Polynômes

exercices

Coefficients, degré, équations

101 Polynôme à coefficients réels de degré impair

Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels possède (au moins) une racine réelle.

102 Inversibles de $\mathbb{K}[X]$

Déterminer les éléments de $\mathbb{K}[X]$ qui possèdent un inverse pour la multiplication.

103 Équations

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que

(i) $P(2X) = P(X) - 1$

(ii) $P(X^2) = (X^2+1)P$.

(iii) $P \circ P = P$.

(iv) $\exists Q \in \mathbb{K}[X],\ Q^2 = XP^2$.

104 Formule de Vandermonde

Soit $n, p, q \in \mathbb{N}$. L'objectif est de montrer l'égalité :

$$\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{n}$$

où la somme porte sur les $i, j \in [\![0, n]\!]$ de somme n.

1. Que dit cette formule pour $p = 4$, $q = 5$ et $n = 6$?
2. En considérant les trois polynômes $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ définis par :

$$A = (X+1)^p \qquad B = (X+1)^q \qquad C = (X+1)^{p+q}$$

   montrer l'égalité de Vandermonde.
3. À l'aide de la formule de Vandermonde, montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N},\quad \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 = \binom{2m}{m}$$

105 Une identité

Soit $n \in \mathbb{N}$. En considérant $(X^2-1)^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

106 Polynômes de Tchebychev de 2ème espèce

On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$P_0 = 1, \qquad P_1 = -2X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\quad P_{n+2} = -2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n.$$

1. Calculer P_2, P_3 et P_4.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de P_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que P_n a une parité et la déterminer.
4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(0)$.
5. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}(0)$.

107 Infaisable ?

Soit $n \in \mathbb{N}$ et P et Q deux polynômes distincts de degré n à coefficients *réels*.
En exploitant une factorisation et en exhibant les coefficients dominants, montrer que :

$$\deg\left(P^3 - Q^3\right) \geqslant 2n.$$

Divisibilité et division euclidienne

108 La routine

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans chacun des cas suivants :

(i) $A = X^n$ et $B = X^2 - 3X + 2$

(ii) $A = X^n$ et $B = (X-1)^2$

(iii) $A = (X \sin t + \cos t)^n$ et $B = X^2 + 1$, où t est un réel.

109 Reste

Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n$ par X^2+1. On exprimera la réponse en fonction du cosinus et du sinus.

110 Un classique

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ deux scalaires *distincts*.

1. Exprimer le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Exprimer le reste de la division de P par $(X-a)^2$ en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

111 Des entiers aux polynômes

Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b.
Montrer que le reste de la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$ est X^r.

112 Divisibilité

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer l'équivalence $b \mid a \iff X^b - 1 \mid X^a - 1$.

113 Autour de j

Soit $(p, q, r) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3p+2} + X^{3q+1} + X^{3r}$.

114 $(3, 2)$: le couple des Pistons !

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que le polynôme $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

115 Il y a 3 solutions

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{C}$, le polynôme $B = X^2 - bX + 1$ divise $A = X^4 - X + a$?

116 Joli !

1. Soit $P, A, B \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $A - B$ divise $P \circ A - P \circ B$.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.

   On utilisera astucieusement la question précédente.
3. En déduire les solutions de l'équation $(z^2 + 3z + 1)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Racines et critère de nullité

117 Le Quizz de Madame Tête

1. Donner un exemple de fonction **non** polynomiale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = 0$$
2. Donner un exemple de fonction **non** polynomiale $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \psi(n) = n$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = n^3 - n^2 + 1$$
Que vaut $P(\pi)$?
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n^3 - n^2 + 1$$
Que peut-on dire sur $f(\pi)$? Construire une telle fonction f **non** polynomiale.
5. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P\big((-1)^{\lfloor t \rfloor}\big) \ = \ Q\big((-1)^{\lfloor t \rfloor}\big)$$
A-t-on $P = Q$?
6. Même question avec :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P\big(\cos(t) + 4\big) \ = \ Q\big(\cos(t) + 4\big)$$
7. Même question avec :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad P\big((-1)^{\lfloor t \rfloor} + t\big) \ = \ Q\big((-1)^{\lfloor t \rfloor} + t\big)$$

118 Le logarithme n'est pas un polynôme

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\quad \exists A > 0,\ \forall x \geqslant A,\ P(x) = \ln(x)$.

