Applications linéaires

Algèbre linéaire, épisode 2

12c-AppLineaires.pdf, 15 décembre 2023, 9:59

I. Définitions, exemples

1 **Définition.** Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E \to F$ est dite *linéaire* lorsque

$$\forall\, v, w \in E, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \qquad f(\lambda v + \mu w) = \lambda f(v) + \mu f(w)$$

2 **Proposition (propriétés immédiates).**
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
Alors, on a :

— $f(0_E) = 0_F$

— $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, v_1, \ldots, v_n \in E,\ \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$.

— La restriction de f à un sous-espace vectoriel de E est une application linéaire.

3 **Vocabulaire et autres notations très imporantes.**

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
- Lorsque $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une *forme linéaire* sur E.
  L'ensemble des formes linéaires sur E est noté $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
- Lorsque $F = E$, on dit que f est un *endomorphisme* de E.
  L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.
- Lorsque $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est une application linéaire *bijective*, on dit que f est un *isomorphisme*.
- Lorsque $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme *bijectif*, on dit que f est un *automorphisme*.
  L'ensemble des automorphismes est noté $\mathrm{GL}(E)$.

4 **Exemples.**

5 **Proposition.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
L'application $f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$ est linéaire.
C'est l'application linéaire canoniquement associée à A.

6 **Proposition.**

— L'application $0_{\mathscr{L}(E,F)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ v & \longmapsto & 0_F \end{array}$ est linéaire : c'est l'application linéaire nulle.

— L'application $0_{\mathscr{L}(E)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & 0_E \end{array}$ est linéaire : c'est l'endomorphisme nul.

— L'application $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v \end{array}$ est linéaire : c'est l'endomorphisme identité.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. L'application $\lambda\, \mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & \lambda v \end{array}$ est linéaire : c'est l'homothétie de rapport λ.

II. Opérations sur les applications linéaires

Rappel.
Soit F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (donc muni de loi + et ·), et Ω un ensemble quelconque.
Alors l'ensemble F^Ω est un espace vectoriel pour les lois + et · suivantes :

$$f+g : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \alpha \cdot f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \alpha \cdot f(x) \end{array}$$

7 **Proposition (opérations + et ·).** L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

- **Détails.** Cette proposition dit que l'application nulle est une application linéaire et que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.
  Plus précisément
  — Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $f+g \in \mathscr{L}(E,F)$.
  En français : *la somme de deux applications linéaires est linéaire.*
  — Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \cdot f \in \mathscr{L}(E,F)$.
  En français : *en multipliant par un scalaire une application linéaire, on obtient une application linéaire.*

8 **Proposition (opération de composition).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.

- En français : *La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.*

9 **Proposition (propriétés de la loi ∘).**

— Associativité :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \quad \forall g \in \mathscr{L}(F,G), \quad \forall h \in \mathscr{L}(G,H), \quad h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$$

— Distributivité de ∘ sur + :

$$\forall f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F), \quad \forall g \in \mathscr{L}(F,G), \quad g\circ(f_1+f_2) = g\circ f_1 + g\circ f_2$$

— Lois · et ∘ :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \quad \forall g \in \mathscr{L}(F,G), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(g\circ f) = (\lambda\cdot g)\circ f = g\circ(\lambda\cdot f)$$

— Composition par l'identité :

$$\forall f \in \mathscr{L}(E,F), \qquad f\circ \mathrm{id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{id}_F \circ f = f$$

En particulier, $$\forall f \in \mathscr{L}(E), \quad f\circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E\circ f = f$$

- **Pour la Spé.** Vous apprendrez que l'application suivante est bilinéaire :

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F)\times\mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ (f,g) & \longmapsto & g\circ f \end{array}$$

ce qui signifie que pour tous $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E,F)$, $g_1, g_2 \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, on a :

$$\Psi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2,\ g) = \lambda_1 \Psi(f_1, g) + \lambda_2 \Psi(f_2, g) \qquad \text{et} \qquad \Psi(f,\ \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 \Psi(f, g_1) + \lambda_2 \Psi(f, g_2)$$

ce qui traduit par :

$$g\circ(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 g\circ f_1 + \lambda_2 g\circ f_2 \quad \text{et} \quad (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)\circ f = \lambda_1 g_1\circ f + \lambda_2 g_2 \circ f$$

Cas des endomorphismes

10 **Proposition (opérations sur $\mathscr{L}(E)$).**

- $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel pour les lois $+$ (loi interne) et $\cdot$ (loi externe).
- $\mathscr{L}(E)$ est muni d'une **autre** loi interne : l'opération de composition $\circ$.
  Cette loi possède id_E comme élément neutre, c'est-à-dire

  ....

