Limites & Continuité

exercices

Limites

101 La routine !

Étudier l'existence et donner la valeur éventuelle des limites suivantes.

(i) $\dfrac{x\sin(x^2)}{1+x^2}$ en $+\infty$

(ii) $\cos(x^2)$ en $+\infty$

(iii) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ en $+\infty$

(iv) $(\ln x+\cos x)^2$ en $+\infty$

(v) $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en $+\infty$

(vi) $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ en 0

(vii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

(viii) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0

(ix) $\dfrac{x^2+\sin x}{1+x^2}$ en $+\infty$

(x) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$

(xi) $\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

(xii) $\dfrac{\cos(\mathrm{e}^x)+2\sin(2\mathrm{e}^{-x})+x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ en $-\infty$

(xiii) $\frac{\sqrt{|x^3-3x+2|}}{2x^2-x-1}$ en 1

(xiv) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$

(xv) $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+4}}$ en $+\infty$

(xvi) $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$ en 1

(xvii) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1

(xviii) $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$

(xix) $\ln x\ln(\ln x)$ en 1

(xx) $\dfrac{1-x}{\operatorname{Arccos} x}$ en 1

102 Un peu de partie entière

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \lfloor\frac{1}{x}\rfloor$ définie sur $\mathbb{R}^*$.
Dessiner le graphe de f sur $]0,+\infty[$.
Montrer que f admet une limite en $+\infty$, mais que f n'admet pas de limite en 0.

103 Encore de la partie entière

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 des fonctions suivantes.

(i) $x\mapsto\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ (ii) $x\mapsto x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$ (iii) $x\mapsto x^2\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$

104 Fonction périodique qui CV en $+\infty$

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique (avec $T>0$ bien sûr) ayant une limite finie ℓ en $+\infty$.
Que dire de f ?

105 TLM

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante.
Montrer que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

106 Limite à droite des fonctions croissantes

Soit $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ tel que $a<b$ et $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.
Montrer que la fonction $\Gamma:\begin{array}{ccc}]a,b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{\substack{t\to x\\ t>x}} f(t)\end{array}$ est bien définie et croissante.

Un peu de continuité

107 Une implication

Montrer avec la définition espilonesque que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer (sans epsilon si possible) que

$$f \text{ continue en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad |f| \text{ continue en } x_0$$

Quid de la réciproque ?

108 Fonction lipschitzienne

Soit $k \in]0, +\infty[$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne, c'est-à-dire une fonction vérifiant :

$$\forall\, x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$

Montrer que f est continue sur I : fournir une preuve directe, et une preuve epsilonesque.

109 Sup & Inf

Soit f, g deux fonctions continues sur I.
On définit $\sup(f, g) : x \mapsto \sup\{f(x), g(x)\}$. « Idem » pour $\inf(f, g)$.
Montrer que $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues sur I.

110 Indicatrice de $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est discontinue en tout point.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite de rationnels qui converge vers α. Idem avec une suite d'irrationnels.

111 Prolongements par continuité

Déterminer le domaine de définition, étudier la continuité et les éventuels prolongements par continuité des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto e^{-1/x^2}$

(ii) $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x - 1}$

(iii) $x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$

(iv) $x \mapsto \dfrac{(x^2 - 1)^2}{|x - 1|}$

(v) $x \mapsto \sin(x)\sin(1/x)$

(vi) $x \mapsto \cos(x)\cos(1/x)$

112 Condition suffisante de continuité

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
Montrer que si f est croissante et $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante, alors f est continue.

Utiliser le théorème de la limite monotone à f, puis à g.

Équations fonctionnelles

113 De $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$: inégalités

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.
   On suppose que $\quad \forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$.
   (b) Montrer que l'on n'a pas nécessairement une inégalité stricte dans la question précédente.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $\forall\, r < s \in \mathbb{Q},\ f(r) < f(s)$.
   Montrer que f est strictement croissante.

114 L'exo le plus classique !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ f(n) = n f(1)$.
3. Montrer que $\forall\, r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r f(1)$: pour cela, établir $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(nx) = n f(x)$.
4. On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax$.
5. Reprendre cet exercice en supposant seulement f continue en un certain point $x_0 \in \mathbb{R}$.

115 Équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est une fonction constante.
Comment généraliser ce résultat si $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(ax+b) = f(x)$ pour $|a| \neq 1$?

116 Équation fonctionnelle (bis)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$.

1. Donner un exemple d'une fonction f non constante vérifiant les hypothèses.
2. On suppose de plus que f est continue. Montrer que f est constante.

pour $x_0 > 0$ fixé, montrer que $f(x_0) = f\left(x_0^{\frac{1}{2^n}}\right)$, puis exploiter la continuité en deux points bien choisis, puis conclure par parité.

117 Équation fonctionnelle (ter)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+1}{2}\right) \;=\; f(x)$$

Montrer que f est constante.

118 Une variation du 115

On cherche toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(2x) - f(x) = x$.

1. Soit f une telle fonction.
   Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \geqslant 1$, on a
   $$f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}$$
2. Conclure.

Théorème des valeurs intermédiaires

119 Point fixe d'une application décroissante

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f possède un unique point fixe.

120 Équation

Montrer que l'équation $\cos x = \frac{1}{x}$ possède une infinité de solutions dans $]0, +\infty[$.

121 Fonctions dont les carrés sont égaux

Soit I un intervalle et $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \neq 0$ et $f(x)^2 = g(x)^2$.

1. Montrer que l'on a $f = g$ ou $f = -g$.
2. Montrer que ce résultat est faux dans chacun des cas suivants :
   (a) f n'est pas continue ;
   (b) f s'annule sur I ;
   (c) I n'est pas un intervalle.

122 Un TVI particulier

Soit $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

Montrer que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous réels $a < b$ et pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

123 ICI $\implies$ stricte monotonie

Soit f une fonction **I**njective et **C**ontinue sur un **I**ntervalle I.
On souhaite prouver que f est strictement monotone.

1. Est-ce que l'hypothèse « intervalle » est importante ? Et l'hypothèse « continue » ?
2. Désormais, on suppose que

$$\exists\,(a_1, b_1) \in I^2,\ \begin{cases} a_1 < b_1 \\ f(a_1) \geqslant f(b_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \exists\,(a_2, b_2) \in I^2,\ \begin{cases} a_2 < b_2 \\ f(a_2) \leqslant f(b_2) \end{cases}$$

et on pose

$$\varphi : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f\big((1-t)a_1 + ta_2\big) - f\big((1-t)b_1 + tb_2\big) \end{array}$$

Montrer que φ est bien définie.
Montrer que φ s'annule. Puis conclure.

124 Fonction continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Montrer que f est constante.

125 Image de cardinal fini

Que dire d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ?

126 Une fonction qui finira par qu'une seule valeur !

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que

$$\forall\, x < x' \in [a, b], \quad \exists\, x_0 \in [x, x'], \quad f(x_0) \in \Big\{ f(a), f(b) \Big\}$$

Montrer que f est constante.

127 Fonction à croissance linéaire

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell < 1$.
Montrer que f admet un point fixe.

128 Point fixe (2)

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive, ayant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que f admet un point fixe (c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) = x_0$).

129 Fonction ayant des limites égales

Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} \ell$.
Montrer que f ne peut pas être injective.

130 Théorème de la corde universelle

lien Wikipédia

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ a au moins une solution dans $[0, 1]$.
2. Idem avec $f(x) = f(x + \frac{1}{3})$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ telle que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.
4. Montrer que si $\alpha \in]0, 1[$ n'est pas l'inverse d'un entier, il est possible que l'équation $f(x+\alpha) = f(x)$ n'ait pas de solution. On pourra considérer

$$f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right)$$

131 Tout intervalle dont les bornes sont dans l'image est l'image d'un intervalle !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $\alpha < \beta$ dans l'image de f.
Montrer qu'il existe $a < b$ tel que $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

Théorème des bornes atteintes

132 Composition avec une fonction bornée

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

133 Théorème des bornes « non atteintes » !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique. Montrer que f est bornée.

134 Avec une limite en l'infini

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue ayant une limite finie en $+\infty$.

1. Montrer que f est bornée (utilisez les mots « voisinage » et « segment »).
2. Atteint-elle ses bornes ? Donner des exemples.
3. Peut-on dire la même chose si on remplace $[0, +\infty[$ par $]0, +\infty[$?

135 Minimum

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
Montrer que f admet un minimum.

136 Nombre d'antécédents

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et surjective.

