséquence importante de l'exercice).

On applique la définition de la limite à $\varepsilon = \frac{1}{3} > 0$.

On peut trouver un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{3}$.

Remarquons que cela entraîne en particulier $|u_N - \ell| \leq \frac{1}{3}$.

Soit $n \geq N$.

On a donc $|u_n - \ell|$ et $|u_N - \ell| \leq \frac{1}{3}$.

D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|u_n - u_N| \leq \frac{2}{3}$:

ainsi, les deux entiers u_n et u_N sont distants d'au plus $\frac{2}{3}$.

Comme deux entiers *distincts* ne sont jamais distants d'au plus $\frac{2}{3}$, les deux entiers u_n et u_N sont *égaux*.

On a donc montré

$$\forall n \geq N, u_n = u_N,$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

On en déduit que la limite de u vaut u_N et est donc dans \mathbb{Z} .

Variation de la preuve précédente.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{Z} .

On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \rightarrow \ell$.

Par opérations sur les limites, on a $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$.

On applique la définition de la limite à $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$.

Ainsi, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\forall n \geq N, u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Or $\mathbb{Z} \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = \{0\}$.

Donc $\forall n \geq N, u_{n+1} - u_n = 0$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Vous devez trouver :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{a+2b}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

On introduit $f : x \mapsto \sqrt{6-x}$. L'intervalle $[0, \sqrt{6}]$ est stable par f . En effet :

x	0	$\sqrt{6}$
Variations de f	$\sqrt{6}$	$\sqrt{6-\sqrt{6}} > 0$

L'intervalle $[0, \sqrt{6}]$ contient u_0 et est stable par f .

Donc, par récurrence immédiate, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0, \sqrt{6}]$.

En particulier, la suite u est bornée.

La fonction f est décroissante, donc $f \circ f$ est croissante.

Par conséquent, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (récurrence immédiate pour la monotonie de (u_{2n}) , puis sans récurrence on obtient la monotonie de (u_{2n+1})).

De plus, elles sont bornées.

D'après le théorème de la limite monotone, elles convergent.

Pour l'instant, on ne sait pas encore que u converge.

On sait simplement que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.

Notons $a = \lim u_{2n}$ et $b = \lim u_{2n+1}$.

D'après le cours, on sait que u converge si et seulement si $a = b$.

Pour cela, examinons $b - a$ et regardons si ce réel est nul ou pas.

On a $u_{2n+1} = f(u_{2n})$ et $u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$.

D'où $b = f(a)$ et $a = f(b)$.

D'où $b - a = f(a) - f(b)$, ce qui s'écrit

$$b - a = \sqrt{6-a} - \sqrt{6-b} = \frac{(6-a) - (6-b)}{\sqrt{6-a} + \sqrt{6-b}} = \frac{b-a}{\sqrt{6-a} + \sqrt{6-b}}$$

D'où

$$(b-a) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{6-a} + \sqrt{6-b}} \right) = 0$$

Montrons que la parenthèse est non nulle. Raisonnons par l'absurde. Supposons que

$$1 = \frac{1}{\sqrt{6-a} + \sqrt{6-b}} \quad \text{d'où} \quad 1 = \sqrt{6-a} + \sqrt{6-b}$$

Or $\sqrt{6-a} + \sqrt{6-b} \geq \sqrt{6-a} \geq \sqrt{6-\sqrt{6}} > 1$.

D'où la contradiction.

D'où $a = b$, c'est-à-dire $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1}$.

Donc (WHY), la suite u converge.

Par théorème, la suite u converge vers un point fixe de f , c'est-à-dire vers ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\sqrt{6-\ell} = \ell$.

On obtient (WHY?) $\ell = 2$.

1. On pose $f_n : x \mapsto 1 + \frac{n}{x}$ de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons \mathcal{H}_n

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$$

Initialisation. Pour $n = 1$, la double inégalité s'écrit

$$1 \leq u_1 \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Comme $u_1 = 1$ et que $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \geq \frac{1 + \sqrt{4}}{2} = \frac{3}{2}$, on en déduit que \mathcal{H}_1 est vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{H}_n . Montrons \mathcal{H}_{n+1} .