  Ces trois lois $+$, $\cdot$ et $\circ$ vérifient :

  $(f+g)\circ h = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad h\circ(f+g) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\qquad f\circ(\lambda\cdot g) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

- **Remarque.** La loi $\circ$ est non commutative : en général $f\circ g \neq g\circ f$.
  Il n'y a pas de propriété d'intégrité : en présence de $f\circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on ne peut rien dire.
  En maths, on dit que $\left(\mathscr{L}(E), +, \cdot, \circ\right)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Elle est non commutative, et non intègre.

- **Puissance d'un endomorphisme.**
  Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
  Soit $k\in\mathbb{N}$. Alors $\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{k \text{ fois}}$ est un endomorphisme de E, noté f^k. On prononce « f puissance k », ou « f composé k fois »
  On a $f^0 = \mathrm{id}_E$.

11 **Proposition (identités remarquables).**
Soit $f, g\in\mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes $\boxed{\textbf{qui commutent}}$.

$$\forall\, m\in\mathbb{N},\quad (f+g)^m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\forall\, m\in\mathbb{N},\quad f^m - g^m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cas des isomorphismes

- **Rappel (début de l'année).**
  Proposition (bijectivité de la réciproque). Soit E et F deux ensembles quelconques. Soit $f \in F^E$.
  Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective et l'application réciproque de f^{-1} est f, c'est-à-dire $(f^{-1})^{-1} = f$.
  Proposition (Chaussettes et chaussures). Soit $f \in F^E$ et $g \in G^F$.
  Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

12 **Définition.**
Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
On trouve la notation $\mathrm{Iso}(E, F)$ pour l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

13 **Proposition.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ un isomorphisme.
Alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ (aussi appelée son inverse) est une application **linéaire**.

- **En maths.** Si $f \in \mathrm{Iso}(E, F)$, alors $f^{-1} \in \mathrm{Iso}(F, E)$ et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- **Chaussettes et chaussures.** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
  Si f et g sont des isomorphismes, alors $g \circ f$ est un isomorphisme et on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Cas des automorphismes

14 **Définition.**
Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

15 **Proposition (propriétés de l'inverse).** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

— **inverse**
Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $f^{-1} \in \mathrm{GL}(E)$ et $(f^{-1})^{-1} = f$.
L'inverse d'un automorphisme est un automorphisme.

— **composition** — chaussettes et chaussures —
Si f et $g \in \mathrm{GL}(E)$, alors $g \circ f \in \mathrm{GL}(E)$ et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
La composée de deux automorphismes est un automorphisme et l'inverse de la composée est la composée des inverses.

— **puissance**
Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k \in \mathrm{GL}(E)$ et $(f^k)^{-1} = (f^{-1})^k$, que l'on note f^{-k}.
Une puissance d'un automorphisme est un automorphisme et l'inverse de la puissance est la puissance de l'inverse.

III. Noyau et image d'une application linéaire

16 **Proposition.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

— Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

— Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors l'image réciproque $f^{(-1)}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

17 **Définition/Proposition.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.
Le noyau de f est le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$\operatorname{Ker} f = \left\{x \in E \mid f(x) = 0_F\right\}$$

L'image de f est le sous-espace vectoriel de F suivant :

$$\operatorname{Im} f = \left\{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\right\}$$

18 **Question.** Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(M) \end{array}$ est une forme linéaire.
Déterminer une base de son noyau.

19 **Proposition.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a :

$$f \text{ est injective} \iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$$

Une application linéaire est injective SSI son noyau est réduit au vecteur nul.