1. Montrer que 0 admet un nombre infini d'antécédents.
2. Montrer que tout réel admet un nombre infini d'antécédents.

137 Interversion des quantificateurs !

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\quad \forall x \in [a, b], \quad f(x) < g(x)$
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < g(x) - \alpha$$

138 Fonctions coïncidant en un point : composée

Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ deux applications continues telles que $g \circ f = f \circ g$.
En particulier, l'image de ces deux applications est incluse dans $[0, 1]$.
L'objectif de l'exercice est de montrer :

$$\heartsuit \qquad \exists\, c \in [0, 1], \quad f(c) = g(c)$$

On commence par une question dans laquelle on note $f^{[n]}$ la fonction $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Idem pour g.

1. Dans cette question, on suppose la propriété $\triangle$ suivante

$$\triangle \qquad \exists\, b > 0, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f(x) \geqslant g(x) + b$$

   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad f^{[n]}(x) \geqslant g^{[n]}(x) + nb$$

   Puis mettre en évidence une absurdité.

2. Dans cette question, on souhaite montrer la propriété $\heartsuit$.
   En raisonnant par l'absurde, se ramener à la question 1, puis conclure.

139 Une nouvelle preuve du résultat précédent

Soit $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$.
On veut démontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = g(c)$.
Considérons l'ensemble des points fixes de f que l'on note F

$$F = \Big\{ x \in [0, 1] \mid f(x) = x \Big\}$$

1. Montrer que f admet un point fixe.
2. Montrer que F admet une borne inférieure m et une borne supérieure M.
3. Montrer que m et M sont dans F.
4. Montrer que F est stable par g.
5. Que peut-on dire de $g(m) - m$ et $g(M) - M$?
6. Conclure.

140 Maximum

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, on pose $M(x) = \max\limits_{t \in [0, x]} f(t)$.
Démontrer que M est bien définie et continue.

Autres

141 Fonction continue surjective

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue surjective.
Montrer que f prend toute valeur une infinité de fois.

Raisonner par l'absurde et utiliser le TVI et théorème des bornes atteintes.

142 Fonction 1-périodique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Montrer que $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ f(k) = 0$.
2. Montrer
$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$
Pour se donner des idées, on commencera par traiter le cas du couple $(1, 2)$.
3. En déduire que f est nulle.

143 Un exercice de khôlle

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continues telles que $f \circ f = \mathrm{id}_{[0,+\infty[}$.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 123.

144 Très difficile sans indication

Soit f continue et périodique définie sur $\mathbb{R}$.
Montrer $\forall\, a_0 > 0,\ \exists\, c \in \mathbb{R},\ f(a_0 + c) = f(c)$.

Exploiter la périodicité pour montrer que f admet un maximum, puis appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction bien choisie.

145 Un exo de l'X !

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$\forall\, a < b \in \mathbb{R}, \quad f\big([a, b]\big) \text{ est un segment de longueur } b - a$$

Prouver d'abord qu'une telle fonction est continue, puis injective, puis utiliser l'exercice 123, puis conclure !

146 Plus petite période et continuité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique non constante.
On veut prouver que f admet une plus petite période, c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que

- ⋆ $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- ⋆ pour tout $0 < \tau < T$, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $f(x + \tau) \neq f(x)$.

On pose
$$\mathcal{P} \;=\; \Big\{\tau > 0 \;\mid\; \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + \tau) = f(x)\Big\}$$

1. Justifier que $\mathcal{P}$ admet une borne inférieure que l'on notera T.
2. Démontrer que $T > 0$.
3. Démontrer que T est une période pour f.
4. Trouver une fonction non constante admettant tout rationnel pour période.

147 Promenade à vélo !

Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes pendant lequel le cycliste a parcouru 5 km.

148 Difficile ?

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

On pourra s'aider des variations de $t \mapsto t + \frac{1}{t}$ pour comprendre ce qu'il se passe !

149 **Une nouvelle preuve d'un résultat**

Soit $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $g \circ f = f \circ g$.
On veut démontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = g(c)$.
On peut démontrer (comment ?) que f admet un point fixe $s \in [0,1]$.
On définit par récurrence une suite (u_n) par $u_0 = s$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel u_n est un point fixe de f.
2. On suppose que la suite (u_n) est monotone. Démontrer le résultat.
3. On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.
   (a) Démontrer qu'il existe $\alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $(f-g)(\alpha) \cdot (f-g)(\beta) \leqslant 0$.
   (b) Conclure.

150 **Une suite implicite**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction strictement croissante sur $[a, b[$ et vérifiant $f(a) \leqslant 0, \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.
1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in [a, b[$.
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n).
3. Étudier la convergence de la suite (x_n) et déterminer sa limite éventuelle.

151

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la courbe représentative **C** est symétrique par rapport à la première bissectrice du repère.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(f(x)) = x$.
2. Démontrer que si **C** n'est pas la première bissectrice du repère, alors f n'est pas croissante.
3. En déduire, si on suppose de plus que f est continue, qu'elle est strictement décroissante.
4. Donner un exemple de fonction non décroissante dont la courbe représentative **C** est symétrique par rapport à la première bissectrice (sans être celle-ci).

Limites & Continuité

corrigés

104

Montrons que f est constante égale à ℓ en montrant que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ell$$

Fixons $x \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.
On a

$$\begin{cases} x + nT \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \\ f(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(x+nT) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Par T-périodicité de f, cette dernière limite se réécrit :

$$f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Ainsi, la *suite* constante égale à $f(x)$ converge vers ℓ.
Par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = \ell$.

Deuxième rédaction : on élève un peu de le débat.
On a

★ $$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$

Montrons que f est constante.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
On fait intervenir la suite récurrente $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + T \end{cases}$
D'après ★, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante égale à $f(x)$:

♣ $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = f(x)$$

On a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = x + nT$ avec $T > 0$).
Puis

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \\ \\ f(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Par passage à la limite dans ♣, on a $\ell = f(x)$.

— Commençons par montrer que la fonction f n'est pas majorée, c'est-à-dire que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > A.$$

Soit $A \in \mathbb{R}$.

Comme f est surjective, le réel $A+1$ admet un antécédent, donc on peut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = A + 1$.

On a donc trouvé un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > A$.

— Comme la fonction f est croissante et non majorée, le théorème de la limite monotone donne directement (pour l'extrémité droite $+\infty$ de l'intervalle $\mathbb{R}$), que

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

106

Rappel. Pour une fonction croissante $f :]a, b[\ \to \mathbb{R}$, alors en tout point intérieur $c \in]a, b[$, la fonction admet une limite finie à gauche et à droite en c et on a

$$\lim_{\substack{t \to c \\ t < c}} f(t) \ \leqslant \ f(c) \ \leqslant \ \lim_{\substack{t \to c \\ t > c}} f(t)$$

Revenons à l'exercice.
• Soit $x \in]a, b[$. Montrons que $\Gamma(x)$ est bien défini, c'est-à-dire montrons que $\lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t)$ existe.

Cela résulte du théorème de la limite monotone.
Donc la fonction Γ est bien définie.
De plus, on a :

$$\bigstar \qquad \forall\, x \in]a, b[,\ f(x) \leqslant \Gamma(x)$$

• Montrons que Γ est croissante.
Fixons $x_1 < x_2$ deux éléments de $]a, b[$.
Montrons que $\Gamma(x_1) \leqslant \Gamma(x_2)$.
Comme on a $f(x_2) \leqslant \Gamma(x_2)$ d'après $\bigstar$, il suffit de montrer que $\Gamma(x_1) \leqslant f(x_2)$ pour obtenir par transitivité l'inégalité convoitée.
Prouvons donc que $\Gamma(x_1) \leqslant f(x_2)$. Par croissance de f, on a

$$\forall\, t \in]x_1, x_2], \quad f(t) \leqslant f(x_2)$$

Or $f(t) \xrightarrow[\substack{t \to x_1 \\ t > x_1}]{} \Gamma(x_1)$.
Le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges entraîne que $\Gamma(x_1) \leqslant f(x_2)$.

108

Soit $a \in I$. Montrons que f est continue en a.
• Preuve directe avec les résultats du cours.
On a

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - f(a)| \ \leqslant \ k|x-a|$$

Comme $k|x-a| \xrightarrow[x \to a]{} 0$, on a d'après le théorème des Gendarmes $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

• Preuve en utilisant uniquement la définition.
Montrons que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \ |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Posons $\delta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ (licite car $k \neq 0$). On a bien $\delta > 0$.
D'après l'énoncé, on a

$$\forall x \in I, \quad |f(x) - f(a)| \ \leqslant \ k|x-a|$$

A fortiori, on a

$$\forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \quad |f(x) - f(a)| \ \leqslant \ k|x-a|$$

Et pour de tels x, on a $|x-a| \leqslant \delta$, d'où

$$\forall x \in [a-\delta, a+\delta] \cap I, \quad |f(x) - f(a)| \ \leqslant \ k\,\delta = \varepsilon$$

112

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
On va montrer que f est continue en x_0.

