Limites & Continuité

13c-Continuite.pdf, 9 janvier 2024, 17:03

I. Vocabulaire indispensable

Intervalle…

- Un **intervalle** I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall\, x, y \in I, \quad x < y \implies [x, y] \subset I$$

- Un intervalle **trivial** est $\begin{cases} \varnothing \\ \text{ou} \\ \text{un singleton} \end{cases}$

- Un intervalle **non trivial** est un intervalle « non vide **et** non réduit à un point », donc contient au moins deux points distincts, et par suite en contient une infinité.
- Mis à part les intervalles triviaux, tout intervalle est de l'un des 9 types suivants :
  - — un *segment* $[a, b]$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$;
  - — un *intervalle ouvert* $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, pour $a < b$;
  - — un *intervalle semi-ouvert* $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$, pour $a < b$;
  - — un *intervalle semi-ouvert* $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$, pour $a < b$;
  - — une *demi-droite fermée* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - — une *demi-droite fermée* $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - — une *demi-droite ouverte* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - — une *demi-droite ouverte* $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$, pour $a \in \mathbb{R}$;
  - — la *droite* $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- Les **intervalles ouverts** sont ceux qui sont définis à l'aide d'inégalités strictes.
  Les **intervalles fermés** sont ceux qui sont définis à l'aide d'inégalités larges.
  Un intervalle peut être ni ouvert, ni fermé, par exemple $]a, b]$.
  Les seuls intervalles à la fois ouvert et fermé sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$.
- Les **bornes** (ou extrémités) d'un intervalle sont ses bornes inférieures et supérieures prises dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- **Contexte pour ce chapitre.** Désormais, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et a est :
  - — ou bien un réel intérieur à I
  - — ou bien une des extrémités de I et dans ce cas : a est réel (et il appartient alors ou non à I) ou $a = \pm\infty$.
- **Notation.** On note $\overline{I}$ la partie égale à l'union de I et de ses bornes.
  Par exemple, pour $I =]3, +\infty[$, alors $\overline{I}$ désigne $]3, +\infty[\, \cup \{3\} \cup \{+\infty\}$.

Voisinage

1 **Définition.**

- $a \in \mathbb{R}$. Un voisinage de a est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $[a-\delta, a+\delta]$ où $\delta > 0$.
- $a = +\infty$. Un voisinage de $+\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $[M, +\infty[$ où $M \in \mathbb{R}$.
- $a = -\infty$. Un voisinage de $-\infty$ est une partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle de la forme $]-\infty, M]$ où $M \in \mathbb{R}$.

2 **Proposition (à lire).**

- Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
  - Un voisinage de a est non vide.
  - L'intersection de deux voisinages de a est un voisinage de a.
- Soit $a \in \overline{I}$ et V_a un voisinage de a.
Alors a n'est pas nécessairement dans I, a fortiori n'est pas nécessairement dans $I \cap V_a$.
En revanche, l'intersection $I \cap V_a$ est non vide.
- Soit $L_1 \neq L_2$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
Il existe deux voisinages V_{L_1} et V_{L_2} tels que $V_{L_1} \cap V_{L_2} = \emptyset$.

3 **Définition.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.
On dit que f vérifie une certaine propriété $\mathscr{P}$ au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage V_a de a tel que f vérifie la propriété $\mathscr{P}$ sur $I \cap V_a$.

- La locution « au voisinage de… » joue pour les fonctions un rôle analogue à celui de la locution « à partir d'un certain rang » pour les suites.
- **Exemple.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.
  - La fonction f est bornée au voisinage de tout point a de $\mathbb{R}$.
  - La fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$, mais elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction f n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$.

II. Limites

Définition

- **Chez les suites réelles.** On a les définitions :
  - $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$ signifie $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$
  - $u_n \to +\infty$ signifie $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in [A, +\infty[$
  - $u_n \to -\infty$ signifie $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ u_n \in]-\infty, A]$
- **Reformulation uniforme.**

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que u tend vers L (quand n tend vers $+\infty$), et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ lorsque

$$\forall V_L, \quad \exists W_{+\infty}, \quad \Big(\forall n \in \mathbb{N} \cap W_{+\infty}, \quad u_n \in V_L\Big)$$

4 **Définition.** Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I}$.
Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers L quand x tend vers a, et on note $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ lorsque

$$\forall V_L, \quad \exists W_a, \quad \Big(\forall x \in I \cap W_a, \quad f(x) \in V_L\Big)$$

- **Reformulation pour le cas réel.**

— **à l'arrivée.** Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ *(un réel)*.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) - \ell \xrightarrow[x\to a]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \big|f(x) - \ell\big| \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

— **au départ.** Soit $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ *(un réel)*. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \quad \Longleftrightarrow \quad f(a+h) \xrightarrow[h\to 0]{} L$$

- **Les 9 cas.**
  - $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad f(x) \geqslant A$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad f(x) \leqslant A$$

  - $a = +\infty$

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [B, +\infty[,\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [B, +\infty[,\quad f(x) \geqslant A$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [B, +\infty[,\quad f(x) \leqslant A$$

  - $a = -\infty$

$$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, B],\quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, B],\quad f(x) \geqslant A$$

$$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, B],\quad f(x) \leqslant A$$

5 sol → 24
Question. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$ et $a \in I = [0,+\infty[$.
Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt{a}$. On traitera le cas $a = 0$ à part.

6 preuve
Question. Soit $f : \begin{array}{ccc}]\pi,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-\pi} \end{array}$.

— Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to \pi]{} +\infty$.

— Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$.

— Soit $a \in]\pi, +\infty[$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{a-\pi}$.

7 **Défi.**
Dessiner une fonction f définie sur $]0,+\infty[$ n'ayant pas de limite en 0.
Puis trouver une expression avec des fonctions usuelles.

Premières propriétés

8 preuve

Proposition (unicité de la limite). Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$, alors L est unique et est appelé la limite de f en a.

Elle est notée $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{a} f$.

9 preuve

Proposition (caractère borné). Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\boxed{\ell \in \mathbb{R} \text{ (un réel)}}$.

Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$, alors f est bornée au voisinage de a.

Si une fonction admet une limite FINIE *en un point, alors elle est bornée au voisinage de ce point.*

10 preuve

Proposition (quand a est dans I). Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$ *(un point en lequel f est définie)*. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a

$$\begin{cases} a \in I \\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \end{cases} \implies L \in \mathbb{R} \text{ et } L = f(a)$$

Si une fonction admet une limite en un point où elle est définie, alors cette limite est nécessairement FINIE *et vaut l'image du point en question !*

- **Dessin.** Donner un exemple de fonction définie en a, mais n'admettant pas de limite en a.

11

Proposition (limite et signe). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet une limite réelle $\ell > 0$ en a, alors f est strictement positive au voisinage de a.

- Le résultat est évidemment vrai avec $L = +\infty$.
- Le résultat est vrai avec $\ell < 0$, à condition de changer également la conclusion !