20 **Question.** Montrer que l'application $D : \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ \varphi & \longmapsto & \varphi' \end{array}$ est linéaire. Est-elle injective ?

21 **Question.** Soit $b, c \in \mathbb{K}$. Soit $F_{b,c} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\right\}$.

Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} F_{b,c} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$ est un isomorphisme.

22 **Lemme très utile.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

— On a toujours :

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$$

— On a toujours :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$$

23 **Question.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $f^2 = f \circ f$ (c'est un endomorphisme de E).

1. Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \iff f^2 = 0$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
4. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$.

IV. Des caractérisations

Avertissement. Dans ce chapitre, il y a beaucoup de résultats qui nécessitent que l'espace de départ possède une famille génératrice **finie**. Bien sûr, tous les espaces vectoriels n'ont pas forcément une famille génératrice finie. Exemples ?

24 **Proposition (famille génératrice de l'image).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Soit $\mathscr{G} = (e_1,\ldots,e_n)$ une famille génératrice finie de E. Alors l'image de f est donnée par :

$$\operatorname{Im} f \;=\; \operatorname{Vect}\big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\big)$$

Morale de l'histoire : si l'on dispose d'une famille génératrice de l'espace de départ, on connaît une famille génératrice de l'image de f.

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array}$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ et déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.

25 **Proposition.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

— Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E.
Si f est injective, alors $f(\mathscr{L})$ est une famille libre de F.

— Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E.
Alors
$$f \text{ est surjective } \iff f(\mathscr{G}) \text{ génératrice de } F$$

- **A retenir.**
L'image par f d'une famille libre (de E) est libre pourvu que f soit injective.
L'image par f d'une famille génératrice de E est génératrice de F pourvu que f soit surjective

26 **Proposition (caractérisation de l'injectivité, surjectivité, bijectivité avec une base de E)**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que E est muni d'une base finie $\mathscr{B}_E = (e_1,\ldots,e_n)$.

— f est injective $\iff$ la famille $\Big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\Big)$ est une famille libre de F.

— f est surjective $\iff$ la famille $\Big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\Big)$ est une famille génératrice de F.

— f est bijective $\iff$ la famille $\Big(f(e_1),\ldots,f(e_n)\Big)$ est une base de F.

27 **Proposition.** On suppose que E est muni d'une base finie $(e_1,\ldots,e_n)$.
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ deux applications linéaires. On a :

$$\Big(\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad f(e_i) = g(e_i)\Big) \implies f = g$$

« Si deux applications linéaires coïncident sur une base, alors elles sont égales. »

28 **Proposition.** On suppose que E est muni d'une base finie $(e_1,\ldots,e_n)$.
Pour toute famille $(v_1,\ldots,v_n)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $h \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $i \in [\![1,n]\!]$, $h(e_i) = v_i$.

« Une application linéaire est entièrement déterminée par les images des vecteurs d'une base. »

- **Stratégie.** Pour construire une application linéaire $h : E \to F$, il suffit de se donner les $h(e_i)$.
- **Exemple.** L'endomorphisme de transposition de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique endomorphisme f tel que ...
- **Exemple.** La forme linéaire trace sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique forme linéaire f telle que ...

V. Étude du sous-ensemble de $\mathscr{L}(E)$ formé des polynômes en f

29 **Définition (Polynôme d'endomorphisme).** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme.

— Une expression du type $af^2 + bf + c\,\mathrm{id}_E$, où $a, b, c \in \mathbb{K}$, est « un polynôme en f » de degré $\leqslant 2$.