— Comme f est croissante, le théorème de la limite monotone assure l'existence de limites par valeurs inférieures et supérieures

$$\ell^- = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) \;\leqslant\; f(x_0) \;\leqslant\; \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = \ell^+$$

— Montrons $\ell^- \geqslant \ell^+$: d'après ce qu'il précède, il s'ensuivra que $\ell^- = f(x_0) = \ell^+$.
Ces deux égalités prouveront la continuité de f en x_0.

Comme $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante, les limites suivantes existent et sont finies

$$g(x) \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ x<x_0}]{} \gamma^- \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ x>x_0}]{} \gamma_+.$$

et on a $\gamma^- \geqslant g(x_0) \geqslant \gamma^+$.
Par définition, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, donc par opérations, on trouve

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ x<x_0}]{} x_0\,\gamma^- \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ x>x_0}]{} x_0\,\gamma^+$$

Par unicité de la limite pour la fonction f, on en déduit $\ell^- = x_0\gamma^-$ et $\ell^+ = x_0\gamma^+$.
Comme $\gamma^- \geqslant \gamma^+$, en multipliant par $x_0 \geqslant 0$, on obtient $\ell^- \geqslant \ell^+$.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
   On a

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

   De même $g(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$.
   Comme $u_n \in \mathbb{Q}$, l'énoncé fournit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(u_n) < g(u_n)$$

   Par passage à la limite dans les inégalités larges (ici qui sont strictes !), c'est licite car les limites sont finies, on obtient $f(x) \leqslant g(x)$.

   (b) Prenons $f = 0$ et $g : x \mapsto |x - \sqrt{2}|$. La fonction g est la fonction « distance à $\sqrt{2}$ ».
   Comme on a $\forall\, x \neq \sqrt{2},\ f(x) < g(x)$, on a bien $\forall\, x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   Pourtant, en prenant $x = \sqrt{2}$, on a égalité.

2. Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) < f(y)$.
   On peut trouver deux rationnels $r, s \in \mathbb{Q}$ tels que $x < r < s < y$.
   Par ailleurs, on peut trouver deux suites de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent respectivement vers x et y et telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leqslant x \quad \text{et} \quad y \leqslant y_n$$

   On a donc par transitivité

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leqslant r < s \leqslant y_n$$

   D'après l'énoncé, appliqué trois fois, on a

$$♣ \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) < f(r) < f(s) < f(y_n)$$

   On a

$$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

   Par passage à la limite dans les inégalités de ♣, on obtient :

$$f(x) \leqslant f(r) < f(s) \leqslant f(y)$$

   D'où $f(x) < f(y)$.

114

Notons ♠ l'hypothèse $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. En appliquant ♠ à $x = 0$ et $y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, puis $f(0) = 0$.
   Montrons que f est impaire.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant ♠ à $y = -x$, on obtient
   $$f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$
   Comme $f(0) = 0$, on a $0 = f(x) + f(-x)$.
   Bilan : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$.
2. On montre d'abord $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = nf(1)$ par récurrence.
   Les fonctions f et $x \mapsto f(1)x$ sont impaires, et coïncident sur $\mathbb{N}$, donc elles coïncident sur $\mathbb{Z}$.
3. Soit $r \in \mathbb{Q}$ que l'on écrit $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
   Montrons que $f(r) = rf(1)$, c'est-à-dire $f(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{p}{q}f(1)$, ou encore $qf(\dfrac{p}{q}) = pf(1)$.
   En exploitant l'indication avec $n = q$ et $x = \dfrac{p}{q}$, on a $qf(\dfrac{p}{q}) = f(p)$.
   En exploitant la question 2 avec $n = p$, on obtient $pf(1) = f(p)$.
4. On pose $a = f(1)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On peut trouver une suite de rationnels $(r_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
   D'après la question précédente et le fait que $r_n \in \mathbb{Q}$, on a
   $$\bigstar \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ f(r_n) = ar_n$$
   On a
   $$\begin{cases} r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \\ f \text{ continue en } x \text{ (car continue sur } \mathbb{R}) \end{cases} \qquad \text{donc} \qquad f(r_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$
   Par passage à la limite dans l'égalité ★, on a
   $$f(x) = ax$$
5. On suppose f seulement continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé une fois pour toutes.
   Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$, en montrant que f est continue en tout point $x_1 \in \mathbb{R}$.
   Soit $x_1 \in \mathbb{R}$.
   Montrons que $f(x_1 + h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_1)$.
   Avec ♠, on a l'égalité
   $$\forall h \in \mathbb{R},\ f\big((x_1 + h) + (x_0 - h)\big) \ = \ f(x_1 + h) + f(x_0 - h)$$
   On a donc en isolant le terme qui nous intéresse :
   $$\forall h \in \mathbb{R},\ f(x_1 + h) \ = \ f(x_1 + x_0) \ - \ f(x_0 - h)$$
   Comme f est continue en x_0, on a $f(x_0 - h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$, on a donc par passage à la limite :
   $$f(x_1 + h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_1 + x_0) - f(x_0)$$
   Or d'après ♠, on a $f(x_1 + x_0) - f(x_0) = f(x_1)$.
   D'où $f(x_1 + h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_1)$.
   Donc f est continue en x_1.

Idée. On fait intervenir la suite récurrente $\begin{cases} u_0 = \dots \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

La suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante égale à $f(u_0)$.
On ne peut pas vraiment exploiter cette idée, car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (suite géométrique de raison 2).

On pense alors à créer une suite convergente, par exemple en considérant $\begin{cases} v_0 = \dots \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$

La suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors constante égale à $f(v_0)$.
Ici, on a $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (WHY ?) ; par continuité de f en 0, on a $f(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$.

Solution. Montrons que f est constante en montrant que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
Fixons $x \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} v_0 = x \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$

En utilisant l'hypothèse avec v_{n+1}, on obtient que que la suite $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
Comme $v_0 = x$, on a :

$$\bigstar \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(v_n) = f(x)$$

On a

$$\begin{cases} v_n = \frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \\ f \text{ continue en } 0 \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

Par passage à la limite dans l'égalité $\bigstar$ (licite car les limites existent et sont finies), on obtient :

$$f(0) = f(x)$$

Bilan. La fonction f est constante.

Solution légèrement différente (moins bien).
On commence par reformuler l'hypothèse sous la forme $\forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = f(\frac{t}{2})$.
Puis on montre que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(t) = f\Big(\frac{t}{2^n}\Big) \qquad \text{ou bien} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(t) = f\Big(\frac{t}{2^n}\Big)$$

Montrons que f est constante en montrant que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0)$.
Fixons $x \in \mathbb{R}$ une fois pour toutes.
En utilisant l'hypothèse, on montre par récurrence

$$\bigstar \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x) = f\Big(\frac{x}{2^n}\Big)$$

On a

$$\begin{cases} \frac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \\ f \text{ continue en } 0 \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$

Par passage à la limite dans l'égalité $\bigstar$ (licite car les limites existent et sont finies), on obtient :

$$f(x) = f(0)$$

Idée.
L'idée est d'exploiter la continuité de f, donc de se ramener en un point (un réel) de $\mathbb{R}$ (qui n'est donc pas $+\infty$) ; à ce sujet, on ne sait pas si f admet une limite en $+\infty$.

Du coup, il sera pratique de montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t > 0,\ f(t) = f(t^{\frac{1}{2^n}}) \qquad \text{ou bien} \qquad \forall t > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(t) = f(t^{\frac{1}{2^n}})$$

Remarque. L'écriture $t^{\frac{1}{2^n}}$ nécessite $t > 0$ puisqu'elle cache un $\ln t$.
Si l'on prend un $t \geqslant 0$, on peut toujours se défendre en disant que l'on considère le prolongement par continuité en 0 de la fonction « puissance $\alpha = \frac{1}{2^n} > 0$ ».

On peut aussi travailler avec la quantité $\sqrt[\frac{1}{2^n}]{t}$ qui est bien définie en 0.

Autre idée, l'hypothèse dit que f est paire car

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f\big((-x)^2\big) = f(x^2) = f(x)$$

Il suffit donc de montrer que f est constante sur $[0, +\infty[$ (attention ici, 0 est inclus).
Ou bien, il suffit de montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^*$ et d'exploiter la continuité en 0.