12

Proposition (caractère local de la limite). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit V_a un voisinage de a. On a :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \iff f_{|I \cap V_a}(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$$

- **Reformulation.**

  Cas $a \in \mathbb{R}$.

  Pour étudier la limite de f en a, on peut se restreindre à un intervalle du type $I \cap [a - \delta_1, a + \delta_1]$.

  Cas $a = +\infty$.

  Pour étudier la limite de f en $+\infty$, on peut se restreindre à un intervalle du type $I \cap [x_1, +\infty[$.

  Cas $a = -\infty$.

  Pour étudier la limite de f en $-\infty$, on peut se restreindre à un intervalle du type $I \cap]-\infty, x_1]$.

- **Utilité ?**

  Avec cette propriété locale de la limite, on peut facilement traiter le cas de la fonction partie entière.
  Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors la fonction partie entière admet une limite en a.
  En effet, cette fonction est constante au voisinage d'un tel a.
  Et comme une fonction constante admet une limite, on en déduit que…

Limite à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$

13 **Définition (limite gauche/droite $\boxed{\text{en un réel } a}$).** Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overline{I} \cap \mathbb{R}$ un réel. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

• On dit que f *tend vers* L *quand* x *tend vers* a *par valeurs inférieures* lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ tend vers L quand x tend vers a.

On note $f(x) \xrightarrow[x<a]{x \to a} L$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} L$.

Autrement dit :

$$f(x) \xrightarrow[x<a]{x \to a} L \qquad \text{signifie} \qquad f_{|I \cap]-\infty, a[} \xrightarrow[x \to a]{} L$$

• On dit que f *tend vers* L *quand* x *tend vers* a *par valeurs supérieures* lorsque la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ tend vers L quand x tend vers a.

On note $f(x) \xrightarrow[x>a]{x \to a} L$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} L$.

Autrement dit :

$$f(x) \xrightarrow[x>a]{x \to a} L \qquad \text{signifie} \qquad f_{|I \cap]a, +\infty[} \xrightarrow[x \to a]{} L$$

- **Détails.**
  - Dire $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} \ell \in \mathbb{R}$ signifie : $\quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta, a[, \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$
  - Dire $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} +\infty$ signifie : $\quad \forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta, a[, \quad f(x) \geqslant A$
  - Dire $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} -\infty$ signifie : ....
  - Dire $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} \ell \in \mathbb{R}$ signifie : ....
- **Remarque importante.**
  Lorsque f est définie sur un intervalle I dont l'extrémité gauche a n'est pas dans I, alors les notions de limite en a et de limite en a^+ coïncident.
  Idem de l'autre côté.
- **À retenir.**
  Pour f la fonction logarithme définie sur $]0, +\infty[$, il revient au même de parler de $\lim\limits_{0} f$ ou de $\lim\limits_{0^+} f$.

14 **Proposition (lorsque f est définie en $a \in \mathring{I}$).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$ *(un point intérieur en lequel f est définie)*. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On a l'équivalence

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x<a]{x \to a} \ell \\ f(x) \xrightarrow[x>a]{x \to a} \ell \\ f(a) = \ell \end{cases}$$

15 **Question.** Soit f la fonction partie entière. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier les limites éventuelles de f en a.

Sur un intervalle épointé

- **Exemple.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{(x-3)^2} \end{array}$ La limite de f en 3 existe-t-elle ?

16 **Définition (f définie sur un intervalle épointé).** Soit $a \in \mathring{I}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que f tend vers L quand x tend vers a lorsque les restrictions de f à $I \cap]-\infty, a[$ et à $I \cap]a, +\infty[$ tendent chacune vers L quand x tend vers a.

Caractérisation séquentielle, aspect local

Question !
Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)$ existe et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas.

17 preuve

Proposition (composition de limites du type suite/fonction). Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

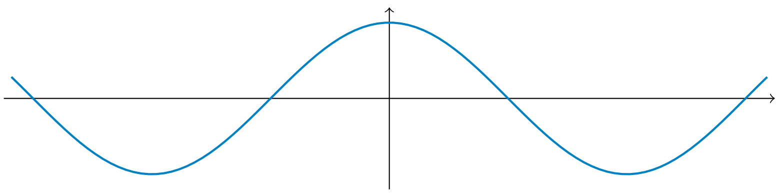
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I. On a :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \end{cases} \implies f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

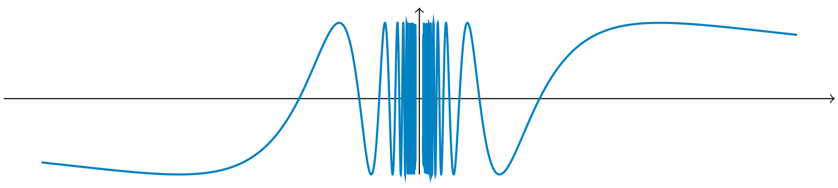
- **Reformulation.**
Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$, **alors** pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L.
- **Corollaire.**
S'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a telle que la suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, alors $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas.
- **Autre corollaire.**
S'il existe deux suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a telles que les suites $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(v'_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite différente l'une de l'autre, alors $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas.

18 **Question.**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas.



Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$
Montrer que $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ n'existe pas.



19 **Théorème (caractérisation séquentielle de la limite).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L **alors** $f \xrightarrow[a]{} L$.

III. Opérations sur les limites

- L'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs réelles est muni d'une loi $\cdot$, d'une loi $+$ et d'une loi $\times$ définies par :

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x) \qquad f+g : x \mapsto f(x)+g(x) \qquad f \times g : x \mapsto f(x)g(x)$$

- Les opérations algébriques sur les limites sont les mêmes que chez les suites. Il s'agit juste de remplacer $n \to +\infty$ par $x \to a$.

20 **Proposition (opérations « point, plus, fois »).** Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $L, L' \in \overline{\mathbb{R}}$.

- **loi** $\cdot$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \begin{cases} \lambda L & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

En multipliant par un scalaire une fonction-ayant-une-limite-en-a, on obtient une fonction ayant une limite-en-a.

- **loi** $+$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L' \\ L+L' \text{ existe} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L+L'$$

La limite de la-somme-de-deux-fonctions-ayant-une-limite-en-a existe, sauf dans le cas $(+\infty)+(-\infty)$.

- **loi** $\times$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L' \\ LL' \text{ existe} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} LL'$$

La limite du produit-de-deux-fonctions-ayant-une-limite-en-a existe, sauf dans le cas $0 \times (\pm\infty)$.

- **Cas particulier des fonctions ayant une limite finie en a.** Soit $\boxed{\ell, \ell' \in \mathbb{R}}$.

- **loi** $\cdot$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda \ell$$

En multipliant par un scalaire une fonction-ayant-une-limite-finie-en-a, on obtient une fonction-ayant-une-limite-finie-en-a.

- **loi** $+$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell+\ell'$$

La somme de deux fonctions-ayant-une-limite-finie-en-a est une-fonction-ayant-une-limite-finie-en-a et la limite de la somme est la somme des limites.