119 Fonctions non polynomiales

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

(i) $P(k) = \frac{1}{k}$ (ii) $P(k) = \sqrt{k^2 + 1}$ (iii) $P(k) = 2^k$

120 Interpolation de Lagrange (à la main)

Soit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts.

1. Construire un polynôme $\widetilde{L_0}$ de degré n ayant $x_1, \dots, x_n$ comme racines.
2. Construire un polynôme L_0 de degré n ayant $x_1, \dots, x_n$ comme racines et tel que $L_0(x_0) = 1$.
3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Construire un polynôme L_k de degré n tel que $L_k(x_k) = 1$ et ayant les éléments de la famille $(x_j)_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}}$ comme racines.
4. Soit $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un *unique* polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = y_i.$$
On dit que le polynôme P a été obtenu par *interpolation de Lagrange*.
5. **Application.** Soit $Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!], Q(k) = \frac{1}{k}$. Montrer que $Q(-1) = n$.

121 Racines d'un polynôme vérifiant une équation fonctionnelle

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $P(X^2) = P(X)\,P(X - 1)$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont aussi racines de P.
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P. Montrer que a est une racine de l'unité.
3. Montrer que 0 n'est pas racine de P.
4. Soit $\beta \in \mathbb{C}$ une racine de P. Montrer que $\beta \in \{j, j^2\}$.

122 Coefficients complexes ou réels ?

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose qu'il existe une infinité de réels α tels que $P(\alpha)$ est réel.
Montrer que P est à coefficients réels.

Considérer le polynôme Q dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P.

Polynôme dérivé

123 Conditions sur des polynômes, avec dérivation

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

(i) $P = P'$ (ii) $(P')^2 = 4P$

124 Équations avec P et P'

(i) Résoudre l'équation $P = P'$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
(ii) Résoudre l'équation $P - XP' = X$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
(iii) Résoudre l'équation $2P = XP'$.
(iv) Soit $m \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $mP = XP'$.

125 Une relation fonctionnelle polynomiale, linéaire

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0$.

126 Une relation fonctionnelle polynomiale, non linéaire

Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

127 Existence-Unicité

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ que l'on explicitera avec ses coefficients tel que $P_n - P_n' = X^n$.

128 Question ouverte

Déterminer dans $\mathbb{K}[X]$ tous les polynômes divisibles par leur polynôme dérivé.

Formule de Taylor

129 Une nouvelle preuve

On pose $E = \mathbb{K}_{n+1}[X]$. On considère $H = \mathbb{K}_n[X]$ et $D = \text{Vect}\Big((X-19)^{n+1}\Big)$
À l'aide de la formule de Taylor, montrer sans effort que $E = H \oplus D$.

130 Dérivées positives en un point

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}(a) \geqslant 0$.
Montrer que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

131 Interpolation de Taylor

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Considérons

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \big(P(a), P'(a), \dots, P^{(n)}(a)\big) \end{array}$$

Montrer que Ψ est un isomorphisme.
Que vaut Ψ^{-1} ?

Racines multiples

132 Bas de gamme

(i) Considérons $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$.
Montrer que 1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.
Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

(ii) Reprendre l'exercice avec $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$.

(iii) Montrer que le polynôme P admet une racine double.

$$P = X^4 - (5+\sqrt{2})X^3 + (5\sqrt{2}-2)X^2 + (10+2\sqrt{2})X - 10\sqrt{2}$$

En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

133 Une divisibilité en deux preuves

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.
On pourra proposer deux preuves différentes (l'une qui explicite le quotient, l'autre avec un critère sur la multiplicité d'une racine).

134 Multiplicité

Soit $n \geqslant 3$.
Déterminer l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine de $X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$.

135 Le polynôme de Taylor de la fonction exponentielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$.

1. Montrer que les racines de P_n sont simples.
2. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

136 Discriminant d'un polynôme de degré 3

Soit $P = X^3 + pX + q \in \mathbb{K}[X]$.
En considérant la division euclidienne de P par P', montrer que

$$P \text{ admet une racine double} \iff 4p^3 + 27q^2 = 0$$

Factorisation

137 Racines 6ème de l'unité

On souhaite factoriser $X^6 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. **Première preuve.** Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ et conclure.
2. **Deuxième preuve.** Restons dans $\mathbb{R}[X]$.
   En factorisant $X^3 - 1$ et $X^3 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$, conclure.