À la fin de l'exercice, on comprendra que les fonctions (quelconques, non nécessairement continues) sont du type

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} c_1 & \text{si } x \in\,]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[\\ c_2 & \text{si } x \in\,]-1, 0[\, \cup\,]0, 1[\\ c_3 & \text{si } x = 0 \\ c_4 & \text{si } x \in \{-1, 1\} \end{cases} \end{array}$$

Il est alors facile de trouver une fonction non constante vérifiant les hypothèses (prendre par exemple, $c_1 = c_2 = c_4 = 2024$ et $c_3 = 3$) :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2024 & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Début de la preuve.
Montrons que f est constante sur $]0, +\infty[$.
Fixons $x \in\,]0, +\infty[$ une fois pour toutes.
En utilisant l'hypothèse, on montre par récurrence

$$\bigstar \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$$

On a

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ f \text{ continue en } 1 \end{cases} \qquad \text{donc par composition de limites, on a : } \quad f\big(x^{\frac{1}{2^n}}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$$

Par passage à la limite dans l'égalité $\bigstar$ (licite car les limites existent et sont finies), on obtient :

$$f(x) = f(1)$$

On a donc montré

$$\clubsuit \qquad \forall x \in\,]0, +\infty[,\ f(x) = f(1)$$

Comme f est paire (WHY ?), on en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = f(1)$$

La fonction est continue en 0, donc sa limite en 0^+ existe et est finie et vaut $f(0)$.
En passant à la limite quand $x \to 0^+$ dans $\clubsuit$, on obtient

$$f(0) = f(1)$$

Bilan. On a donc $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1)$. Donc f est constante.

119

On considère $g : x \mapsto f(x) - x$.

— Cette fonction est strictement décroissante (somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante).

— D'après le théorème de la limite monotone appliqué à la fonction f décroissante, on en déduit que (WHY) que

$$g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

— Cette fonction g est continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, il existe un unique c tel que $g(c) = 0$, donc tel que $f(c) = c$.

120

Soit $f : x \mapsto \cos x - \frac{1}{x}$ définie sur $]0, +\infty[$.
La fonction f est continue.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$f(2k\pi) = 1 - \frac{1}{2k\pi} \geqslant 0 \qquad\qquad f(2k\pi + \pi) = -1 - \frac{1}{2k\pi + \pi} < 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $x_k \in [2k\pi, 2k\pi + \pi[$ tel que $f(x_k) = 0$.
On vient de trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(x_k) = 0 \quad \text{ et } \quad x_k \in [2k\pi, 2k\pi + \pi[$$

Reste à montrer que la suite prend une infinité de valeurs.
Comme les intervalles $[2k\pi, 2k\pi + \pi[$ sont disjoints deux à deux, on a

$$\forall\, k \neq \ell \in \mathbb{N},\ x_k \neq x_\ell$$

Ainsi, f s'annule une infinité de fois.
Donc l'équation admet une infinité de solutions.

121

1. La fonction f est continue sur l'intervalle I, et ne s'annule pas sur cet intervalle. Grâce à la deuxième condition, il en va de même de g (pour tout $x \in I$, on a $g(x)^2 = f(x)^2 \neq 0$, donc $g(x) \neq 0$).

   Par un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que f et g sont de signe constant. Quitte à remplacer f par $-f$ et/ou g par $-g$ (ce qui ne change ni les hypothèses de l'exercice, ni la conclusion à laquelle on souhaite aboutir), on peut supposer $f, g > 0$.

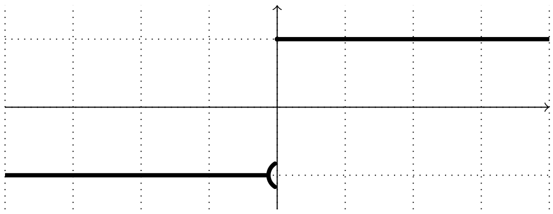
   Montrons qu'alors $f = g$.

   Soit $x \in I$. On a $f(x)^2 = g(x)^2$. En passant à la racine carrée, il vient $|f(x)| = |g(x)|$.

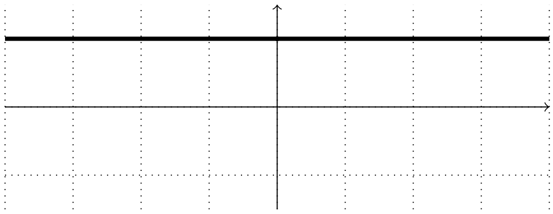
   Vu que f et g sont à valeurs > 0, il s'ensuit $f(x) = g(x)$, ce qui conclut.

2. Donnons rapidement des contre-exemples, en laissant au lecteur le soin de vérifier les détails.

   (a) Exemple avec f discontinue.

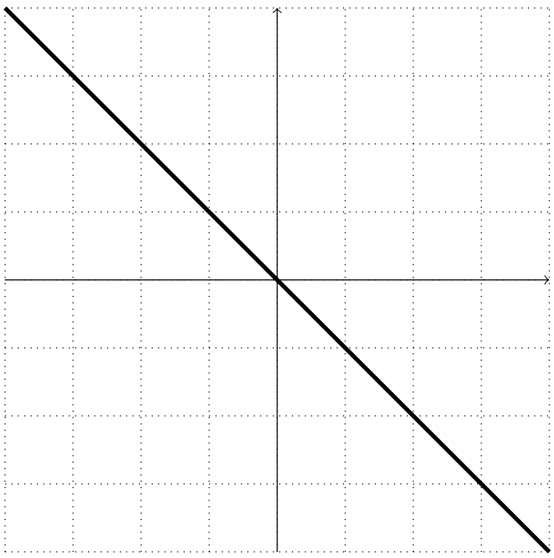
   

   f

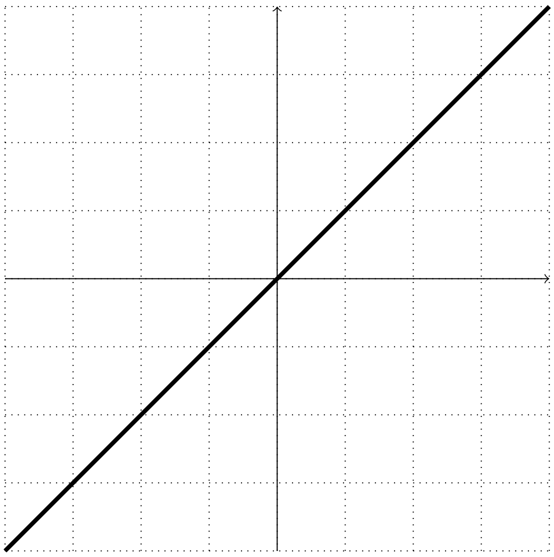
   

   g

   (b) Exemple avec un point d'annulation

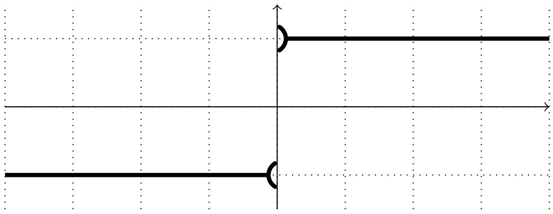
   

   f

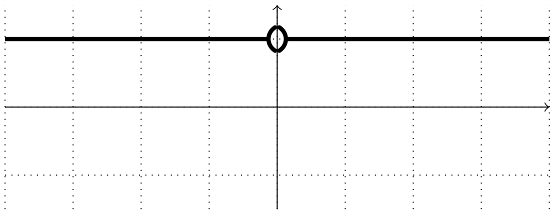


g

(c) Exemple dont le domaine n'est pas un intervalle.



f



g

Commentaires. La fonction f est non continue en 0 (WHY, ce n'est pas évident) et pourtant la fonction f vérifie le TVI.

Preuve.

— Cas $a > 0$. Alors la fonction est continue sur $[a, b]$, donc le TVI s'applique.

— Cas $a = 0$. On va se ramener à un intervalle du type $[a', b]$ avec $a' > 0$ et $f(a') = f(a)$. Il faut bien sûr imposer $a' < b$.

Comme $0 < b$, on peut trouver un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \dfrac{1}{n_0 \pi} < b$.

Posons $a' = \dfrac{1}{n_0 \pi}$. On a $f(a') = 0$.

Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors y est compris entre $f(a')$ et $f(b)$.
Comme f est continue sur $[a', b]$, le TVI fournit un $c \in [a', b]$ tel que $f(c) = y$.
A fortiori, ce c appartient à $[a, b]$, donc répond à la question.

127

- si $f(0) = 0$, alors 0 est un point fixe de f.
- Si $f(0) \neq 0$, posons $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

  La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$

  On a

  $$g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell < 1$$

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a \in]0, +\infty[$ tel que $g(a) = 1$.

  On a alors $f(a) = a$.

  Donc f admet un point fixe.

128

On considère $g: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-x \end{array}$

Cette fonction g est continue (WHY ?).

- En 0, on a $g(0) = f(0)$, donc $g(0) \geqslant 0$ (car f est positive).
- En $+\infty$, on a, par opération sur les limites $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ (car f admet une limite finie).

1$^{\text{ère}}$ rédaction.

Comme $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, on peut appliquer la définition epsilonesque et on obtient qu'il existe $x_1 \in [0,+\infty[$ tel que $\forall\, x \geqslant x_1,\ g(x) \leqslant -2023$.

En particulier, $g(x_1) \leqslant -2023$.

Les deux valeurs atteintes $g(0)$ et $g(x_1)$ vérifient $g(0) \geqslant 0$ et $g(x_1) \leqslant -2023$.

Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre ces deux valeurs atteintes.

Comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure que 0 est une valeur atteinte, autrement dit, il existe $x_0 \in [0, x_1]$ tel que $g(x_0) = 0$.

2$^{\text{ème}}$ rédaction. Comme g est continue, l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par g, à savoir $g\big([0,+\infty[\big)$, est un intervalle en vertu du théorème des valeurs intermédiaires.

Par définition, cet intervalle contient $g(0)$; comme $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, sa borne inférieure est $-\infty$. Ainsi, cet intervalle contient $]-\infty, g(0)]$:

$$]-\infty, g(0)] \ \subset\ g\big([0,+\infty[\big) \qquad \text{(attention ce n'est pas forcément une égalité, WHY ?).}$$

Comme $g(0) \geqslant 0$, on a $0 \in\ ]-\infty, g(0)]$, donc 0 appartient à $g\big([0,+\infty[\big)$.

Dit autrement, il existe $x_0 \in [0,+\infty[$ tel que $g(x_0) = 0$, donc tel que $f(x_0) = x_0$.

129

Supposons par l'absurde f injective. On va donner deux façons d'obtenir une contradiction.

Première méthode. *A fortiori*, f ne peut pas être constante. On peut donc trouver $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) \neq \ell$.

Prenons un nombre réel m compris strictement entre $f(x_0)$ et ℓ (si $\ell \in \mathbb{R}$, on peut choisir simplement $m = \frac{f(x_0)+\ell}{2}$, et si $\ell = \pm\infty$, on peut prendre $m = f(x_0) \pm 1$).

— Comme on a (suivant les cas)

$$f(x_0) < m < \ell \qquad \text{ou} \qquad f(x_0) > m > \ell,$$

et que la fonction f est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a, x_0]$, le théorème des valeurs intermédiaires généralisé entraîne l'existence de $c_- \in]a, x_0]$ tel que $f(c_-) = m$. Comme $f(x_0) \neq m$, on a même $c_- \in]a, x_0[$.

— De la même façon, on obtient l'existence de $c_+ \in]x_0, b[$ tel que $f(c_+) = m$.

Ainsi, $c_- < c_+$ et $f(c_-) = f(c_+)$, donc f n'est pas injective.

Deuxième méthode. Un résultat de ce TD (cf. l'exercice 123) affirme que toute fonction $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue et injective est nécessairement strictement monotone.

Si l'on prend deux éléments $c < d$ appartenant à $]a,b[$, on a alors

— si f est strictement croissante, $\lim\limits_a f \leqslant f(c) < f(d) \leqslant \lim\limits_b f$;

— si f est strictement décroissante, $\lim\limits_a f \geqslant f(c) > f(d) \geqslant \lim\limits_b f$.

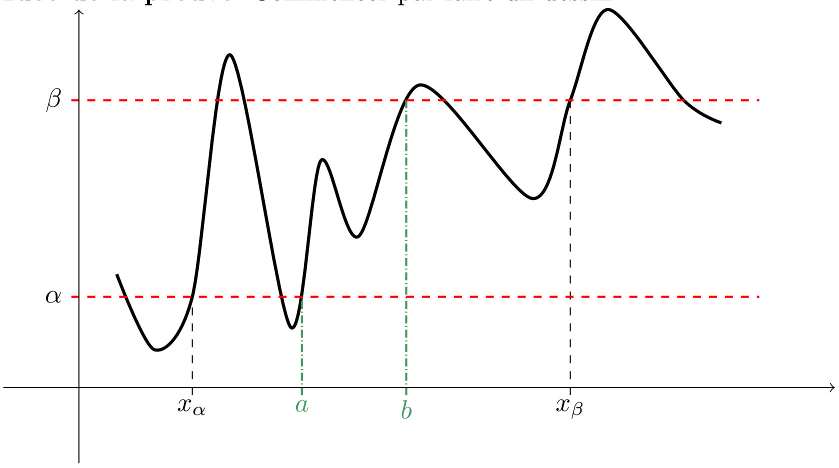
les inégalités larges provenant à chaque fois du théorème de la limite monotone.

Cela contredit directement l'hypothèse $\lim\limits_a f = \lim\limits_b f$, et conclut.

1. On considère $g : \begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x + \frac{1}{2}) - f(x) \end{array}$
   Cette fonction g est continue (WHY ?).
   On a
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} g(0) & = & f(\frac{1}{2}) - f(0) \\ g(\frac{1}{2}) & = & f(1) - f(\frac{1}{2}) \end{array} \right.$$
   Par somme et avec l'hypothèse $f(0) = f(1)$, on obtient $g(0) + g(\frac{1}{2}) = 0$.
   Donc ces deux réels de somme nulle sont de signe différent.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
   A fortiori, ce c est dans $[0, 1]$.
2. On considère $g : \begin{array}{ccc} [0, \frac{1}{3}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x + \frac{1}{3}) - f(x) \end{array}$
   Cette fonction g est continue (WHY ?).
   On a
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} g(0) & = & f(\frac{1}{3}) - f(0) \\ g(\frac{1}{3}) & = & f(\frac{2}{3}) - f(\frac{1}{3}) \\ g(\frac{2}{3}) & = & f(1) - f(\frac{2}{3}) \end{array} \right.$$
   Par somme et avec l'hypothèse $f(0) = f(1)$, on obtient $g(0) + g(\frac{1}{3}) + g(\frac{2}{3}) = 0$.
   Donc, parmi ces trois réels de somme nulle, il en existe au moins deux de signe distinct, autrement dit il existe $x < x' \in \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ tel que $g(x)g(x') \leqslant 0$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [x, x']$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = f(c + \frac{1}{3})$.
   A fortiori, ce c est dans $[0, 1]$.
3. On peut prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe au moins une solution à l'équation $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ (on a traité les cas $n = 2$ et $n = 3$; quid du cas $n = 1$?).

   Je vous laisse faire la preuve. Il n'y a pas besoin de faire de récurrence. Il suffit de fixer n et de regarder comment généraliser les cas précédents. Il y aura sûrement du télescopage...
4. On vérifie facilement que f est continue et $f(0) = f(1)$. D'autre part, après calculs, on constate que, pour $x \in \mathbb{R}$, l'égalité $f(x) = f(x + \alpha)$ équivaut à l'égalité $\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) = 1$. Cette dernière égalité n'est pas vérifiée car $\frac{1}{\alpha}$ n'est pas entier.
   Ainsi, l'équation $f(x) = f(x + \alpha)$ n'a pas de solution.

Idée de la preuve. Commencer par faire un dessin.



Début de la preuve. Comme α et β sont dans l'image de f, il existe x_α et $x_\beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_\alpha) = \alpha$ et $f(x_\beta) = \beta$.
On va supposer $x_\alpha < x_\beta$. Il faudra aussi traiter le cas $x_\alpha > x_\beta$.

• Considérons

$$A = \Big\{x \in]-\infty, x_\beta],\ f(x) \leqslant \alpha\Big\}$$

Montrons que $\sup A$ existe (et même que $\max A$ existe !).

— A est non vide car $x_\alpha \in A$ (on a $x_\alpha \leqslant x_\beta$ (on a même une inégalité stricte) et $f(x_\alpha) \leqslant \alpha$ (même égalité)).