- **loi** $\times$

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$$

Le produit de deux fonctions-ayant-une-limite-finie-en-a est une-fonction-ayant-une-limite-finie-en-a et la limite du produit est le produit des limites.

21 **Proposition (opérations et nature).**
Tout se passe bien avec les fonctions-ayant-une-limite-finie-en-a.

$$\lambda \cdot \mathrm{CV}_a = \mathrm{CV}_a \qquad \mathrm{CV}_a + \mathrm{CV}_a = \mathrm{CV}_a \qquad \mathrm{CV}_a \times \mathrm{CV}_a = \mathrm{CV}_a$$

Par ailleurs, $\mathrm{CV}_a + \mathrm{DV}_a = \mathrm{DV}_a$.

- **Attention.** C'est plus délicat avec les fonctions-divergentes-en-a :

$$\lambda \cdot \mathrm{DV}_a = \begin{cases} \mathrm{DV}_a & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \text{constante égale à } 0 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \qquad \cancel{\mathrm{DV}_a + \mathrm{DV}_a = \mathrm{DV}_a} \qquad \cancel{\mathrm{DV}_a \times \mathrm{DV}_a = \mathrm{DV}_a}$$

- **Très pratique.** On a (WHY)

$$\begin{cases} f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases} \implies f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$$

22 **Lemme très utile.**

— Au voisinage de a, le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0, est une fonction qui tend vers 0.

— Au voisinage de a, la somme d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est une fonction qui tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Limite et passage à l'inverse

23 **Proposition (inverse).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

— Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\ell}$.

— Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (ou $-\infty$), alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

— Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\ \forall x \in I \cap V_a,\ f(x) > 0 \end{cases}$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

- **Remarque.** Dans l'énoncé précédent, il n'est pas dit que $\forall x \in I, f(x) \neq 0$, alors que l'on voit écrit $\dfrac{1}{f(x)}$.

Ce n'est pas un oubli ! Quand on écrit $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{}$ truc, on sous entend que $\dfrac{1}{f(x)}$ a du sens *au moins au voisinage de a*.
Est-ce le cas dans les trois points de la proposition ?
Par exemple, dans le premier point, le fait que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ avec $\ell \neq 0$ implique qu'au voisinage de a, la fonction ne s'annule pas, WHY ?

Composition de limites

24 preuve **Proposition (composition de limites du type fonction/fonction).**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$.
Soit $a \in \overline{I}$ et $b \in \overline{J}$. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\text{Si } \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ g(t) \xrightarrow[t\to b]{} L \end{cases} \quad \text{alors} \quad (g\circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$$

25 **Question.** Soit $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Au fait, à quoi ressemble le graphe de f ?
Soit $a \in \mathbb{Z}$. Étudier l'existence de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Passage à la limite dans les égalités

26 **Principe (Passage à la limite dans les égalités).**
Si chaque fonction intervenant dans une égalité admet une limite (finie ou infinie), on peut passer à la limite dans l'égalité en utilisant les règles opératoires usuelles et en déduire, si cela a du sens, une égalité d'éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

IV. Théorèmes liés à l'ordre $\leqslant$

27 **Proposition.** Soit $f, g, d : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Soit V_a un voisinage de a.

— **Passage à la limite : il faut avoir l'existence des limites**

$$\begin{cases} \forall x \in I \cap V_a,\ f(x) \leqslant g(x) \\ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \ell \leqslant \ell'$$

— **Théorème des Gendarmes : il nous donne l'existence de la limite et sa valeur**

$$\begin{cases} \forall x \in I \cap V_a,\ g(x) \leqslant f(x) \leqslant d(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ d(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_a f \text{ existe et vaut } \ell$$

— **Théorème de comparaison : il nous donne l'existence de la limite et sa valeur**

$$\begin{cases} \forall x \in I \cap V_a,\ g(x) \leqslant f(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_a f \text{ existe et vaut } +\infty$$

$$\begin{cases} \forall x \in I \cap V_a,\ f(x) \leqslant d(x) \\ d(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_a f \text{ existe et vaut } -\infty$$

- **Corollaire immédiat du théorème des Gendarmes**

$$\begin{cases} \forall x \in I \cap V_a,\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon(x) \\ \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \lim_a f \text{ existe et vaut } \ell$$

Pour montrer qu'une fonction tend vers ℓ en a, il suffit d'examiner la valeur absolue de la différence de son expression avec ℓ et de « majorer » cette valeur absolue par une fonction tendant vers 0 en a.

28 **Question.** Soit $a > 0$. Montrer que $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt{a}$.

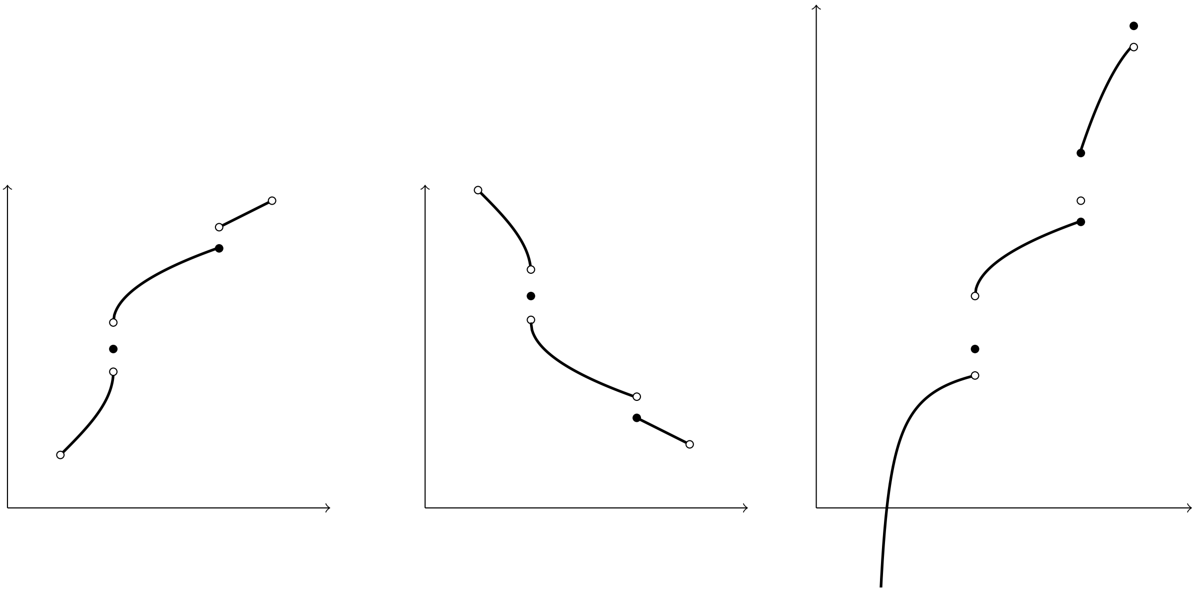
sol → 26

29 **Question.** Déterminer la limite de $x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ en $+\infty$, puis en 0.