D'après \mathcal{H}_n , on a :

$$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$$

On passe à l'inverse, on multiplie par n , on ajoute 1

$$1 + \frac{2n}{1 + \sqrt{4n+1}} \leq 1 + \frac{n}{u_n} \leq 1 + \frac{2n}{1 + \sqrt{4n-3}}$$

Il n'y a plus qu'à croiser les doigts pour que

$$(G) \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}) \leq 1 + \frac{2n}{1 + \sqrt{4n+1}} \quad \text{et} \quad (D) \quad 1 + \frac{2n}{1 + \sqrt{4n-3}} \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+5})$$

Pour (G), on a les équivalences suivantes :

$$(G) \iff \sqrt{4n+1} \leq 1 + \frac{4n}{1 + \sqrt{4n+1}} \iff (\sqrt{4n+1}-1)(\sqrt{4n+1}+1) \leq 4n \iff (4n+1)-1 \leq 4n$$

L'assertion finale étant vraie, on en déduit que (G) est vraie.

Occupons-nous de (D). En posant $V = \sqrt{4n-3}$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2n}{1 + \sqrt{4n-3}} \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+5}) &\iff \frac{1 + \sqrt{4n-3} + 4n}{1 + \sqrt{4n-3}} \leq \sqrt{4n+5} \\ &\iff 4n + 1 + \sqrt{4n-3} \leq \sqrt{4n+5} (1 + \sqrt{4n-3}) \\ &\iff (4n + 1 + \sqrt{4n-3})^2 \leq \left(\sqrt{4n+5} (1 + \sqrt{4n-3}) \right)^2 \\ &\iff (4n + 1)^2 + 2(4n + 1)V + (4n - 3) \leq (4n + 5)(1 + 2V + 4n - 3) \\ &\iff 16n^2 + 12n - 2 + 2(4n + 1)V \leq 16n^2 + 12n - 10 + 2(4n + 5)V \\ &\iff -2 + 2V \leq -10 + 10V \\ &\iff 0 \leq -1 + V \\ &\iff 1 \leq 4n - 3 \\ &\iff 1 \leq n \end{aligned}$$

L'assertion finale étant vraie, on en déduit que (D) est vraie.

D'où \mathcal{H}_{n+1} .

3. • La double inégalité précédente s'écrit $v_n \leq u_n \leq v_{n+1}$.

Ainsi, on a $u_n \leq v_{n+1} \leq u_{n+1}$, d'où $u_n \leq u_{n+1}$.

- On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{n} \sqrt{1 - \frac{3}{4n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n} \sqrt{1 + \frac{1}{4n}}$$

En divisant par \sqrt{n} , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 - \frac{3}{4n}} \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4n}}$$

Le membre gauche et le membre droit tendent vers 1.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que

$$\lim \frac{u_n}{\sqrt{n}} = 1$$

4. En soustrayant \sqrt{n} à la double inégalité, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{n} \left(\sqrt{1 - \frac{3}{4n}} - 1 \right) \leq u_n - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} - 1 \right)$$

D'où $a = \frac{-3}{4}$ et $b = \frac{1}{4}$.

5. Reprenons la double inégalité précédente et examinons la limite des membres extrêmes.

On a

$$\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1 \right) = \sqrt{n} \times \frac{a \sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}} = \frac{a}{\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}}$$

On a

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{n} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+t} - 1}{t} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{d'où, par composition de limites, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1}{\frac{a}{n}} = \frac{1}{2}$$

De plus, $\lim \frac{a}{\sqrt{n}} = 0$. Par produit, on a $\lim \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{a}{n}} - 1 \right) = 0$.

Ainsi, le membre gauche de la double inégalité précédente converge vers $\frac{1}{2}$.