— A est majorée par x_β (car $A \subset]-\infty, x_\beta]$)

Ainsi A admet une borne supérieure. Posons $a = \sup A$. On a en particulier $a \leqslant x_\beta$ (car a est le plus petit des majorants et x_β est un majorant de A).

• Montrons que $a = \sup A$ appartient à A.
Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to a$. Comme (u_n) est une suite d'éléments de A, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \leqslant \alpha$$

On a

$$\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f \text{ continue en } a \end{cases} \quad \text{donc par composition de limites, on a :} \quad f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$$

Par passage à la limite dans l'inégalité large, on a

$$f(a) \leqslant \alpha$$

• Considérons maintenant

$$B = \Big\{x \in [a, +\infty[,\ f(x) \geqslant \beta\Big\}$$

— B est non vide : en effet, $x_\beta \in A$ (on a vu que $a \leqslant x_\beta$ et on sait que $f(x_\beta) \geqslant \beta$ (on a même une égalité))

— B est minorée par a (car $A \subset [a, +\infty[$)

Donc la borne inférieure de B existe. Posons $b = \inf B$ existe.
On montre de la même façon que $f(b) \geqslant \beta$.

• On a donc en particulier $f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant f(b)$.
Le TVI permet de montrer que $[\alpha, \beta] \subset f([a, b])$. En effet, soit $y \in [\alpha, \beta]$, a fortiori, y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le TVI implique qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

• Montrons que $f([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$.
Par définition de la borne supérieure a, on a $\forall x \in]a, x_\beta] \subset]a, b], f(x) > \alpha$ (inégalité $\star_\alpha$).
Par définition de la borne inférieure b, on a $\forall x \in [a, b[, f(x) < \beta$ (inégalité $\star_\beta$).
▷ Les inégalités $\star_\alpha$ et $\star_\beta$ montrent $f(]a, b[) \subset]\alpha, \beta[$.

Par passage à la limite en a^+ dans $\star_\alpha$ et continuité de f, on a $f(a) \geqslant \alpha$.

Par passage à la limite en b^- dans $\star_\beta$ et continuité de f, on a $f(b) \leqslant \beta$.
$\triangleright$ Avec ce qui précède, on a donc $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

Les deux $\triangleright$ montrent $f([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$.

L'autre cas. Pour le cas $x_\alpha > x_\beta$, on peut recommencer toute la preuve en considérant la partie A que l'on adapte :

$$A = \Big\{ x \in \,]-\infty, x_\alpha],\ f(x) \geqslant \beta \Big\}$$

On montre que A admet une borne supérieure notée a, et on adapte ensuite la définition de B

$$B \ = \ \Big\{ x \in [a, +\infty[,\ f(x) \leqslant \alpha \Big\}$$

Ou bien. Pour le cas $x_\alpha > x_\beta$, on peut se ramener au cas précédent en considérant $g : x \mapsto f(-x)$. Cette fonction g est continue ; de plus, les réels α et β sont dans l'image de g. Donc g vérifie les mêmes conditions que dans l'énoncé.
En posant $x'_\alpha = -x_\alpha$ et $x'_\beta = -x'_\beta$, on a donc $x'_\alpha < x'_\beta$ et $g(x'_\alpha) = \alpha$ et $g(x'_\beta) = \beta$.
On est donc ramené au cas précédent.
On obtient donc l'existence de a' et b' tels que $a' < b'$ et $g([a', b']) = [\alpha, \beta]$.
Mais par définition de g, on a $g([a', b']) = f([-b', -a'])$ (procéder par double inclusion si ce n'est pas évident).
Il suffit pour finir de poser $a = -b'$ et $b = -a'$. Et on obtient $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$.

133

Comme f est périodique, on peut considérer $T \in]0, +\infty[$ une période de f.
Comme f est continue, la restriction de f au SEGMENT $[0, T]$ est bornée (théorème des bornes « non atteintes » !).
Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x_0 \in [0, T],\ |f(x_0)| \leqslant M$.
Il ne reste plus qu'à montrer que ce M convient pour tous les autres réels.
Soit donc $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x - nT \in [0, T]$ (cet entier est même unique si on ouvre la borne droite, c'est-à-dire $x - nT \in [0, T[$, cf. le lemme ci-dessous qu'il faut savoir démontrer).
On peut appliquer la $\forall$-assertion avec $x_0 = x - nT$, et on obtient $|f(x - nT)| \leqslant M$.
Or, par T-périodicité de f, on a $f(x) = f(x - nT)$.
On en déduit $|f(x)| \leqslant M$.

Lemme.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $T \in]0, +\infty[$.

Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\begin{cases} x = qT + r \\ 0 \leqslant r < T. \end{cases}$

135

Rappel. On rappelle la définition de $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ pour une fonction définie sur I (ici $I=\mathbb{R}$) :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]-\infty, a],\ f(x) \geqslant M$$

On peut se permettre de choisir a *négatif*.
En effet, si on trouve un a positif tel que $\forall x \in I \cap]-\infty, a], \dots$, alors a fortiori, on aura $\forall x \in I \cap]-\infty, -3], \dots$ et on pourra donc prendre $a=-3$.

De même pour la limite en $+\infty$, on peut choisir un voisinage du type $[b, +\infty[$ avec b *positif*.
Fin du rappel.

Idée générale de la preuve.
Pour montrer l'existence d'un minimum pour une fonction continue, il faut penser au théorème des bornes atteintes. Pour l'utiliser, il faut donc faire naître un SEGMENT.

Déroulement de la preuve.
Considérer une image de f, c'est-à-dire un certain « f de quelqu'un », par exemple, $f(0)$.
Exploiter ensuite les limites en $\pm\infty$. Ces deux limites font naître $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$ tels que ...
Enfin, examiner f sur le SEGMENT $[a, b]$.
Recoller les morceaux !

Début de la preuve. Montrons que f admet un minimum.

- Comme $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, il existe $a \leqslant 0$ tel que $\forall x \in]-\infty, a],\ f(x) \geqslant f(0)$.
  Comme $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $b \geqslant 0$ tel que $\forall x \in [b, +\infty[,\ f(x) \geqslant f(0)$.
  Pour l'instant, on obtient que $f(0)$ est un minorant de f sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.

- Sur le SEGMENT $[a, b]$, la fonction f est continue.
  D'après le théorème des bornes atteintes, f admet un minimum, noté $m = \min\limits_{[a,b]} f$.

- Comme $0 \in [a, b]$, on a en particulier $m \leqslant f(0)$.
  Donc m est un minorant de f sur $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$.

On a donc montré que m est un minorant de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.
De plus, comme m est le minimum de f sur $[a, b]$, le réel m est atteint par f (par un certain $x_m \in [a, b]$).
Ces deux informations montrent que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Ainsi, f admet un minimum (à savoir m).

137

On pose $\varphi : x \mapsto g(x) - f(x)$.
L'inégalité de l'hypothèse se reformule en disant que φ est à valeurs strictement positives sur $[a, b]$.
Or φ est continue en tant que différence de deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$. En vertu du théorème des bornes atteintes, cette fonction φ est bornée et atteint ses bornes.
Posons $m = \min\limits_{[a,b]} \varphi$ qui est > 0, car m est atteint par φ.
On a, par définition de m,

$$\forall\, x \in [a, b], \quad m \leqslant \varphi(x)$$

Posons $\alpha = \frac{m}{2} > 0$. On a $\alpha < m$, d'où

$$\forall\, x \in [a, b], \quad \alpha < \varphi(x)$$

On a bien montré l'existence d'un certain $\alpha > 0$ tel que $\alpha < g(x) - f(x)$.

1. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété « $\forall x \in [0,1],\ f^{[n]}(x) \geqslant g^{[n]}(x) + nb$ »

 Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_1$ est vraie d'après $\triangle$.

 Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ fixé. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie.

 Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$, c'est-à-dire montrons $\forall z \in [0,1],\ f^{[n+1]}(z) \geqslant g^{[n+1]}(z) + (n+1)b$.