30 **Théorème de la limite monotone.** Soit $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- Si f est croissante alors
  - En a : $\lim_a f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est minorée} \\ \text{vaut } -\infty & \text{sinon} \end{cases}$
  - En $c \in]a, b[$: $\ell^- = \lim_{c^-} f$ et $\ell^+ = \lim_{c^+} f$ existent et sont finies. On a $\ell^- \leqslant f(c) \leqslant \ell^+$.
  - En b : $\lim_b f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est majorée} \\ \text{vaut } +\infty & \text{sinon} \end{cases}$
- Si f est décroissante alors
  - En a : $\lim_a f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est majorée} \\ \text{vaut } +\infty & \text{sinon} \end{cases}$
  - En $c \in]a, b[$: $\ell^- = \lim_{c^-} f$ et $\ell^+ = \lim_{c^+} f$ existent et sont finies. On a $\ell^- \geqslant f(c) \geqslant \ell^+$.
  - En b : $\lim_b f$ existe et $\begin{cases} \text{est finie} & \text{si } f \text{ est minorée} \\ \text{vaut } -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

- **Conséquence.** Si f est monotone alors, en tout point où cela a du sens, les limites à gauche et à droite *existent* dans $\overline{\mathbb{R}}$ (et sont nécessairement *finies* lorsqu'on se place *en un point intérieur*).



- **Généralisation.** Dans l'énoncé précédent, la fonction f n'est pas définie en a et b qui sont potentiellement égaux à $\pm\infty$.
  On peut évidemment énoncer un théorème pour une fonction définie sur $]a, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$, ou encore sur $[a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$, ou encore sur $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
  Par exemple :
  > *Soit f définie sur $]a, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.*
  > *Si f est croissante, alors $\lim_b f$ existe et est finie et on a $\lim_b f \leqslant f(b)$.*

31 **Question.** Soit f une fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ et décroissante.
Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et les déterminer.

V. Continuité, l'aspect ponctuel

Définition en un point

32 **Définition.** Soit $f: I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ *(un point en lequel f est définie)*.
On dit que f est continue en a lorsque la limite de f en a *existe* (pas encore finie, et pas encore égale à $f(a)$).
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en a.

- **Mieux.** Dans ce cas, la limite est nécessairement FINIE et vaut $f(a)$ (WHY ?).
  On retrouve donc la **définition du lycée** :

$$f \text{ est continue en } a \text{ lorsque } f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a).$$

- **Définition epsilonesque.**
  $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta], \quad f(x) \in \big[f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big]$
  $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \delta \implies |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$
- **En spé.** **Définition topologique.**

$$\forall V_{f(a)} \text{ voisinage de } f(a), \quad \exists W_a \text{ voisinage de } a, \quad f\big(I \cap W_a\big) \subset V_{f(a)}$$

33 **Définition.** Soit $f: I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ *(un point en lequel f est définie)*.
On dit que f est continue à gauche en a lorsque la restriction de f à $I \cap]-\infty, a]$ est continue.
On dit que f est continue à droite en a lorsque la restriction de f à $I \cap [a, +\infty[$ est continue.

34 **Proposition.** Soit $f: I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathring{I}$ *(un point intérieur)*.
La fonction f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a.

35 **Question.** Soit f la fonction partie entière. Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la continuité de f en a.

Définition sur un intervalle

36 **Définition.** Soit $f: I \to \mathbb{R}$.

— On dit que f est continue **sur** I lorsque f est continue **en** tout point de I.

— On note $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

- **Plus généralement.** Si Ω est une union d'intervalles non triviaux, on dit que f est continue sur Ω lorsque f est continue sur chacun de ces intervalles.
  Par exemple, la fonction tangente est continue sur son ensemble de définition.
- **Exemples.**
  • Soit f une fonction polynomiale.
  On a $\quad \forall a \in \mathbb{R}, \; f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
  Donc f est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.
  Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

  • La fonction inverse $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (WHY ?).

Opérations

37 **Proposition (opérations « point, plus, fois »).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— Si f et g sont continues en a, alors λf, $f + g$, et fg sont continues en a.

— Si f et g sont continues sur I, alors λf, $f + g$, et fg sont continues sur I.

- **SEV.** Comme une combinaison linéaire de fonctions continues sur I est continue sur I, et que la fonction nulle est bien sûr continue sur I, on en déduit que $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$.
- **Puissance.** En itérant un nombre fini de fois l'opération « fois », on obtient

si f est continue sur I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f^n est continue sur I.

- Schématiquement :

$\lambda \cdot$ continue = continue　　continue + continue = continue　　continue × continue = continue

Et enfin continue + discontinue = discontinue.

38 **Proposition (inverse).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

— Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$,
alors $\frac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a et est continue en a.

— Si f est continue et ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}$ est continue sur I.

39 **Proposition (composition).**
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$.

— Si $\begin{cases} f \text{ est continue en } a \in I \\ g \text{ est continue en } b = f(a) \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue en a.

— Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \text{ à valeurs dans } J \\ g \text{ est continue sur } J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est continue sur I.

- **Dans les exercices.** Désormais pour montrer la continuité d'une fonction sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, on invoquera le fait que la fonction est bâtie à partir de fonctions usuelles en utilisant des opérations algébriques classiques.

40 **Définition.** Soit $a \in I$. Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$.
On dit que f est prolongeable par continuité en a lorsque $\lim\limits_{a} f$ existe et est finie.

Dans ce cas, la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \lim\limits_{t \to a} f(t) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

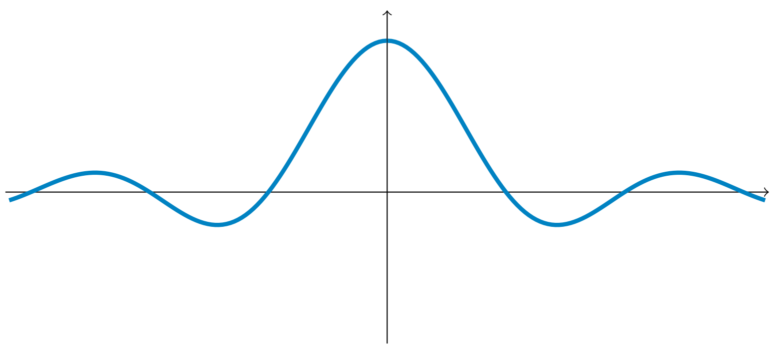
est une fonction *continue*, et est appelée **le prolongement par continuité de f en a**.

- A priori, avant de commencer à lire la définition, la fonction f n'est PAS définie en a, c'est-à-dire que $f(a)$ n'a pas de sens.
  Rigoureusement, à la fin de la lecture de la définition, la fonction f n'est TOUJOURS PAS définie en a!
- **Exemple du sinus cardinal.**
  Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$

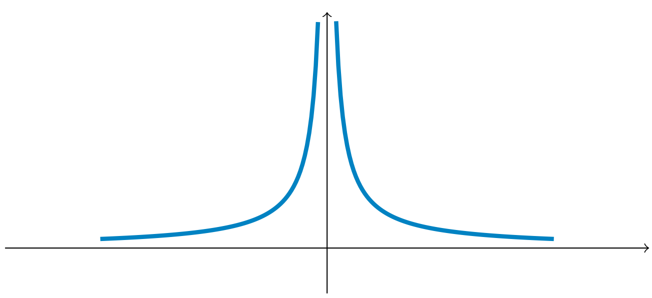
  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (WHY?)