138 Factorisation de $\Phi_3(X^2)$

Factoriser le polynôme $P = X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

On essaiera de fournir deux preuves : une en restant dans $\mathbb{R}[X]$, et une en commençant par factoriser le polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.

139 La routine !

Pour chacun des polynômes suivants, donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

(i) $P_1 = X^4 - 4$
(ii) $P_2 = X^4 + 1$
(iii) $P_3 = X^6 + 27$
(iv) $P_4 = (X^2 - X + 1)^2 + 1$
(v) $P_5 = X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1$
(vi) $P_6 = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$ sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième
(vii) $P_7 = X^4 + 12X - 5$ en sachant qu'il y a deux racines dont la somme vaut 2

140 Dans $\mathbb{Z}[X]$

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers tel que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.
   Montrer que si P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ exprimée sous forme irréductible alors $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.
2. Factoriser $P = 2X^3 - X^2 - 13X + 5$.
3. Le polynôme $X^3 + 3X - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

141 De $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$

Soit $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser $X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

142 Une divisibilité

Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^8 + X^4 + 1$ (sans faire de division euclidienne !).

143 Factorisation générale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les égalités

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad X^n - z^n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega z) \qquad X^n - z^n = \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n} (X - \overline{\xi} z)$$

Puis montrer que

$$\forall A, B \in \mathbb{C}[X], \quad A^n - B^n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (A - \omega B)$$

144 Condition pour être scindé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire à coefficients *réels*.
Montrer que

$$P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \iff \forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geqslant |\operatorname{Im} z|^{\deg P}$$

Relations coefficients-racines

145 Polynôme de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3, possédant deux racines réelles.
Montrer que la troisième racine est également réelle.

146 Les sommes de Newton

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ un polynôme de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{K}$ (donc $a \neq 0$).
On suppose que P est scindé sur $\mathbb{K}$ et on note x, y et z ses racines.
On pose

$$\sigma_1 = x + y + z \qquad \sigma_2 = xy + xz + yz \qquad \sigma_3 = xyz$$

1. Exprimer les quantités σ_1, σ_2 et σ_3 en fonction de a, b, c et d.
2. Exprimer les quantités $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de σ_1, σ_2 et σ_3.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $(S) : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20. \end{cases}$

147 Système hautement non linéaire

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ xyz = -4 \end{cases}$.

148 Le polynôme $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Autres

149 Lieu des racines

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.
Montrer que si λ est racine de P alors $|\lambda| \leqslant 1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k|$.

Disjonction de cas sur le module de λ vis à vis de 1.

150 Un peu astucieux

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall\, k \in [\![1, n+1]\!], \quad P(k) = \frac{1}{k}$$

1. On prend ici $n = 1$. Donner un exemple de polynôme P vérifiant les conditions de l'énoncé.
   Même question avec $n = 2$.
2. On revient au cas général avec n quelconque. Que peut-on dire du polynôme $XP(X) - 1$?
   Son degré ? Ses racines ? Son coefficient dominant ?
   Montrer que $P(-1) = n + 1$.

151 La suite du 121

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

152 **L'exercice de Y.G. (24/01/23) !** Tigrane, première victime !

Soit $n \geqslant 2$. Simplifier

$$\prod_{\substack{(\omega,\omega')\in\mathbb{U}_n^2 \\ \omega\neq\omega'}} (\omega - \omega')$$

Comme 1ère question, on peut demander au candidat de simplifier $\displaystyle\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}} (1-\xi)$.

Gros exercices

153 Racines des polynômes de Tchebychev

1. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\forall\, \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
On pourra ou bien définir T_n de manière explicite, ou bien par récurrence à l'aide de $\cos p + \cos q$.
2. Montrer qu'une telle suite est unique.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.
Calculer $T_n(x_k)$ puis montrer que T_n possède n racines distinctes réelles.
4. En déduire la factorisation de T_n en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

154 Factorisation du 5ème polynôme cyclotomique

On considère le polynôme
$$Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$
Pour la culture : c'est ce que les mathématiciens connaissent sous le nom de 5ème polynôme cyclotomique.
On pose $\theta = \dfrac{2\pi}{5}$.