 Fixons $z \in [0,1]$. On a :

$$f^{[n+1]}(z) \overset{\text{def}}{=} f^{[n]}\Big(f(z)\Big) \overset{\mathcal{H}_n}{\geqslant} g^{[n]}\Big(f(z)\Big) + nb \qquad (\mathcal{H}_n \text{ avec } x = f(z), \text{ qui est bien un élément de } [0,1])$$

 Comme f et g commutent, par récurrence immédiate, f et $g^{[n]}$ commutent, donc l'inégalité précédente se réécrit :

$$f^{[n+1]}(z) \ \geqslant\ f\Big(g^{[n]}(z)\Big) \ +\ nb$$

 D'après $\triangle$ avec $x = g^{[n]}(z)$, la quantité $f\Big(g^{[n]}(z)\Big)$ est supérieure à $g\Big(g^{[n]}(z)\Big) + b$, donc on obtient :

$$f^{[n+1]}(z) \ \geqslant\ \underbrace{\left(g\Big(g^{[n]}(z)\Big) + b\right) + nb}_{=g^{[n+1]}(z)+(n+1)b}$$

 D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

 • **Mettons en évidence une absurdité.** Fixons $x_0 \in [0,1]$. L'inégalité de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{[n]}(x_0) \geqslant g^{[n]}(x_0) + nb$$

 doit se comprendre

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n \geqslant \beta_n + nb$$

 où on a posé $\alpha_n = f^{[n]}(x_0)$ et $\beta_n = g^{[n]}(x_0)$.

 Ces deux suites sont bornées, car $f^{[n]}$ et $g^{[n]}$ sont à valeurs dans $[0,1]$.

 Comme les images de f et g sont incluses dans $[0,1]$, en composant n fois, on obtient que les images de $f^{[n]}$ et $g^{[n]}$ sont également incluses dans $[0,1]$.

 Ainsi, on a $1 \geqslant \alpha_n$ et $\beta_n \geqslant 0$.

 On obtient $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \geqslant 0 + nb$.

 Comme $b > 0$, on a $nb \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

 En passant à la limite dans l'inégalité large précédente, on obtient « $1 \geqslant +\infty$ », ce qui est absurde.

2. • La négation de $\heartsuit$ est $\qquad \forall c \in [0,1], \quad f(c) \neq g(c)$.

 Autrement dit, on suppose que la fonction $f - g$ ne s'annule pas.

 • On a $f(0) - g(0) \neq 0$.

 Il y a donc deux cas : soit cette quantité est strictement positive, soit elle est strictement négative.

 Mais quitte à inverser les rôles jouer par f et g, on peut supposer (sans perte de généralité !) que $f(0) - g(0) > 0$.

 • Cette fonction h possède plusieurs propriétés (héritées par celles que possèdent f et g) :

 ⋆ h est continue en tant que différence de deux fonctions continues

 ⋆ $h(0) > 0$ (car $f(0) > g(0)$).

 ⋆ h ne s'annule pas, c'est-à-dire $\forall x \in [0,1],\ h(x) \neq 0$ en vertu de la négalité de $\heartsuit$.

 Par conséquent, d'après le TVI, la fonction h est strictement positive.

 Or la fonction h est définie sur le **segment** $[0,1]$ et est continue.

 D'après le théorème des bornes atteintes, h est bornée et atteint ses bornes.

 On pose $m = \min\limits_{[a,b]} h$ qui est > 0 car h est strictement positive. On a donc

$$\forall x \in [0,1], \quad h(x) \geqslant m$$

 On a donc montré qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ g(x) - f(x) \geqslant m$.

On récite maintenant la question 1 pour arriver à une absurdité.

Voilà ce qu'il s'est passé :
en supposant la négation de $\heartsuit$, on arrive à démontrer $\triangle$, qui nous fait aboutir à une absurdité.
Bilan : l'assertion $\heartsuit$ est vraie ! Youpi !

139

La preuve du résultat. Je vous laisse répondre ensuite à chaque question !
• Comme f est continue, un TVI bien ficelé appliqué à la fonction $x \mapsto f(x) - x$ fournit l'existence d'un point fixe pour f.
Ainsi, F est non vide.

• D'autre part, F est une partie bornée (car incluse dans $[0, 1]$), donc F admet une borne inférieure m et une borne supérieure M.

— On montre facilement que $m \in [0, 1]$ (tout d'abord, le fait que 0 est un minorant de F fournit $m \geqslant 0$; et comme m est un minorant de F, il est inférieur à tout élément de F (eux-mêmes inférieurs à 1), donc par transitivité, on a $m \leqslant 1$).

— Comme $m = \inf F$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers m.

Autrement dit, on a les deux informations suivantes $\begin{cases} \forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = x_n \\ x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} m \end{cases}$

Par continuité de f en m, on en déduit que $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(m)$.

Par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient $f(m) = m$.

Résumons. On a $m \in [0, 1]$ et $f(m) = m$, donc $m \in F$.
De même, on montre que $M \in F$.

• Comme f et g commutent, on montre que F est stable par g.
Comme $m \in F$, on en déduit $g(m) \in F$.
Comme m est un minorant de F, on a $m \leqslant g(m)$. De même, on a $g(M) \leqslant M$.

• Comme m et M sont dans F, on en déduit que $m = f(m)$ et $M = f(M)$.
On a donc $g(m) - m = g(m) - f(m) \geqslant 0$ et $g(M) - M = g(M) - f(M) \leqslant 0$.

• La fonction $g - f$ est continue et change de signe (car $(g - f)(m) \geqslant 0$ et $(g - f)(M) \leqslant 0$).
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [m, M]$ tel que $(g - f)(c) = 0$ donc tel que $f(c) = g(c)$.

141

Idée. Le point clef est que f ne peut être ni minorée ni majorée sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$, car elle serait sinon minorée ou majorée sur $\mathbb{R}_+$ tout entier en vertu de la compacité de $[0, A]$, ce qui contredit violemment la surjectivité.

Début de la preuve.
Montrons que f prend toute valeur une infinité de fois.
Raisonnons par l'absurde.
Supposons qu'il existe une valeur y que f prend seulement un nombre fini de fois.
On peut alors trouver $A \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geqslant A, f(x) \neq y$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que la fonction f restreinte à $[A, +\infty[$ est ou bien à valeurs dans $]-\infty, y[$ ou bien dans $]y, +\infty[$.
Donc, sur $[A, +\infty[$, f est ou bien majorée ou bien minorée par y.
Or f étant continue sur le segment $[0, A]$, est bornée sur le segment $[0, A]$ (théorème des bornes atteintes).
Donc f est bornée sur $[0, +\infty[$ ce qui contredit la surjectivité.

1. Comme f est 1-périodique, on a $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ f(0) = f(n \times 0)$.
   Exploitons l'hypothèse de l'énoncé avec $x = 0$, on trouve $f(n \times 0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'où $f(0) = 0$.
   Comme f est 1-périodique, on a $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = f(0)$ (preuve par récurrence immédiate).
   D'où $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = 0$.
2. **Idée.** Considérons le cas particulier de $\frac{1}{2}$, et montrons que $f(\frac{1}{2}) = 0$.
   Comme f est 1-périodique, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \cdots = f\left(\frac{2k+1}{2}\right)$$

   Comme $f(nx) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a par extraction $f\big((2k+1)x\big) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.
   En prenant $x = \frac{1}{2}$, on en déduit $f\left(\frac{2k+1}{2}\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.
   On a donc (WHY ?)

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

   Cas général. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Montrons $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.
   Par 1-périodicité de f, on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f\left(\frac{p}{q}\right) \ = \ f\left((qk+p)\frac{1}{q}\right)$$

   Comme $q > 0$, on a, pour k assez grand $kq + p \in \mathbb{N}$, (pour $k \geqslant -\frac{p}{q}$ précisément).
   Comme $f(nx) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a par extraction $f\big((qk+p)x\big) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.
   En prenant $x = \frac{1}{q}$, on en déduit $f\left(\frac{qk+p}{q}\right) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.
   On a donc (WHY ?)

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$$

3. À la question précédente, on a montré que f est nulle sur $\mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de f, on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}$ (il faut savoir faire la preuve de cela).

143

La fonction f est injective (bijective) et continue sur un intervalle.
« Donc » f est strictement monotone.
Comme $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$, on en déduit que f est strictement croissante.
S'il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) < x_0$ alors $x_0 = f\big(f(x_0)\big) < f(x_0)$: contradiction.
Idem : il ne peut pas existe de x_1 tel que $f(x_1) > x_1$.
Bilan : $f = \text{id}$.

144

La fonction f est périodique, disons de période $T > 0$.
Sur le segment $[0, T]$, la fonction f qui est continue admet donc un maximum atteint en x_M.
Ainsi, $f(a_0 + x_M) - f(x_M) \leqslant 0$ et $f(x_M) - f(a_0) \geqslant 0$.
La fonction $x \mapsto f(a_0 + x) - f(x)$ qui est continue, change de signe. D'après le TVI, elle s'annule.

145

Voici des idées en vrac. Soit f une telle fonction.

— La fonction f est continue ; en fait, f est 1-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

En effet, constater que pour $x < y$, les réels $f(x)$ et $f(y)$ sont dans $f([x,y])$, qui est un segment de longueur $y - x$.