  La fonction f n'est pas définie en 0, mais f est prolongeable par continuité en 0.
  Son prolongement est :

  $$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

- **Exemple.**
  Soit $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{|x|} \end{array}$
  La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (WHY?)
  Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$?

41 **Quizz.** Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité (là où elles doivent l'être!) ?

$$f: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \qquad g: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x \end{array} \qquad h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{3\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3-27}{x-3} \end{array}$$

42 **Proposition (la fonction puissance $\alpha \in \mathbb{R}$).** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction $\begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \overset{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln x) \end{array}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Cette fonction est prolongeable par continuité en 0 si et seulement si $\alpha \geqslant 0$.

Précisément :

— Si $\alpha > 0$, le prolongement par continuité est $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^\alpha & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

— Si $\alpha = 0$, le prolongement par continuité est $\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array}$

43 sol → 26 **Question.** Soit $f: \begin{array}{rcl}]0,1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\ln x}{x^2-1} \end{array}$

La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Et en 1 ?

Caractérisation séquentielle de la continuité

44 **Proposition (composition de limites finies).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ *(un point en lequel f est définie)*.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I. On a :

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f \text{ continue en } a \end{cases} \implies f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$

- **Reformulation.**

Si f est continue en a, **alors** pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

45 **Théorème (caractérisation séquentielle de la continuité).** Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
Si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans I tendant vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$ **alors** f est continue en a.

VI. Continuité, l'aspect global

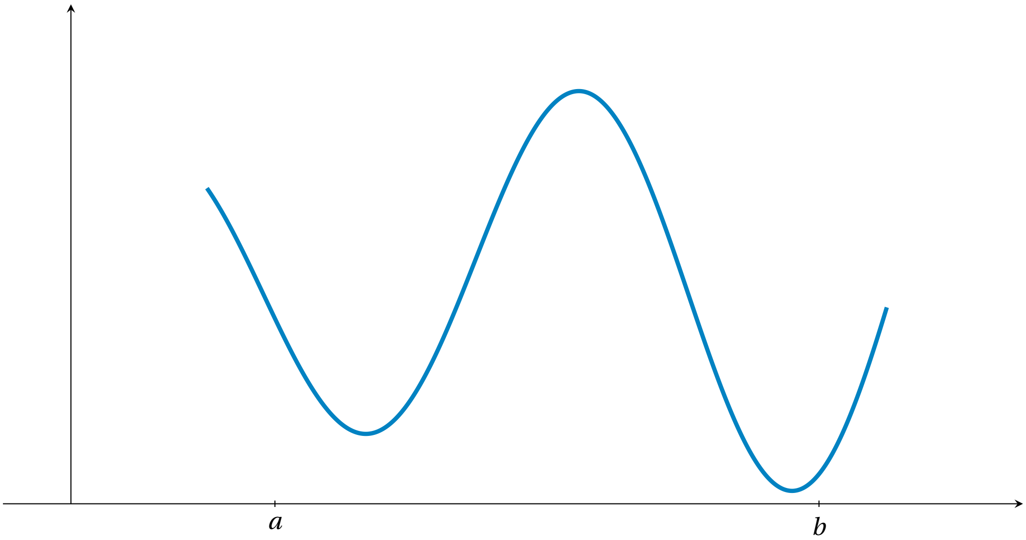
Théorème des valeurs intermédiaires

46
preuve

Théorème des valeurs intermédiaires.

La version « de base »
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I.
Soit $a, b \in I$ tel que $a \leqslant b$.
Alors pour tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y_0$.

La version « sophistiquée »
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.



- Ce théorème dit que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est « l'image de quelqu'un ».
- On ne suppose rien sur la position de $f(a)$ vis-à-vis de $f(b)$.
- Une autre façon de retenir cet énoncé :

  Si f est continue sur un intervalle, alors toute valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f est une valeur atteinte par f.

- Il n'y a pas d'unicité dans ce théorème. Ce théorème est un THÉORÈME D'EXISTENCE.
- Une condition suffisante d'unicité : « la fonction f est strictement monotone ».
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle qui n'est PAS nécessairement de même nature. WHY ?

47
sol → 28
Question. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

48
sol → 28
Question. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue* telle que $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \big(f(x)\big)^2 = 1.$
Que dire de f ?

49
sol → 29
Question. Montrer qu'une fonction décroissante continue définie sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.

Théorème des bornes atteintes

50 **Définition.**
Un segment est un intervalle fermé borné, c'est-à-dire un intervalle du type $[a, b]$ avec $a \leqslant b$ des réels.

51 preuve **Théorème des bornes atteintes.**

Formulation de base. Une fonction CONTINUE sur un SEGMENT est bornée et atteint ses bornes (borne supérieure et borne inférieure), autrement dit possède un maximum et un minimum.

Formulation sophistiquée. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

- Avec des quantificateurs :
  Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Alors

$$\exists\, x_m, x_M \in [a, b], \quad \forall\, t \in [a, b], \quad f(x_m) \leqslant f(t) \leqslant f(x_M)$$

  Avec ces notations, on a $\displaystyle\min_{t\in[a,b]} f(t) = f(x_m)$ $\qquad\displaystyle\max_{t\in[a,b]} f(t) = f(x_M)$

- Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, qui est bornée et qui n'atteint pas ses bornes.

- L'hypothèse « segment » est indispensable.

$$\begin{array}{rcl}]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$$

- L'hypothèse de continuité est indispensable.

$$f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dots \end{array}$$

52 **Question.** Soit $f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-\mathrm{e}^x} \end{array}$ Sans étudier les variations de f, montrer que f est bornée.

Théorème de la bijection continue strictement monotone

Question.
Donner une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ bijective sans être monotone.
Donner une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective sans être monotone.

Rappel (1). Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ strictement monotone est injective.

Rappel (2). Soit $f : X \to Y$ une bijection.
Si f est (strictement) monotone, alors f^{-1} est (strictement) monotone de même monotonie que f.

53 **Théorème.**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un **intervalle** I.

$$\left\{\begin{array}{r} f \text{ strictement monotone sur } I \\ f \text{ continue sur } I \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} f \text{ réalise une bijection de } I \text{ sur } J = f(I) \\ f^{-1} \text{ a même sens de variation que } f \\ f^{-1} \text{ est continue sur } J \end{array}\right.$$

- **Preuve du Théorème.** On va prouver le lemme suivant :

  Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction monotone, définie sur un intervalle J.
  Si $g(J)$ est un intervalle, alors g est continue.