1. Étudier les variations de $f : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
En déduire que le polynôme Q n'a pas de racine réelle.
2. (2a) Montrer que $\cos(\theta) = \cos(4\theta)$.
(2b) Montrer que
$$\cos(4\theta) \;=\; 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$
Penser à la formule de duplication $\cos(2x)$.
3. Considérons
$$Q = 8X^4 - 8X^2 - X + 1$$
Montrer que 1 et $-\frac{1}{2}$ et $\cos(\theta)$ sont racines de Q et en déduire que
$$4\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 1 = 0$$
4. Montrer que
$$\cos(\theta) + \cos(2\theta) \;=\; -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \cos(\theta)\cos(2\theta) \;=\; \frac{1}{4}$$
En déduire que le polynôme
$$\big(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1\big)\big(X^2 - 2\cos(2\theta)X + 1\big)$$
est à coefficients entiers.
5. Quelle est la factorisation de Q ?

155 Polynômes qui stabilisent ...

1. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall\, x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}\}$.
2. Déterminer $\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall\, x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}\}$. Penser à l'interpolation de Lagrange.
3. On note $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall\, x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}\}$.
(a) On pose $P_0 = 1$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P_k = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.
Montrer $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_n \in \mathcal{E}$.
(b) Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Aspect générateur. On pourra remarquer que, pour $k \in [\![1, n]\!]$ fixé, on a $P_k - \dfrac{1}{k!}X^k \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$.
(c) En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers (relatifs) des P_n.

Un peu d'algèbre linéaire

156 $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie

Soit $(P_1, \dots, P_s)$ une famille de s polynômes de $\mathbb{K}[X]$?
Peut-elle être génératrice de $\mathbb{K}[X]$?

157 Espaces supplémentaires

Soit $E = \mathbb{K}[X]$ et :

$$F = \Big\{P \in E \mid P(1-X) = P(X)\Big\} \qquad G = \Big\{P \in E \mid P(1-X) = -P(X)\Big\}$$

En considérant une involution de E, montrer sans effort que $E = F \oplus G$.

158 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi : \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), \dots, P(a_n)\big). \end{array}$$

et on note $(e_1, \dots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

1. Justifier que φ est linéaire et montrer que φ est injective.
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbb{K}_n[X]$, que l'on explicitera, tel que $\varphi(L_k) = e_{k+1}$.
3. En déduire que φ est un isomorphisme.
4. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
5. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

159 Polynôme annulateur et matrice

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, vérifiant $P(0) \neq 0$, tel que $P(M) = 0$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour $n \geqslant 2$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1 est-elle inversible ?

160 Polynôme annulateur

Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $H^2 = \alpha H$ avec $\alpha \neq -1$.
On pose $A = I + H$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. Montrer que A est inversible.
   Puis exprimer son inverse comme une combinaison linéaire de A et I.

161 L'idéal des polynômes annulateurs

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

On rappelle que pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note $P(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k$.

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Montrer $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$.
2. Montrer que si P divise Q, alors $\operatorname{Ker} P(f) \subset \operatorname{Ker} Q(f)$ et $\operatorname{Im} Q(f) \subset \operatorname{Im} P(f)$
3. On dit qu'un polynôme P est *annulateur* de l'endomorphisme f si l'on a $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_f$ des polynômes annulateurs de u est un *idéal* de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire :
   (a) $\mathcal{I}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$;
   (b) $\forall P \in \mathcal{I}_f,\ \forall Q \in \mathbb{K}[X],\ PQ \in \mathcal{I}_f$.

162 Deux applications linéaires qui coïncident sur une base ...

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. En considérant deux applications linéaires, montrer sans effort que

$$P(X+1) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)$$

163 Matrice de Vandermonde

Soit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

1. Déterminer une matrice $\mathbf{V}$ (elle est unique et dépend bien sûr de $\boldsymbol{\alpha}$) telle que pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$, on ait
$$\mathbf{V} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} P(\alpha_0) \\ P(\alpha_1) \\ \vdots \\ P(\alpha_n) \end{bmatrix}$$
On commencera par le cas $n = 2$.
2. Conjecturer une CNS sur $\boldsymbol{\alpha}$ pour que la matrice $\mathbf{V}$ précédente soit inversible.
Démontrer la conjecture.
On pourra s'aider du critère « une matrice est inversible ssi le système homogène associé admet 0 pour unique solution ».

164 Combinaison linéaire de I et J

Soit $n \geqslant 2$. Soit I la matrice identité de taille n et J la matrice pleine de 1 de taille n.
On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} \;=\; \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{bmatrix}}_{=M(a,b)} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{K} \right\} \;\subset\; \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Montrer que $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(I, J)$.
2. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par somme et produit.
3. Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par puissance entière positive.