— Montrons que f est injective. Par l'absurde.
Supposons qu'il existe $a < b$ tel que $f(a) = f(b)$.
Appliquons le théorème des bornes atteintes sur le segment $[a, b]$.
Alors il existe x_m et x_M tel que $f\big([a,b]\big) = [f(x_m), f(x_M)]$.
Ce même théorème appliqué sur $[\overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{x_m, x_M}]$ fournit $f\big([\overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{x_m, x_M}]\big) = \big[f(x_m), f(x_M)\big]$.
Par ailleurs, le TVI fournit l'inclusion $[f(x_m), f(x_M)] \subset f\big([x_m, x_M]\big)$.
On tire $f\big([a,b]\big) = f\big([\overset{\curvearrowleft\curvearrowright}{x_m, x_M}]\big)$.
D'après l'hypothèse faite sur f, on tire

$$b - a = |x_m - x_M|$$

Ainsi, $x_m \in \{a, b\}$ et x_M est alors "l'autre".
Comme $f(a) = f(b)$, on tire $f(x_m) = f(x_M)$.
Donc $\min f = \max f$, donc f est constante sur $[a, b]$.
Donc $f\big([a,b]\big)$ est un singleton donc un segment de longueur 0 !
Contredisant l'hypothèse faite sur f.

— Avec un lemme, on montre que f est strictement monotone.
Distinguer deux cas.
Cas f strictement croissante.
Soit $x > 0$. Par croissance et continuité, on obtient $f([0, x]) = [f(0), f(x)]$.
Avec l'hypothèse, on a donc $f(x) - f(0) = x - 0$, donc $f(x) = x + f(0)$.
Cela fonctionne aussi pour $x < 0$ et $x = 0$.

Cas f strictement décroissante. On pose $g = -f$ qui est alors strictement croissante.
En appliquant le cas précédent, on trouve $g : x \mapsto x + g(0)$, d'où $\forall x, \ (-f)(x) = x + (-f)(0)$.
Donc $\forall x, \ f(x) = -x + f(0)$.

— Les fonctions de la forme $x \mapsto x + \alpha$ et $x \mapsto -x + \alpha$ sont solutions !

1. La partie $\mathcal{P}$ est non vide, car f est périodique.
   De plus, $\mathcal{P}$ est minorée par 0.
   Donc $\mathcal{P}$ admet une borne inférieure.
2. Comme 0 est un minorant de $\mathcal{P}$, on a $T = \inf \mathcal{P} \geqslant 0$.
   Montrons que $T > 0$.
   Raisonnons par l'absurde en supposant que la borne inférieure T de $\mathcal{P}$ vaut 0.
   Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(\tau_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Montrons que f est constante, ce qui constituera une absurdité.
   Fixons $x \in \mathbb{R}$ et montrons que $f(x) = f(0)$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut « ramener » x dans $[0, \tau_n]$; dit autrement, on peut trouver un « représentant » de x dans $[0, \tau_n]$, que l'on note x_n vérifiant $f(x_n) = f(x)$ (on peut construire explicitement un tel x_n à savoir $x_n = x - \lfloor \frac{x}{\tau_n} \rfloor \tau_n$, et on exploite la τ_n-périodicité pour montrer que $f(x_n) = f(x)$).
   On a
   $$\begin{cases} \tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ x_n \in [0, \tau_n] \end{cases} \qquad \text{d'après le th. des Gendarmes, on a} \quad x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   On a
   $$\begin{cases} x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ f \text{ continue en } 0 \end{cases} \qquad \text{donc} \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$$
   Par passage à la limite dans $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = f(x)$, on obtient $f(0) = f(x)$.
3. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
   Fixons $x \in \mathbb{R}$.
   On a $T = \inf \mathcal{P}$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite $(\tau_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que $\tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T$.
   On a les deux informations suivantes $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ f(x+\tau_n) = f(x) \\ \tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T \end{cases}$

   Prenons la deuxième information, enrichissons-la et couplons-la avec la continuité de f.
   On a :
   $$\begin{cases} x + \tau_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x + T \\ f \text{ est continue en } x + T \end{cases} \qquad \text{d'où } f(x+\tau_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x+T)$$
   Un passage à la limite (licite) dans l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x+\tau_n) = f(x)$ fournit $f(x+T) = f(x)$.

   Remarque. On a donc prouvé que $T > 0$ et que T est une période, ainsi $T \in \mathcal{P}$. Donc $T = \min \mathcal{P}$.
4. Considérons la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$: elle admet tout rationnel pour période.
   En effet, fixons $r \in \mathbb{Q}$.
   Le lecteur montrera que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+r) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$.

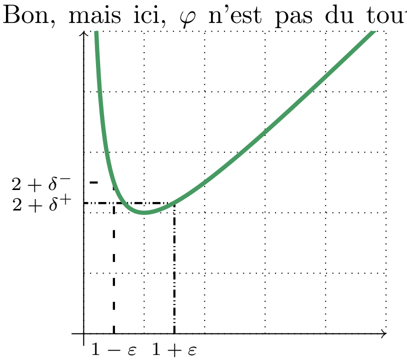
Remarque. Le point 0 ne joue aucun rôle particulier. On l'appellera a dans ce qui suit.
De plus, f est en fait une fonction quelconque définie sur un intervalle I contenant a et à valeurs dans $J =]0, +\infty[$ intervalle sur lequel $\varphi : t \mapsto t + \frac{1}{t}$ est définie.
Avec ces notations l'exercice se reformule :

$$\varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Idée. Si φ était bijective et continue sur $J =]0, +\infty[$, on aurait alors par composition de limites l'implication suivante

$$\begin{cases} \varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2 \\ \varphi^{-1} \text{ continue en } 2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \varphi^{-1}(2) = 1$$

Bon, mais ici, φ n'est pas du tout bijective, comme le montre le dessin et le tableau suivant :



t	0	$1-\varepsilon$	1	$1+\varepsilon$	$+\infty$
$\varphi(t)$		$2+\delta^-$	2	$2+\delta^+$	

Dans ce tableau, on a fixé $\varepsilon > 0$ et on a défini δ^- et δ^+ comme étant les uniques réels (positifs) vérifiant :

$$2 + \delta^- = \varphi(1-\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad 2 + \delta^+ = \varphi(1+\varepsilon)$$

Début de la preuve. Supposons que $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 2$, c'est-à-dire $\varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2 = \varphi(1)$.
Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe W_a voisinage de a tel que $\forall\, x \in I \cap W_a,\ f(x) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.
On introduit δ^- et δ^+ définis par

$$2 + \delta^- = \varphi(1-\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad 2 + \delta^+ = \varphi(1+\varepsilon)$$

On pose également $\delta = \min(\delta^-, \delta^+)$ de sorte que l'on a :

♠ $$\varphi(t) \in [2-\delta,\, 2+\delta] \quad \Longrightarrow \quad t \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$$

Comme $\varphi\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to a]{} 2$, il existe W_a voisinage de a tel que $\forall\, x \in I \cap W_a$, $\varphi\big(f(x)\big) \in [2-\delta, 2+\delta]$.
D'après la définition de δ, on obtient donc avec l'implication ♠ précédente :

$$\forall\, x \in I \cap W_a,\ \ f(x) \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$$

Le contrat est rempli !

151

Des fonctions qui vérifient l'hypothèse :

$$x \mapsto \sqrt[n]{3 - x^n} \qquad \text{avec } n \text{ impair}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Du fait que $\mathbf{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(f(x), x) = (a, f(a))$. Mais alors, $f(f(x)) = f(a) = x$.
2. Supposons f croissante.
   Puisque la courbe représentative de f n'est pas la première bissectrice, il existe $a \in \mathbb{R}$ avec $f(a) \neq a$.
   Si $f(a) > a$, alors $f \circ f(a) \geqslant f(a) > a$, ce qui contredit la question précédente.
   De même, si $f(a) < a$, alors $f \circ f(a) \leqslant f(a) < a$. L'hypothèse émise est donc absurde.
3. f est injective. En effet, si $f(a) = f(b)$, alors $a = f(f(a)) = f(f(b)) = b$. Mais une fonction injective continue est nécessairement strictement monotone. Comme d'après la question précédente f ne peut pas être croissante, elle est nécessairement strictement décroissante.
4. Bien sûr, il faut choisir une fonction qui n'est pas continue en 0.
   La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, convient.
   Cette fonction, qui est décroissante sur $]0, +\infty[$ ou sur $]-\infty, 0[$, n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.