- **Corollaire.**
  Soit $f : I \to J$ une fonction bijective. Alors :

$$f \text{ continue sur l'intervalle } I \quad \implies \quad f^{-1} \text{ est continue sur l'intervalle } J$$

  La bijection réciproque d'une fonction continue sur un intervalle est continue.

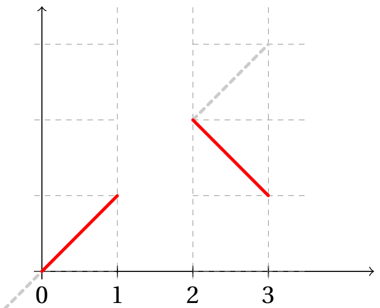
- **Preuve du corollaire.** Elle se fait en admettant momentanément le lemme suivant :

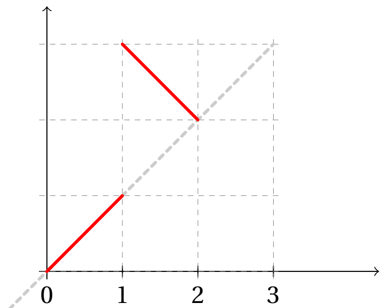
  Soit f une fonction injective, continue sur un intervalle.
  Alors f est strictement monotone.

  et en appliquant ensuite le théorème 53.

- **Exemple.** La fonction Arcsin est continue sur $[-1,1]$. WHY ?

- **Attention.**
  La fonction f est une bijection continue définie sur $[0,1] \cup [2,3[$ ayant pour image $[0,2]$, définie par le graphe de gauche.
  Sa bijection réciproque est donnée par le graphe de droite, et on constate qu'elle n'est pas continue.
  Où est l'embrouille ?





  Bilan. L'énoncé suivant est faux :

  ~~Soit $f : X \to Y$ une bijection continue. Alors $f^{-1} : Y \to X$ est continue.~~

VII. Extension aux fonctions à valeurs complexes

Limites

54 **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.
On dit que la fonction à valeurs complexes f tend vers ℓ quand x tend vers a, lorsque la fonction à valeurs réelles $|f - \ell|$ tend vers 0 lorsque x tend vers a :

- $a \in \mathbb{R}$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \cap [a-\delta,\ a+\delta],\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- $a = +\infty$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [x_0, +\infty[,\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$
- $a = -\infty$
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, x_0],\quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

- Il suffit de remplacer toutes les valeurs absolues par des modules.
- Pas de limite infinie : autrement dit $\ell \in \mathbb{C}$.
- On a bien sûr les équivalences :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) - \ell \xrightarrow[x\to a]{} 0 \quad\Longleftrightarrow\quad |f(x) - \ell| \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

- Unicité de la limite.
- Caractère borné.
On a « si f admet une limite $\ell \in \mathbb{C}$ en a, alors f est bornée au voisinage de a ».
- Passage au module.

  Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.
  Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |\ell|$
- Opérations algébriques : idem.
- Passage au conjugué.

  Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.
  Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $\overline{f}(x) \xrightarrow[x\to a]{} \overline{\ell}$

55 **Proposition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Soit $a \in \overline{I}$. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.
On a
$$f \xrightarrow[a]{} \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \xrightarrow[a]{} \mathrm{Re}(\ell) \\ \mathrm{Im}(f) \xrightarrow[a]{} \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$$

Continuité

- Définition de la continuité : idem.
- Opérations sur les fonctions continues : idem.
- Caractérisation par les parties réelles et imaginaires.
- Attention : pas de TVI (car pas de relation d'ordre).
- Pas de théorème des bornes atteintes.
- Pas de théorème de la bijection réciproque.
- Pour résumer, on peut garder à l'esprit qu'une bonne partie des notions et propriétés valables sur les fonctions réelles se généralisent aux fonctions complexes, **sauf celles qui font intervenir des inégalités**.

  Ainsi, à propos d'une fonction complexe, on n'utilisera surtout **pas** :

  — la notion de fonction monotone ;
  — la notion de fonction majorée et/ou minorée ;
  — la notion de fonction tendant vers $+\infty$ ou $-\infty$;

Limites & Continuité

preuve et éléments de correction

5

Soit $a > 0$.
Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt{a}$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in [0,+\infty[\cap [a-\delta, a+\delta],\ f(x) \in [\sqrt{a}-\varepsilon, \sqrt{a}+\varepsilon]$$

Fixons $\varepsilon > 0$.

Zone brouillon.
Soit $x \in [0,+\infty[$.
On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(x) \in [\sqrt{a}-\varepsilon, \sqrt{a}+\varepsilon] &\iff \sqrt{a}-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{a}+\varepsilon \\ &\iff (\sqrt{a}-\varepsilon)^2 \leqslant x \leqslant (\sqrt{a}+\varepsilon)^2 \quad \text{si } \sqrt{a}-\varepsilon \geqslant 0 \end{aligned}$$

6

Ici, la fonction est $f : \begin{array}{rcl}]\pi,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x-\pi} \end{array}$.

• Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to \pi]{} +\infty$, c'est-à-dire $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in]\pi,+\infty[\cap [\pi-\delta, \pi+\delta],\ f(x) \geqslant A$.
Soit $A \in \mathbb{R}$ que l'on peut supposer > 0.

Zone brouillon. Pour $x \in]\pi,+\infty[$, on a l'équivalence (WHY?) :

$$f(x) \geqslant A \iff x \leqslant \pi + \frac{1}{A}$$

Posons $\delta = \dfrac{1}{A}$ qui est bien > 0.
Soit $x \in]\pi,+\infty[\cap [\pi-\delta, \pi+\delta]$.
On a alors $x \leqslant \pi+\delta$, c'est-à-dire $x \leqslant \pi + \dfrac{1}{A}$.
Puis avec l'équivalence, on en déduit que $f(x) \geqslant A$.

• Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in]\pi,+\infty[\cap [B,+\infty[,\ f(x) \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Zone brouillon. Pour $x \in]\pi,+\infty[$, on a l'équivalence (WHY?) :

$$-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon \iff f(x) \leqslant \varepsilon \iff x \geqslant \pi + \frac{1}{\varepsilon}$$

Posons $B = \pi + \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Soit $x \in]\pi,+\infty[\cap [B,+\infty[$.
On a donc $x \geqslant B$, c'est-à-dire $x \geqslant \pi + \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Avec l'équivalence, on en déduit que $-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon$.

• Montrons $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{a-\pi} = f(a)$, c'est-à-dire
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in]\pi,+\infty[\cap [\pi-\delta, \pi+\delta],\ f(x) \in [f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon]$.

Soit $\varepsilon > 0$ que l'on suppose aussi $< f(a)$ (de sorte que $f(a)-\varepsilon > 0$).