— Un « polynôme en f » est une expression du type

$$a_m f^m \;+\; a_{m-1} f^{m-1} \;+\; \cdots \;+\; a_2 f^2 \;+\; a_1 f \;+\; a_0\,\mathrm{id}_E \qquad \text{où } m \in \mathbb{N} \text{ et } a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{K}.$$

- **Notation.** En introduisant le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, l'expression ci-dessus est notée $P(f)$.
- **Résumons.**
  Avec un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ et un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on peut créer un nouvel endomorphisme, à savoir l'endomorphisme $P(f)$.
- **Cas particuliers extrêmement importants.**
  Pour $P = X^0$, on a $P(f) = \ldots$ Pour $P = X^1$, on a $P(f) = \ldots$ Pour $P = X^2$, on a $P(f) = \ldots$

  Pour $P = X^2 + \alpha X + \beta$, on a $P(f) = \ldots$ Pour $P = (X-a)(X-b)$, on a $P(f) = \ldots$
- **Petits calculs.**
  Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a $f^p \circ f^q = f^{p+q} = f^{q+p} = f^q \circ f^p$.

  Soit $g = 3f + 2\,\mathrm{id}_E$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

30 **Définition (Polynôme annulateur pour un endomorphisme).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme.
On dit que P est un polynôme annulateur de f lorsque $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = \mathrm{id}_E$. Alors f admet un polynôme annulateur, par exemple ....
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Alors f admet un polynôme annulateur, par exemple ....
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(f - \lambda_1\,\mathrm{id}_E) \circ (f - \lambda_2\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors f admet un polynôme annulateur ......

31 **Très important.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

— On a $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}_E) \;=\; \left\{x \in E \mid f(x) = \lambda x\right\}$

— Si $\lambda \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}\, f$.

— On a :

$$(f - \lambda\mathrm{id}_E) \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Im}\, f \;\subset\; \mathrm{Ker}(f - \lambda\mathrm{id}_E)$$

32 sol → 19 **Question.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Montrer que

$$E \;=\; \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$$

VI. Applications linéaires et décompositions en somme directe

33 **Proposition.**
On suppose que E est équipé d'une décomposition en somme directe $E_1 \oplus E_2$.
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ deux applications linéaires. On a :

$$\left(f_{|E_1} = g_{|E_1} \text{ et } f_{|E_2} = g_{|E_2}\right) \implies f = g$$

« Si deux applications linéaires coïncident sur des sous-espaces supplémentaires, alors elles sont égales. »

34 **Proposition.**
On suppose que E est équipé d'une décomposition en somme directe $E_1 \oplus E_2$.
Pour toute application linéaire $h_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$ et toute application linéaire $h_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$, il existe une unique application linéaire $h \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$h_{|E_1} = h_1 \qquad \text{et} \qquad h_{|E_2} = h_2$$

« Une application linéaire est entièrement déterminée par sa restriction à des sous-espaces supplémentaires. »

- **Exemple.** On rappelle que l'on a $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
  On rappelle également qu'une matrice M n'est PAS ou bien dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ ou bien dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
  En revanche, pour construire une application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il suffit de la construire sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
  Par exemple, l'endomorphisme de transposition de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'unique endomorphisme f tel que ...

VII. Endomorphismes remarquables

Projection

On rappelle que toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Autrement dit, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
Précisément, pour une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'égalité

$$M \;=\; \frac{1}{2}(M+M^\top) \;+\; \frac{1}{2}(M-M^\top)$$

Le projeté de M sur l'espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\frac{1}{2}(M+M^\top)$.
Le projeté de M sur l'espace $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est la matrice $\frac{1}{2}(M-M^\top)$.

Associés à cette somme directe $E = F \oplus G$, il y a deux endomorphismes remarquables :

— la projection sur $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, notée $p_{F /\!/ G}$

— la projection sur $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à l'espace $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, notée $p_{G /\!/ F}$

$$p_{F/\!/G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M+M^\top) \end{array} \qquad \text{et} \qquad p_{G/\!/F} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \frac{1}{2}(M-M^\top) \end{array}$$

35 **Définition/Proposition (projection sur F paralèllement à G).**
Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.
On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

La projection sur F parallèlement à G est l'application

$$p_{F/\!/G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F \end{array} \quad \text{où } x = x_F + x_G$$

C'est une application linéaire, et même un endomorphisme de E.

- **Reformulation.** La projection sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme p de E défini par :

$$\forall\, x \in F, \quad p(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in G, \quad p(x) = 0$$

Cette dernière phrase a bien un sens, car on a vu que pour définir une application linéaire sur $E = F \oplus G$, il **suffit** de se donner les images des vecteurs de F et des vecteurs de G.