Soit $a, b \in \mathbb{K}$. On pose $M = M(a, b)$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 pour M.
2. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff a \notin \{b,\ -(n-1)b\}$.
Dans ce cas, montrer que $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

165 Un classique

1. Soit $G = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2-1)Q' = 2XQ \right\}$
   (a) Soit $Q \in G \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$. En examinant les coefficients dominants, montrer que $\deg Q = 2$.
   (b) Montrer que G est un sev de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer une base.

Dans la suite, on suppose que $n \geqslant 3$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$.
On considère l'application $f : P \mapsto \frac{1}{2}(X^2-1)P'' - XP' + P$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ (on pourra utiliser judicieusement la question 1).
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
5. En concaténant les bases précédentes, montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\, f$.
6. À l'aide de la question précédente, déterminer un polynôme annulateur pour f.

166 Opérateur des différences finies

Soit $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. Montrer que $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$.
3. À l'aide de la question précédente, déterminer une base de $\operatorname{Ker} \Delta$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré du polynôme $\Delta^n(P)$ en fonction de $\deg P$.
5. Considérons l'endomorphisme $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer l'endomorphisme T^k.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En exprimant Δ en fonction de T, montrer sans effort que :

$$\forall\, P \in \mathbb{K}[X], \quad \Delta^n(P) \;=\; (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k).$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) \;=\; 0.$$

   Connaît-on cette égalité pour $P = 1$, et pour $P = X$?

167 Un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$

Soit $n \geqslant 2$.
Soit $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la famille d'éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ définie par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall\, k \in [\![1, n]\!],\ P_k = \dfrac{1}{k!} X(X-k)^{k-1} \end{cases}$$

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Justifier que $P_k - \dfrac{1}{k!} X^k \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$.

   En déduire que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Vérifier que $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.
4. Soit f l'application définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ par

$$f : P \longmapsto P(X) - P'(X+1)$$

   (4a) Prouver que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

   (4b) Calculer $f(P)$ pour tout polynôme P de $\mathcal{F}$.

   (4c) En déduire que f est un automorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$.

   (4d) Montrer que $(X-1)^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f.

   (4e) Déterminer les valeurs propres de f, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}$.
5. En introduisant l'endomorphisme $g = \operatorname{id} - f$, démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall\, P \in \mathbb{K}_n[X], \quad f^m(P) \;=\; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

   où $P^{(i)}$ désigne le polynôme dérivé $i^{\text{ème}}$ de P.

Khôlles

168 Une identité binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X], \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k P(k) \;=\; 0.$$

169 Dérivée $k^{\text{ème}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$.
On considère

$$P \;=\; \frac{1}{n!} X^n (a - bX)^n$$

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$$

170 Relations coefficients-racines

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ tels que $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

171 sinus et cosinus

Soit U, $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ U(t) \sin t + V(t) \cos t = 0.$$

Montrer que U et V sont égaux au polynôme nul.

172 Divisibilité avec paramètres

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme A_n est divisible par $B = X^2 - X + 1$.

(ii) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$A_n = (\sin\theta) X^n - \sin(n\theta) X + \sin((n-1)\theta)$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, le polynôme A_n est divisible par $B = X^2 - 2\cos\theta X + 1$.

173 Somme de deux carrés

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

1. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\overline{C}$.
3. En déduire qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

174 Un équation fonctionnelle amusante (from Jean Rax)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P^2 + 1 = P(X^2 + 1)$.
On pourra poser $R = X^2 + 1$.
Pour mémoire, voici un lien.

Plus difficiles...

175 **Polynômes stabilisant $\mathbb{U}$**

Déterminer l'ensemble $\mathcal{E} = \Big\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}\Big\}$.

176 **Une équation (difficile)**

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

177 **Autre exercice de Y.G.**

Montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

178 **Ordre au voisinage de $+\infty$**

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes différents. Montrer que

$$\Big(\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant A,\ P(t) < Q(t)\Big) \qquad \text{ou} \qquad \Big(\exists\, A \in \mathbb{R},\ \forall t \geqslant A,\ P(t) > Q(t)\Big)$$

179 **Avec des racines multiples**

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que

$$(X-1)^3 \mid P+1 \qquad \text{et} \qquad (X+1)^3 \mid P-1.$$

On pourra penser aux polynômes dérivés. Mais attention, est-il vrai que $B \mid A \implies B' \mid A'$? Mais si B est ...