On montrerait de même que le membre droit converge vers $\frac{1}{2}$.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $(u_n - \sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Donc $u_n - \sqrt{n} \sim \frac{1}{2}$.

1. — La fonction f_n est continue (en tant que fonction polynomiale)
 — On a $f_n(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} f_n = +\infty$, donc 0 est une valeur intermédiaire entre $f_n(0)$ et $\lim_{+\infty} f_n$.

Avec ces deux points et le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il **existe** un zéro dans $[0, +\infty[$ pour la fonction f_n .

- De plus, f_n est strictement croissante (en tant que somme de fonctions strictement croissantes et d'une fonction constante égale à -1).

Cette stricte monotonie prouve l'**unicité** du zéro.

Bilan : on a montré qu'il **existe un unique** $u_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

2. \triangleright On a $f_1 : x \mapsto x - 1$. L'unique zéro de f_1 est 1, donc $u_1 = 1$.

\triangleright Montrons que $\forall n \geq 2, u_n \in]0, 1[$.

Soit $n \geq 2$. Pour bien comprendre la situation, voici ce que nous avons à notre disposition :

x	0	u_n	$+\infty$
Variations de f_n	-1	0	$+\infty$

Petit zoom sur $[0, 1]$ (on a $n - 1 > 0$, WHY ?)

x	0	u_n	1
Variations de f_n	-1	0	$n - 1$

Écrivons ce que nous voyons. On a

$$-1 < 0 < n - 1$$

ce qui s'écrit encore

$$f_n(0) < f_n(u_n) < f_n(1)$$

Par croissance (la stricte croissance n'est pas utile ici), on en déduit $0 < u_n < 1$ (en effet, si on avait $0 \geq u_n$, on aurait par croissance de f_n , l'inégalité $f_n(0) \geq f_n(u_n)$, ce qui n'est pas ; idem pour si on avait $u_n \geq 1$, etc.)

Si on avait eu la question suivante : montrer que $u_n \in [0, 1]$, voilà ce que nous aurions écrit.

On a

$$-1 \leq 0 \leq n - 1$$

ce qui s'écrit encore

$$f_n(0) \leq f_n(u_n) \leq f_n(1)$$

Par stricte croissance (la stricte croissance est utile ici), on en déduit $0 \leq u_n \leq 1$ (en effet, si on avait $0 > u_n$, on aurait par stricte croissance de f_n , l'inégalité $f_n(0) > f_n(u_n)$, ce qui n'est pas ; idem pour si on avait $u_n > 1$, etc.)

3. • Étudions la monotonie de u .

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.

Deux solutions possibles : étudier $f_n(u_{n+1})$ ou $f_{n+1}(u_n)$. Je rédige la seconde solution.

à retenir : Pour comparer u_n et u_{n+1} , on va comparer leur image par f_{n+1} qui est strictement croissante.

\triangleright Pour commencer, on cherche une relation entre f_{n+1} et f_n .

On a $f_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$, donc

$$\forall x, \quad f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x)$$

▷ On évalue la relation précédente en u_n , en utilisant que $f_n(u_n) = 0$.

On obtient

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + 0$$

▷ Cherchons à comparer $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, autrement dit à comparer u_n^{n+1} et 0.

D'après la question précédente, on a $u_n \geq 0$, d'où $u_n^{n+1} \geq 0$, ce qui s'écrit encore $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$.

Comme f_{n+1} est strictement croissante, on en déduit $u_n \geq u_{n+1}$ (en effet, si on avait $u_n < u_{n+1}$, on aurait, par stricte croissance de f_{n+1} , l'inégalité $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce qui n'est pas).

Bilan : la suite u est décroissante.

• La suite u est décroissante et minorée (par 0), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

4. ** D'après la question précédente, la suite u converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer.

Pour cela, commençons par montrer que $\lim u_n^n$ existe.