Pour autant, il n'est **pas** vrai qu'un vecteur de E est « ou bien dans F, ou bien dans G ».

- **Remarque.** Bien sûr, on peut intervertir les rôles joués par F et G.
On peut définir la projection sur G parallèlement à F. C'est l'application

$$p_{G/\!/F} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_G \end{array} \quad \text{où } x = x_F + x_G$$

36 **Question.**

- On sait que toute matrice s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de trace nulle et d'une matrice scalaire.
  Autrement dit, en notant $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(I_n)$, on a $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus D$.
  Exhiber la projection sur D parallèlement à H.

- Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites vectorielles $F = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$. On a (WHY ?) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
  Exhiber la projection sur F parallèlement à G.

37 **Proposition (propriétés d'une projection)**

Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

— La projection $p_{F/\!/G}$ sur F parallèlement à G vérifie :

(i) $p_{F/\!/G}$ est un endomorphisme de E

(ii) $p_{F/\!/G} \circ p_{F/\!/G} = p_{F/\!/G}$

(iii) $\mathrm{Ker}\, p_{F/\!/G} = G$

(iv) $\mathrm{Im}\, p_{F/\!/G} = F$

(v) $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p_{F/\!/G}) = \mathrm{Im}\, p_{F/\!/G}$

— Résultats analogues pour la projection $p_{G/\!/F}$.

— On a les relations entre $p_{F/\!/G}$ et $p_{G/\!/F}$:

$$p_{F/\!/G} + p_{G/\!/F} = \mathrm{id}_E \qquad p_{F/\!/G} \circ p_{G/\!/F} = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad p_{G/\!/F} \circ p_{F/\!/G} = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

Projecteur

38 **Définition (projecteur)**
Un projecteur p de E est un endomorphisme de E vérifiant $p \circ p = p$.

- Cette égalité s'écrit encore

$$p^2 = p \quad \text{ou encore} \quad p^2 - p = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{ou encore} \quad p - p^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

  Autrement dit, le polynôme $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de p.
- L'égalité s'écrit aussi :

$$p \circ (\mathrm{id}_E - p) = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{ou encore} \quad (\mathrm{id}_E - p) \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$$

  Autrement dit, le polynôme $X(1-X)$, qui vaut $(1-X)X$, est un polynôme annulateur de p.

39 **Proposition (propriétés d'un projecteur)**
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

— On a $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\, p$.

— Le projecteur p fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E \;=\; \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p \qquad \text{que l'on peut encore écrire} \qquad E \;=\; \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\, p$$

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur la somme directe $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$, à savoir :

$$x \;=\; p(x) \;+\; \big(x - p(x)\big)$$

  qu'il faut penser comme

$$x \;=\; p(x) \;+\; \text{il n'y a plus le choix}$$

- **Question.** Dans la proposition précédente, le projecteur p fait naître une décomposition $E = F \oplus G$ avec $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}\, p$.
  Quelle est alors la projection sur F parallèlement à G, notée $p_{F/\!/G}$?
  Et la projection sur G parallèlement à F ?
- **Attention.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Alors cela n'implique pas que f est un projecteur !
- **Autre attention.** Pour un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, il n'y a aucune raison que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ soient supplémentaires dans E.
  Donner un exemple pour $E = \mathbb{K}^2$.

40 **Question.**

- Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 0) \end{array}$. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. A-t-on $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$?
- L'endomorphisme $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M + M^\top \end{array}$ est-il un projecteur ? A-t-on $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$?

41 **Proposition (projecteurs associés). A ne pas apprendre, mais savoir faire les preuves.**

— Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Alors $\mathrm{id}_E - p$ est un projecteur. Il est appelé le projecteur associé à p.

— Soit $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs **associés**, c'est-à-dire $p + q = \mathrm{id}_E$.