Zone brouillon. Pour $x \in]\pi,+\infty[$, on a l'équivalence (WHY?) :

$$f(a)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(a)+\varepsilon \iff \pi + \frac{1}{f(a)+\varepsilon} \leqslant x \leqslant \pi + \frac{1}{f(a)-\varepsilon}$$

Posons δ_1 et δ_2 définis par $a-\delta_1=\pi+\dfrac{1}{f(a)+\varepsilon}$ et $a-\delta_2=\pi+\dfrac{1}{f(a)-\varepsilon}$.
Posons $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$.
Soit $x\in\,]\pi,+\infty[\,\cap[a-\delta,a+\delta]$.
Alors $a-\delta_1\leqslant x\leqslant a+\delta_2$.
Puis avec l'équivalence, on en déduit que $f(a)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(a)+\varepsilon$.

8

Prenons L et L' tels que $f\underset{a}{\to}L$ et $f\underset{a}{\to}L'$.
Montrons que $L=L'$.
Raisonnons par l'absurde en supposant $L\neq L'$.
Alors il existe V et V' des voisinages de L et L' respectivement tels que $V\cap V'=\varnothing$.
Par hypothèse $f\underset{a}{\to}L$, il existe W_a un voisinage de a tel que $f(I\cap W_a)\subset V$.
Par hypothèse $f\underset{a}{\to}L'$, il existe W'_a un voisinage de a tel que $f(I\cap W'_a)\subset V'$.

Il n'est pas difficile de montrer que $W_a\cap W'_a$ est un voisinage de a, donc $I\cap W_a\cap W'_a$ est non vide : prenons-en un élément, disons x.
Alors $f(x)\in V\cap V'$.
D'où la contradiction. WHY?

9

Supposons $f\underset{a}{\to}\ell$.
Appliquons la définition avec $V_\ell=[\ell-1,\ell+1]$ qui est une partie bornée !
Il existe W_a un voisinage de a tel que

$$\forall\, x\in I\cap V_a,\ f(x)\in V_\ell$$

Ainsi, f est bornée sur $I\cap V_a$. Autrement dit, f est bornée au voisinage de a.

Pour convaincre les élèves et réviser l'inégalité triangulaire, on peut écrire $|f(x)|\leqslant|f(x)-\ell|+|\ell|$, d'où $|f(x)|\leqslant 1+|\ell|$.

L'utilisation de W_a masque/cache trois cas.

10

Montrons d'abord que $L\in\mathbb{R}$.
L'hypothèse dit

$$\forall\, V_L,\ \exists\, W_a,\ \forall\, x\in I\cap W_a,\ f(x)\in V_L$$

Comme $a\in I$ par hypothèse, on a $a\in I\cap W_a$.
Ainsi, $\forall\, V_L,\ f(a)\in V_L$.
Si $L=+\infty$, en prenant $V_L=[f(a)+1,+\infty[$, on aurait une contradiction.
Si $L=-\infty$, en prenant $V_L=\,]-\infty,f(a)-1]$, on aurait une contradiction.

On a donc $L\in\mathbb{R}$. Montrons que $L=f(a)$.
Pour cela, montrons que $\forall\,\varepsilon>0,\ |f(a)-L|\leqslant\varepsilon$.
Cela résulte de ce qui précède en prenant $V_L=[L-\varepsilon,L+\varepsilon]$.

17

On suppose l'assertion de gauche.
On veut montrer que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$ c'est-à-dire

$$\forall\, V_L \text{ voisinage de } L, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad f(u_n) \in V_L$$

Commençons la preuve.

Fixons V_L voisinage de L.

Comme $\lim_{x\to a} f(x) = L$, il existe W_a voisinage de a tel que $\quad \forall x \in I \cap W_a, \quad f(x) \in V_L$

Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, il existe n_0 tel que $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in I \cap W_a$.

BILAN : il existe n_0 tel que $\quad \forall n \geqslant n_0, \quad f(u_n) \in V_L$.

Autrement dit, $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

24

Soit V_L un voisinage de L.
Il s'agit de montrer qu'il existe W un voisinage de a tel que $f(I \cap W) \subset V_L$.
Par hypothèse, on a $g(t) \xrightarrow[t\to b]{} L$, donc il existe W_b un voisinage de b tel que $g(J \cap W_b) \subset V_L$.
Par hypothèse, on a $f(x) \xrightarrow[t\to a]{} b$, donc il existe W_a un voisinage de a tel que $f(I \cap W_a) \subset J \cap W_b$.
Ainsi $(g \circ f)(I \cap W_a) \subset V_L$.
On a donc réalisé le contrat en posant $W = W_a$.

28

Pour tout $x \geqslant 0$, on a :

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \leqslant \frac{|x-a|}{\sqrt{a}}$$

De $\frac{|x-a|}{\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on déduit $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to a]{} \sqrt{a}$.
Remarque. On vient de montrer que la fonction racine admet une limite en a, à savoir $\sqrt{a}$. On dira que la fonction racine est continue en a.

43

La fonction $f : \begin{array}{rcl}]0,1[\cup]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x\ln x}{x^2-1} \end{array}$ est continue sur son ensemble de définition, par opérations.

• Au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} \times x\ln x$$

On a

$$\frac{1}{x^2-1} \xrightarrow[x\to 0]{} -1 \qquad \text{et} \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Par produit, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Donc f est prolongeable par continuité en 0.

• Au voisinage de 1,
$$f(x) = \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln x}{x-1}$$
On a
$$\frac{1}{x+1} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} 1 \quad \text{par taux d'accroissement}$$
Par produit, $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{2}$.

Donc f est prolongeable par continuité en 1.

BILAN : f est prolongeable par continuité en 0 et en 1 et ce prolongement vaut
$$f : \begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x^2-1} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

46

$\Longrightarrow$ Supposons la version « de base ».

Montrons la version « sophistiquée ». Pour cela, donnons-nous une fonction continue et I un intervalle et montrons que $f(I)$ est un intervalle.

Posons $J = f(I)$ pour alléger les notations. Montrons que J est un intervalle.
Soit $y, y' \in J$. Prenons un élément y_0 compris entre y et y' et montrons que $y_0 \in J$.
Comme y est dans $f(I)$, il s'écrit $y = f(x)$ avec $x \in I$. Idem pour y' qui s'écrit $f(x')$ avec $x' \in I$.
Par construction, ce réel y_0 est compris entre $f(x)$ et $f(x')$, donc par le TVI basique, il existe x_0 compris entre x et x' tel que $y_0 = f(x_0)$.
On vérifie que x_0 est dans I :
on a $x, x' \in I$ et x_0 compris entre x et x'. Comme I est un intervalle, on en déduit $x_0 \in I$.
Par conséquent, y_0, qui s'écrit $f(x_0)$, est dans $f(I)$, donc est dans J.

$\Longleftarrow$ Supposons la version « sophistiquée ».

Montrons la version « de base » : montrons que tout y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'un élément de $[a,b]$.

Soit y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Il s'agit de montrer que y_0 s'écrit $f(c)$ avec $c \in [a,b]$, ou encore que $y_0 \in f\big([a,b]\big)$.
D'après la version « sophistiquée », $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle (car $[a,b]$ est un intervalle et f est continue) et qui contient bien sûr $f(a)$ et $f(b)$.
Résumons. On a y_0 valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ et $f\big([a,b]\big)$ est un intervalle qui contient $f(a)$ et $f(b)$. Donc $y_0 \in f\big([a,b]\big)$.