On a

$$\forall x \neq 1, \quad f_n(x) = x \frac{1-x^n}{1-x} - 1$$

Comme $u_n \neq 1$ pour $n \geq 2$, on a, en prenant $x = u_n$:

$$\forall n \geq 2, \quad 0 = u_n \frac{1-u_n^n}{1-u_n} - 1$$

On a envie de passer à la limite dans cette égalité ; ce n'est pas encore licite, car on ne sait pas si $\lim u_n^n$ existe.

Prouvons-le.

On a (WHY ?)

$$\forall n \geq 2, \quad 0 \leq u_n^n \leq u_2^n$$

Or $u_2 \in]-1, 1[$, donc $u_2^n \rightarrow 0$.

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $u_n^n \rightarrow 0$.

Reprenons ce que l'on voulait faire, qui est maintenant licite. On obtient (car $1 - \ell \neq 0$, WHY ?) :

$$0 = \ell \frac{1-0}{1-\ell} - 1$$

En résolvant cette équation d'inconnue ℓ , on trouve $\ell = \frac{1}{2}$.

1. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons \mathcal{H}_n :

$$1 < x_n < y_n$$

- \mathcal{H}_0 est vraie : c'est immédiat d'après l'énoncé.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{H}_n est vraie. Montrons \mathcal{H}_{n+1} .

D'après \mathcal{H}_n , on a $x_n > 1$ et $y_n > 1$.

$$\star \text{ On a donc } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{x_n}_{>1} + \underbrace{\sqrt{y_n}}_{>1} \right) > 1$$

★ On a

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{1}{2} \left((y_n - x_n) - (\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \right) = \frac{1}{2} \underbrace{(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n})}_{>0 \text{ cf. } \mathcal{H}_n} \left(\underbrace{(\sqrt{y_n} + \sqrt{x_n})}_{>1 \text{ cf. } \mathcal{H}_n} - 1 \right) > 0$$

Autre solution.

Remarquer que $t \mapsto t - \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $[\frac{1}{4}, +\infty[$, donc sur $]1, +\infty[$.

D'après \mathcal{H}_n , on a $1 < x_n < y_n$. Donc par stricte croissante, on a $x_n - \sqrt{x_n} < y_n - \sqrt{y_n}$. Et ainsi, $y_{n+1} - x_{n+1} > 0$.

BILAN : $1 < x_{n+1} < y_{n+1}$, donc \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, \mathcal{H}_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - y_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Comme } 1 < x_n, \text{ on a } \sqrt{x_n} < x_n. \\ \text{On a aussi } x_n < y_n. \end{array} \right\} \text{ Donc } \sqrt{x_n} < y_n$$

On a mq : $\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n < 0$, donc (y_n) est strictement décroissante.

3. La suite y est décroissante et minorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, la suite y converge.

4. Pour tout n , on a $\sqrt{x_n} = 2y_{n+1} - y_n$. La suite $(y_n)_{n \geq 0}$ converge (donc la suite $(y_{n+1})_{n \geq 0}$ aussi !). En tant que différence de deux suites convergentes, la suite $(\sqrt{x_n})_{n \geq 0}$ converge. Donc la suite (x_n) converge, par continuité de la fonction carré.
5. Les suites (x_n) et (y_n) convergent. On peut donc passer à la limite dans :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \ell_x = \frac{1}{2}(\ell_x + \sqrt{\ell_y}) \\ \ell_y = \frac{1}{2}(\ell_y + \sqrt{\ell_x}) \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x = \sqrt{\ell_y} \\ \ell_y = \sqrt{\ell_x} \end{cases}$$

6. Reprenons le résultat de la question précédente.

$$\begin{cases} \ell_x = \sqrt{\ell_y} \\ \ell_y = \sqrt{\ell_x} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x^2 = \ell_y \\ \ell_y^2 = \ell_x \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \ell_x^4 = \ell_x \\ \ell_y^4 = \ell_y \end{cases}$$

Rappel : l'équation $t^4 = t$ a deux solutions dans \mathbb{R} , qui sont 1 et 0 (preuve ?).

Pour tout n , on a $1 < x_n < y_n$.

Donc par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient $1 \leq \ell_x \leq \ell_y$.