- On a $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$
- Le noyau de l'un est l'image de l'autre :

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$$

- On a les décompositions

(une avec que des images, l'autre avec que des noyaux, une avec que des p, l'autre avec que des q)

$$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q \qquad E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q \qquad E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \qquad E = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q$$

42 **Définition.**
Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.
On rappelle que tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

La symétrie de E d'axe F parallèlement à G est l'application

$$s_{F/\!/G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x_F - x_G \end{array} \qquad \text{où } x = x_F + x_G$$

C'est une application linéaire, et même un endomorphisme de E.

- **Reformulation.** La symétrie d'axe F parallèlement à G, notée $s_{F/\!/G}$, est l'unique endomorphisme s de E défini par :

$$\forall\, x \in F, \quad s(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in G, \quad s(x) = -x$$

Cette dernière phrase a bien un sens, car on a vu que pour définir une application linéaire sur $E = F \oplus G$, il **suffit** de se donner les images des vecteurs de F et des vecteurs de G.

Pour autant, il n'est **pas** vrai qu'un vecteur de E est « ou bien dans F, ou bien dans G ».

43 **Question.**

- On rappelle que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
  Exhiber la symétrie d'axe $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
- Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les droites vectorielles $F = \mathrm{Vect}\big((1,0)\big)$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$. On a (WHY ?) $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$.
  Exhiber la symétrie d'axe F parallèlement à G.

44 **Proposition.**
Soit E un espace vectoriel équipé d'une décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

— La symétrie $s_{F/\!/G}$ de E d'axe F parallèlement à G vérifie

(i) $s_{F/\!/G}$ est un endomorphisme de E

(ii) $s_{F/\!/G} \circ s_{F/\!/G} = \mathrm{id}_E$ donc s_F est un automorphisme de E et $s_{F/\!/G}^{-1} = s_{F/\!/G}$

(iii) $F = \mathrm{Ker}\left(s_{F/\!/G} - \mathrm{id}_E\right)$

(iv) $G = \mathrm{Ker}\left(s_{F/\!/G} + \mathrm{id}_E\right)$

— Résultats analogues pour la symétrie $s_{G/\!/F}$.

— On a les relations entre $s_{F/\!/G}$ et $s_{G/\!/F}$:

$$s_{F/\!/G} + s_{G/\!/F} = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad s_{F/\!/G} \circ s_{G/\!/F} = -\mathrm{id}_E \qquad s_{G/\!/F} \circ s_{F/\!/G} = -\mathrm{id}_E$$

Involution (ou symétrie)

45 **Définition.**
Une involution (ou symétrie) s de E est un endomorphisme de E vérifiant $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

- Cette égalité s'écrit encore

  $s^2 = \mathrm{id}_E$ ou encore $s^2 - \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou $(s - \mathrm{id}_E) \circ (s + \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou $(s + \mathrm{id}_E) \circ (s - \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$

  Autrement dit, le polynôme $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de l'involution s.
- Une involution s est un automorphisme et l'automorphisme réciproque est s lui-même !

46 **Proposition.**
Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une involution.
L'involution s fait naître la décomposition en somme directe de E :

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$$

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur cette somme directe, à savoir :

$$x = \frac{x + s(x)}{2} + \frac{x - s(x)}{2}$$

- **Question.**
  Dans la proposition précédente, l'endomorphisme s fait naître une décomposition $E = F \oplus G$ avec $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.
  Quelle est alors la symétrie d'axe F parallèlement à G, notée $s_{F /\!/ G}$?
  Et la symétrie de E d'axe G parallèlement à F ?

- **Exemple.** Dans $\mathbb{R}^2$, une involution est ...

- **Exemple.** Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, une involution est ...

VIII. Formes linéaires et hyperplans

47 **Proposition.**
Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.
Pour tout vecteur $v_0 \in E$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} \varphi$, on a

$$E = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Vect}(v_0)$$

- **Précision.** Un vecteur x de E possède une écriture unique sur cette somme directe, à savoir :

$$x = \quad \text{il n'y a plus le choix} \quad + \frac{\varphi(x)}{\varphi(v_0)} v_0$$

- **Exemple.** Avec $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ldots$

48 **Définition.**
Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.