Preuve « topologique » du TVI basique avec y_0
On suppose $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$.
On considère $E = \Big\{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant 0\Big\}$.
C'est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (car $a \in E$) et majorée (par b), donc $\sup E$ existe et appartient à $[a,b]$.
Notons $c = \sup E$.

— On montre que $c \in E$ (ici, on preud l'axe des abscisses par la gauche).
Pour cela, utiliser la carac séquentielle de la borne sup.
On peut trouver $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.
D'où $c \in [a,b]$ (car $x_n \in [a,b]$).
Et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x_n) \leqslant 0$, d'où $f(c) \leqslant 0$.

— Montrons que $f(c) \geqslant 0$ (l'idée est de prendre l'axe des abscisses par la droite).
  - — Si $c = b$, alors $f(c) \geqslant 0$.
  - — Si $c < b$, alors $\forall\, t \in \,]c, b], f(t) > 0$ (intervalle non trivial !).
    Comme f est continue en c, la limite en c^+ existe et vaut $f(c)$.
    Par passage à la limite en c^+, on obtient $f(c) \geqslant 0$.

47

On considère une fonction auxiliaire, à savoir $g: \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$

Avec cette nouvelle fonction, la question se reformule en « montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ ».

— La fonction g est continue ; en effet, g est la somme de f et $x \mapsto -x$ qui sont continues.

— 0 est une valeur intermédiaire entre $g(0)$ et $g(1)$; en effet, comme f est à valeurs dans $[0,1]$, on a en particulier $f(0) \in [0,1]$ et $f(1) \in [0,1]$, d'où

$$0 \leqslant f(0) \qquad \text{et} \qquad f(1) \leqslant 1$$

D'où

$$0 \leqslant \underbrace{f(0) - 0}_{g(0)} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{f(1) - 1}_{g(1)} \leqslant 0$$

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g(1)$ et $g(0)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

48

Comme $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \big(f(x)\big)^2 = 1$, on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \big(f(x) = 1 \quad \text{ou} \quad f(x) = -1\big)$$

On va montrer que (qu'est-ce qu'il y a de différent avec ce qui est écrit ci-dessus ?)

$$\big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1\big) \quad \text{ou} \quad \big(\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1\big)$$

ce qui s'énonce encore

$$f \text{ est constante égale à } 1 \qquad \text{ou} \qquad f \text{ est constante égale à } -1$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \neq 1$ et qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) \neq -1$ (ainsi f n'est ni constante égale à 1 ni constante égale à -1).
Comme l'image de f est incluse dans $\{-1, 1\}$, on a nécessairement $f(a) = -1$ et $f(b) = 1$.
Ainsi -1 et 1 sont des valeurs atteintes par f (par a et b respectivement).
Or 0 est une valeur intermédiaire entre -1 et 1.
Comme f est continue, le TVI assure qu'il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Cela contredit la toute première phrase de la démonstration !

Deuxième preuve.
L'hypothèse se réécrit :

$$f(\mathbb{R}) \subset \{-1, 1\}$$

Comme f est continue et $\mathbb{R}$ est un intervalle, le TVI version sophistiquée affirme que $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.
Les intervalles contenus dans $\{-1, 1\}$ sont $\emptyset$, $\{1\}$ et $\{-1\}$.
Comme $f(\mathbb{R})$ est non vide, on a :

$$f(\mathbb{R}) = \{-1\} \qquad \text{ou bien} \qquad f(\mathbb{R}) = \{1\}$$

ce qui signifie que

$$f \text{ est constante égale à } -1 \qquad \text{ou} \qquad f \text{ est constante égale à } 1$$

49

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante continue.
Montrons qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

On considère $g : x \mapsto f(x) - x$.

- Cette fonction est strictement décroissante (somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante).
- D'après le théorème de la limite monotone appliqué à la fonction f décroissante, on en déduit que (WHY) que
$$g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$
Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
- Cette fonction g est continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe un unique c tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

51

Considérons l'ensemble des points jusqu'auxquels le résultat est vrai.
Plus précisément, notons

$$\mathrm{V} = \left\{ v \in [a, b] \mid f \text{ est bornée sur l'intervalle } [a, v] \right\}$$

La partie V est non vide (contient a) et elle est majorée (par b), donc elle admet une borne supérieure

$$s = \sup V$$

Remarquons que, comme $a \in V$ et que b majore V, on a $s \in [a, b]$.
Notre objectif va être de montrer qu'en fait $s = b$ et que $b \in V$, ce qui conclura.
Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est continue en s, donc f est bornée au voisinage de s : on peut trouver $\delta > 0$ tel que f soit bornée sur $[a, b] \cap [s - \delta, s + \delta]$.

Une difficulté (plus rédactionnelle que conceptuelle) de la preuve est que les nombres $s \pm \delta$ ne sont pas nécessairement éléments de $[a, b]$ (ils peuvent en sortir).
On va donc les « remplacer » par des nombres s^- et $s^+ \in [a, b]$.

— Par caractérisation epsilonesque de la borne supérieure, on peut trouver un élément $s^- \in V$ tel que $s^- \geqslant s - \delta$.

  Comme $s^- \in V$, la fonction f est bornée sur $[a, s^-]$.

— Posons $s^+ = \min(s+\delta, b)$ de sorte que $s^+ \in [a, b]$.

  Notons que l'on a ou bien $s^+ > s$ ou bien $s^+ = b$. On va montrer que l'on est nécessairement dans le deuxième cas.

Par construction, on a l'inclusion $[s^-, s^+] \subset [a, b] \cap [s-\delta, s+\delta]$.
Donc f est bornée sur $[s^-, s^+]$.
On en déduit que f est bornée sur $[a, s^-] \cup [s^-, s^+] = [a, s^+]$, donc $s^+ \in V$.
Comme $s^+ \in V$ et $s = \sup V$, on ne peut pas avoir $s^+ > s$, donc on a nécessairement $s^+ = b$.
Donc $b \in V$: cela signifie que f est bornée sur $[a, b]$.

Reste à montrer que f admet ses bornes supérieures et inférieures.
Montrons par exemple que f admet sa borne supérieure (la preuve pour la borne inférieure est similaire ou s'obtient en considérant $-f$).
Notons $M = \sup f$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que M n'est pas atteint par f. Ainsi, $\forall x \in [a, b],\ f(x) < M$.
On peut alors considérer la fonction suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{M - f(x)} \end{array}$$

Comme cette fonction est continue sur un segment, la première partie de la démonstration montre que g est bornée, donc en particulier majorée. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a, b],\ g(x) \leqslant A$$

Comme g est à valeurs positives, on a $A > 0$.
Par définition de g, on a alors

$$\forall x \in [a, b],\ f(x) \leqslant M - \frac{1}{A}$$

Donc $M - \dfrac{1}{A}$ est un majorant de f, qui est strictement inférieur au plus petit des majorants (à savoir M), d'où la contradiction.