Bilan : $\ell_x = 1$ et $\ell_y = 1$

Autre solution (très similaire).

On a $\ell_y = \sqrt{\ell_x}$.

En passant à la limite dans $1 < x_n < y_n$, on obtient alors $1 \leq \ell_x \leq \sqrt{\ell_x}$,

donc $1 \leq \sqrt{\ell_x} \leq \ell_x \leq \sqrt{\ell_x}$. Donc $\ell_x = \sqrt{\ell_x}$. Donc $\ell_x \in \{0; 1\}$.

Comme $1 \leq \ell_x$, on a forcément $\ell_x = 1$.

Il est clair que les suites u et v sont bien définies (on prend bien la racine-carrée d'un nombre positif ou nul).

- Commençons par prouver que $\forall n \geq 1, u_n \leq v_n$.

Soit $n \geq 1$.

En posant $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$, on voit que u_n est de la forme \sqrt{xy} et v_n est de la forme $\frac{x+y}{2}$.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a $u_n \leq v_n$.

- Montrons que $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Soit $n \geq 1$. Étudions la différence $u_{n+1} - u_n$.

On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$ qui est positif d'après le point précédent et le fait que la fonction racine-carrée est croissante.

- Montrons que $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Soit $n \geq 1$. Étudions la différence $v_{n+1} - v_n$.

On a $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$ qui est négatif d'après le premier point.

- On n'a pas encore montré que $\lim(u_n - v_n) = 0$, donc on ne peut pas encore dire que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.

Cependant, on peut reprendre les idées de la démonstration du théorème du cours qui dit que deux suites adjacentes convergent vers la même limite. Allons-y.

D'après les trois points précédents, on a

$$\forall n \geq 1, \quad u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$$

La suite u est croissante majorée (par v_1) donc converge (d'après le th de la limite monotone).

La suite v est décroissante minorée (par u_1) donc converge (d'après le th de la limite monotone).

- Montrons maintenant que u et v convergent vers la **même limite**.

Il faut regarder où l'on voit du $u_n - v_n$ dans ce qui précède.

Et bien, par exemple, dans le troisième point. On voit $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2}$.

Ainsi $u_n - v_n = 2(v_{n+1} - v_n)$. On passe à la limite dans cette égalité en utilisant que v converge. On en déduit que $\lim(u_n - v_n) = 0$.

- On a vu que u et v convergent et que $\lim(u_n - v_n) = 0$, donc u et v convergent vers la même limite.

1. Je vous laisse montrer que :

- La suite u est croissante.
 - La suite v est décroissante (ce n'est pas évident).
- Après calculs, vous devez trouver

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}$$

- On a $v_n - u_n \rightarrow 0$

Les suites u et v sont adjacentes donc convergent vers la même limite.

2. Les suites u et v sont adjacentes (avec u croissante). Leur limite commune e vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq e \leq v_n$$

Justifions que l'on peut obtenir des inégalités strictes.

Comme les suites u et v sont strictement monotones (WHY ?), on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < u_{n+1} \leq e \leq v_{n+1} < v_n$$

On obtient en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n < e < v_n$$

3. Supposons que e s'écrive $\frac{a}{b}$ avec $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! u_n < n! \frac{a}{b} < n! u_n + \frac{1}{n}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < n! \frac{a}{b} - n! u_n < \frac{1}{n}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n! u_n \in \mathbb{N}$ (il faut savoir justifier cette appartenance).

Particularisons n de sorte que $n! \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$, par exemple $n = b$.

Ainsi, pour cet entier n , on a $n! \frac{a}{b} - n! u_n \in \mathbb{Z} \cap]0, \frac{1}{n}[$.

Comme $\mathbb{Z} \cap]0, \frac{1}{n}[= \emptyset$, on obtient une contradiction.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par convergence des suites (a_n) et (b_n) , il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |a_n - \alpha| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |b_n - \beta| \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq n_0$, on coupe la somme définissant w_n en trois parties, en isolant les termes du type $a_k b_{n-k}$ pour lesquels simultanément $k \geq n_0$ et $n - k \geq n_0$.