49 **Proposition.**
- — Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.
- — Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

IX. Un premier lien entre application linéaire et matrice

50 **Question.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Considérons $f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$
(c'est *l'application linéaire canoniquement associée à la matrice* A).

Décrire le noyau de f_A.
Déterminer une famille génératrice de $\operatorname{Im} f_A$.

51 **Définition.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— On définit le noyau de A comme étant le noyau de f_A.
Autrement dit
$$\operatorname{Ker} A \;=\; \left\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\right\}$$

— On définit l'image de A comme étant l'image de f_A.
Autrement dit (WHY ?)
$$\operatorname{Im} A \;=\; \operatorname{Vect}\big(\operatorname{Col}_1(A), \ldots, \operatorname{Col}_p(A)\big)$$

52 **Proposition.**

— En effectuant des opérations élémentaires sur les .... d'une matrice, on ne change pas son noyau.

— En effectuant des opérations élémentaires sur les .... d'une matrice, on ne change pas son image.

32

On veut montrer qu'un vecteur x de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et d'un vecteur $z \in \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$.
Procédons par analyse-synthèse (l'analyse prouve l'unicité et la synthèse prouve l'existence).

On fixe $x \in E$ une fois pour toutes.

Analyse. On suppose qu'il existe $y, z \in E$ tel que $\begin{cases} \text{i)} & y \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \\ \text{ii)} & z \in \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E) \\ \text{iii)} & x = y + z \end{cases}$

Prenons l'égalité iii) et appliquons f.
Par linéarité de f, on obtient $f(x) = f(y) + f(z)$.
Or d'après i), on a $f(y) = 2y$ et d'après ii), on a $f(z) = 3z$.
Ainsi, on a $\begin{cases} x & = & y & + & z \\ f(x) & = & 2y & + & 3z \end{cases}$
Avec ces deux informations, on va pouvoir tirer y et z en fonction de x et f.
En effectuant $3L_1 - L_2$, on obtient $y = 3x - f(x)$.
En effectuant $L_2 - 2L_1$, on obtient $z = f(x) - 2x$.

Synthèse. On pose $y = 3x - f(x)$ et $z = f(x) - 2x$.
On vérifie que $\begin{cases} \text{i)} & y \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \\ \text{ii)} & z \in \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E) \\ \text{iii)} & x = y + z \end{cases}$
Une façon agréable de vérifier i) et ii) est de constater que l'égalité $f^2 - 5f + 6\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$ s'écrit encore $(f - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (f - 3\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ou encore $(f - 3\,\mathrm{id}_E) \circ (f - 2\,\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Ainsi, $(f - 2\,\mathrm{id}_E)(y) = \big(f - 2\,\mathrm{id}_E\big)(3x - f(x)) = \Big(-(f - 2\,\mathrm{id}_E) \circ (f - 3\,\mathrm{id}_E)\Big)(x) = 0_{\mathscr{L}(E)}(x) = 0_E$.
On vient de montrer que $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$.

La vérification du point ii) est similaire.

Le point iii) est immédiat car $y + z = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x) = x$.

32

Pour alléger, posons $F_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et $F_\mu = \mathrm{Ker}(f - \mu\,\mathrm{id}_E)$.
Fixons $x \in E$.

Analyse. Supposons qu'il existe $x_\lambda, x_\mu \in E$ tels que $\begin{cases} \text{i)} & x_\lambda \in F_\lambda \\ \text{ii)} & x_\mu \in F_\mu \\ \text{iii)} & x = x_\lambda + x_\mu \end{cases}$

Appliquons f à iii), on obtient :

$$f(x) \;=\; f(x_\lambda) + f(x_\mu)$$

En utilisant i) et ii), cette dernière égalité s'écrit $f(x) \;=\; \lambda x_\lambda + \mu x_\mu$.
Résumons. On est en présence de deux égalités :

$$\begin{cases} x & = & x_\lambda + x_\mu \\ f(x) & = & \lambda x_\lambda + \mu x_\mu \end{cases}$$