On écrit donc :

$$w_n = \frac{a_0 b_n + \cdots + a_{n_0-1} b_{n-n_0+1}}{n+1} + \frac{a_{n-n_0+1} b_{n_0-1} + \cdots + a_n b_0}{n+1} + \frac{a_{n_0} b_{n-n_0} + a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} + \cdots + a_{n-n_0} b_{n_0}}{n+1}$$

On étudie séparément chaque terme G_n , D_n puis C_n .

Le numérateur de G_n est une somme de n_0 termes (donc le nombre de termes est indépendant de n) qui sont tous bornés : en effet, les suites (a_n) et (b_n) convergent donc sont bornées.

Le terme général G_n est donc du type $\frac{1}{n+1} \times$ borné.

Ainsi (G_n) est le produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0, donc (G_n) tend vers 0. Idem pour D_n .

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad |G_n| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |D_n| \leq \varepsilon.$$

C'est donc C_n qui doit être proche de $\alpha\beta$. On va s'inspirer de la preuve du fait que le produit de deux suites convergentes est convergent. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} C_n - \alpha\beta &= C_n - \frac{\alpha\beta + \cdots + \alpha\beta}{n+1} \\ &= \frac{(a_{n_0} b_{n-n_0} - \alpha\beta) + (a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} - \alpha\beta) + \cdots + (a_{n-n_0} b_{n_0} - \alpha\beta)}{n+1} - \frac{2n_0\alpha\beta}{n+1} \end{aligned}$$

Occupons-nous du premier terme. Les suites (a_n) et (b_n) convergent, donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $|a_n| \leq M$ et $|b_n| \leq M$. On a alors :

$$\forall k \in \llbracket n_0, n - n_0 \rrbracket, \quad |a_k b_{n-k} - \alpha\beta| \leq |a_k| |b_{n-k} - \beta| + |\beta| |a_k - \alpha| \leq 2M\varepsilon.$$

D'où

$$\frac{(a_{n_0} b_{n-n_0} - \alpha\beta) + (a_{n_0+1} b_{n-n_0-1} - \alpha\beta) + \cdots + (a_{n-n_0} b_{n_0} - \alpha\beta)}{n+1} \leq \frac{n - 2n_0 + 1}{n+1} \times 2M\varepsilon \leq 2M\varepsilon$$

Occupons-nous du deuxième terme. Il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq n_2, \quad \left| \frac{2n_0\alpha\beta}{n+1} \right| \leq \varepsilon$$

Par somme des deux termes, on a :

$$\forall n \geq n_2, \quad |C_n - \alpha\beta| \leq (2M + 1)\varepsilon$$

Résumons. Pour $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$, on a :

$$|w_n - \alpha\beta| \leq |G_n| + |C_n - \alpha\beta| + |D_n| \leq (2M + 3)\varepsilon.$$

Ceci prouve que (w_n) converge vers $\alpha\beta$

On va montrer « d'un seul coup d'un seul » que la suite B converge en attrapant même au passage sa limite !

Soit $n \in \mathbb{N}$ que l'on suppose supérieur à 2.

Posons $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

On a les inégalités suivantes sur les coefficients binomiaux (à montrer en exercice) :

$$\forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket, \binom{n}{k} \leq \binom{n}{k+1} \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket m+1, n \rrbracket, \binom{n}{j} \geq \binom{n}{j+1}$$

Pour la preuve, il sera judicieux d'écrire $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k}$.

Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 2, m \rrbracket, \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}} \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket m+1, n-2 \rrbracket, \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}} \quad \text{prendre } j = n-3$$

Ainsi,

$$\forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket, \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

Par somme, on a donc

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \frac{n-3}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}$$

On en déduit en particulier que $\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \rightarrow 0$ (WHY?).

Reprenons. On a

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right) + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \\ &= 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

Or $\frac{2}{n} \rightarrow 0$ et $\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \rightarrow 0$. Par opérations sur les limites, on en déduit que $B_n \rightarrow 2$.

Première partie de la question.

Supposons (c_n) convergente.

En utilisant la formule d'addition du cosinus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta$$

Comme $\theta \not\equiv 0[\pi]$, on a $\sin\theta \neq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \frac{1}{\sin\theta} (\cos\theta c_n - c_{n+1})$$

On voit ainsi que (s_n) est une combinaison linéaire de (c_n) et (c_{n+1}) toutes deux convergentes par hypothèse.

Ainsi, (s_n) est convergente.

L'implication $(s_n) \text{ CV} \implies (c_n) \text{ CV}$ se prouve de manière assez analogue en utilisant la formule d'addition du sinus.

Attention à cette preuve fausse.

Supposons $c_n \rightarrow \ell$. Comme le cosinus est compris entre -1 et 1 , on obtient que $\ell \in [-1, 1]$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, c_n^2 + s_n^2 = 1$, on a $s_n^2 \rightarrow 1 - \ell^2$. Comme $\ell \in [-1, 1]$, on a $1 - \ell^2 \in \mathbb{R}^+$.

Comme la racine carrée est continue en $1 - \ell^2 \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt{s_n^2} \rightarrow \sqrt{1 - \ell^2}$, d'où $|s_n| \rightarrow \sqrt{1 - \ell^2}$.

Hélas, on ne peut pas en déduire que la suite (s_n) converge.

On pourrait très bien avoir $s_n = (-1)^n \sqrt{1 - \ell^2}$ qui est le terme général d'une suite divergente.

Deuxième partie de la question.**Preuve 1 (avec des complexes).**

On raisonne par l'absurde en supposant NON (les deux suites divergent), c'est-à-dire « au moins une des deux suites converge ».

D'après la première partie de la question, on obtient la convergence des deux suites.

Ainsi, la suite complexe $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On rappelle le résultat de cours

$$(z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \iff |z| < 1 \text{ ou } z = 1$$

Posons $z = e^{i\theta}$ (donc $|z| = 1$). Comme $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, l'implication directe nous permet d'en déduire que $e^{i\theta} = 1$.

D'où $\theta \equiv 0 [2\pi]$.

D'où la contradiction car $\theta \not\equiv 0 [\pi]$.

Preuve 2 (en mode lycée).

Notons $a = \lim c_n$ et $b = \lim s_n$.

En écrivant c_{n+1} et s_{n+1} en fonction de c_n et s_n , on obtient après passage à la limite (et utilisation de Pythagore) :

$$\begin{cases} a &= a \cos\theta - b \sin\theta \\ b &= b \cos\theta + a \sin\theta \\ a^2 + b^2 &= 1 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} 0 &= a(\cos\theta - 1) - b \sin\theta \\ 0 &= b(\cos\theta - 1) + a \sin\theta \\ 1 &= a^2 + b^2 \end{cases}$$

Remarquons que les lignes L1 et L2 sont identiques après $a \leftrightarrow b$ et $\theta \leftrightarrow -\theta$.

Donc pour l'instant, je laisse tomber L2 et je ne garde que les lignes L1 et L3.

On a $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$.

La ligne L1 fournit après simplification par $-2 \sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ car $\theta \not\equiv 0 [\pi]$:

$$\begin{cases} 0 &= a \sin \frac{\theta}{2} + b \cos \frac{\theta}{2} \\ 1 &= a^2 + b^2 \end{cases}$$

Élevons L1 au carré et utilisons L3.

On a

$$0 = 1 + 2ab \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{d'où} \quad 0 = 1 + ab \sin\theta$$

De la même manière avec L_2 , on obtient $0 = 1 - ab \sin \theta$.

Résumons. On a

$$\begin{cases} 0 & = & 1 + ab \sin \theta \\ 0 & = & 1 - ab \sin \theta \end{cases}$$

Par somme, on obtient $0 = 2$, d'où la contradiction.