On cherche x_λ en fonction de x (et de f bien sûr!). Chassons x_μ en réalisant l'opération $\mu L_1 - L_2$:

$$\mu x - f(x) \;=\; (\mu - \lambda) x_\lambda$$

D'où

$$x_\lambda \;=\; \frac{1}{\mu - \lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) \;=\; \frac{1}{\lambda - \mu}\Big(f(x) - \mu x\Big) \;=\; \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu\,\mathrm{id}_E)(x)$$

Pour trouver x_μ en fonction de x, chassons x_λ et réalisons $\lambda L_1 - L_2$:

$$\lambda x - f(x) = (\lambda-\mu)x_\mu$$

D'où

$$x_\mu = \frac{1}{\lambda-\mu}\Big(\lambda x - f(x)\Big) = \frac{1}{\mu-\lambda}(f-\lambda\mathrm{id}_E)(x)$$

Synthèse. Posons $x_\lambda = \dfrac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big)$ et $x_\mu = \dfrac{1}{\lambda-\mu}\Big(\lambda x - f(x)\Big)$.

Vérifions que $\begin{cases} \text{i)} & x_\lambda \in F_\lambda \\ \text{ii)} & x_\mu \in F_\mu \\ \text{iii)} & x = x_\lambda + x_\mu \end{cases}$

Remarque : on n'a pas encore utilisé le fait que $(X-\lambda)(X-\mu)$ est un polynôme annulateur de f.
Dans la première preuve **maladroite**, on va utiliser que ce polynôme vaut $X^2-(\lambda+\mu)X+\lambda\mu$.
Donc $f^2 = (\lambda+\mu)f - \lambda\mu\mathrm{id}_E$. En particulier $f^2(x) = (\lambda+\mu)f(x) - \lambda\mu x$.
Dans la deuxième preuve **plus jolie**, on va utiliser que $(f-\lambda\mathrm{id}_E)\circ(f-\mu\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

▶ i) Montrons que $x_\lambda \in F_\lambda$.
Première preuve maladroite. Montrons que $f(x_\lambda) = \lambda x_\lambda$.

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) &= f\Big(\frac{1}{\mu-\lambda}\big(\mu x - f(x)\big)\Big) \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu f(x) - f^2(x)\Big) \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu f(x) - (\lambda+\mu)f(x) + \lambda\mu x\Big) \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(-\lambda f(x) + \lambda\mu x\Big) \\ &= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) \\ &= \lambda x_\lambda \end{aligned}$$

Deuxième preuve beaucoup plus jolie. Montrons que $(f-\lambda\mathrm{id}_E)(x_\lambda) = 0_E$.
Commençons par remarquer que x_λ s'écrit à l'aide de l'endomorphisme $f-\mu\mathrm{id}_E$:

$$x_\lambda = \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) = \frac{1}{\lambda-\mu}(f-\mu\mathrm{id}_E)(x)$$

Appliquons l'endomorphisme $f-\lambda\mathrm{id}_E$ à x_λ ; on obtient :

$$(f-\lambda\mathrm{id}_E)(x_\lambda) = \frac{1}{\lambda-\mu}(f-\lambda\mathrm{id}_E)\circ(f-\mu\mathrm{id}_E)(x) = \frac{1}{\lambda-\mu}0_{\mathscr{L}(E)}(x) = 0_E$$

▶ ii) Même principe que i).

▶ iii) On a

$$x_\lambda + x_\mu = \frac{1}{\mu-\lambda}\Big(\mu x - f(x)\Big) + \underbrace{\frac{1}{\lambda-\mu}\Big(\lambda x - f(x)\Big)}_{=\frac{1}{\mu-\lambda}\left(f(x)-\lambda x\right)} = \frac{1}{\mu-\lambda}(\mu x - \lambda x) = x$$

Pour la culture. Plus généralement, on peut montrer l'énoncé suivant, appelé **Lemme des noyaux** :

Soit $\lambda \neq \mu \in \mathbb{K}$. Soit $P = (X-\lambda)(X-\mu) \in \mathbb{K}[X]$.
On suppose que P est un polynôme annulateur de f c'est-à-dire $(f-\lambda\mathrm{id}_E)\circ(f-\mu\mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$
Alors

$$E = \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E)$$