180 **Conditions sur des polynômes, avec dérivation et racines multiples**

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = P'\,P''$.

181 **L'ensemble ordonné $\mathbb{C}[X]$**

Déterminer les $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \leqslant |Q(z)|$.

182 **Le plus difficile est de comprendre l'énoncé !**

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul et $n = \deg P$.
Montrer que la somme des racines de P, P', ..., $P^{(n-1)}$ sont en progression arithmétique.

183

Soient a, b, c trois points distincts de $[0, 1]$. On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus 2.

1. Montrer l'existence de trois réels α, β, γ tels que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 P(x)\,dx = \alpha P(a) + \beta P(b) + \gamma P(c)$$

2. Déterminer explicitement ces trois réels en fonction de a, b, c.

Une équation dans $\mathbb{K}[X]$

Questions préparatoires

(-1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z-1| = 1 \end{cases} \iff z = -\mathrm{j} \text{ ou } z = -\mathrm{j}^2$$

On pourra s'aider d'une belle figure. Pour la preuve par le calcul, on pourra penser à élever au carré.

(0) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\mathcal{R}_\alpha = \{\alpha^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$. Donc $\mathcal{R}_\alpha = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^{16}, \ldots\}$.

(0a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\mathcal{R}_x \text{ est un ensemble fini} \iff x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

(0b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'implication

$$\mathcal{R}_z \text{ est un ensemble fini} \implies z = 0 \text{ ou } |z| = 1$$

Pour la culture : l'autre implication est fausse, sauriez-vous le montrer (pas facile...) ?

Détermination d'un ensemble de polynômes

On considère l'ensemble

$$\mathbf{E} \;=\; \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X)P(X+1) = P(X^2)\}$$

(1) Déterminer tous les polynômes constants de $\mathbf{E}$. (on prendra garde au mode de raisonnement utilisé : équivalence, analyse-synthèse ?)

Désormais, on fixe un polynôme $P \in \mathbf{E}$ de **degré** $\geqslant 1$.
On va essayer de cerner P à l'aide de ses racines. Tiens, c'est bien vrai que l'on peut **complètement** décrire P uniquement à l'aide de ses racines ? Vraiment ?

(2) On considère $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$. Tiens, pourquoi un tel α existe ?

(2a) Montrer que α^2 est une racine de P.

(2b) En déduire que $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha^{2^n}$ est racine de P.

(2c) Que peut-on en déduire sur le module de α ?

(2d) Montrer que $(\alpha - 1)^2$ est une racine de P. Que peut-on en déduire ?

(3) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer l'implication

$$z \text{ racine de } P \implies z \in \{0, 1, -\mathrm{j}, -\mathrm{j}^2\}$$

(4) Montrer que P peut s'écrire $aX^q(X-1)^q$ avec $a \in \mathbb{K}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

Penser à injecter l'information de la question précédente dans l'égalité vérifiée par P !

(5) Entre les questions (2) et (4), nous avons montré que :
si P est dans $\mathbf{E}$ de degré $\geqslant 1$, alors P est nécessairement du type ...

(6) Déterminer tous les polynômes de $\mathbf{E}$.

Une équation dans $\mathbb{K}[X]$ (proposition de corrigé)

(-1) Remarque : $|z-1|^2 = (z-1)\overline{(z-1)} = |z|^2 - (z+\overline{z}) + 1 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) + 1$.

▶ Première preuve. Par analyse-synthèse.

Analyse.

Soit z tel que $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z-1| = 1 \end{cases}$.

On élève au carré. On a donc

$$\begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z-1|^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{d'où } |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 = 1$$

D'où

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où ...

Je vous laisse finir pour obtenir $z = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $z = -\mathrm{j}$ ou $z = -\mathrm{j}^2$

Synthèse. Vérifions que $-\mathrm{j}$ et $-\mathrm{j}^2$ satisfont le système.

Je vous laisse faire

▶ Deuxième preuve. Par équivalence (dangereux, pour vous !)

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z-1| = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2} \end{cases} \iff z = \frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \iff z = -\mathrm{j} \text{ o}$$

(0) (0a) $\Longrightarrow$ Montrons la contraposée.

Supposons que x ne soit pas égal à $0, 1, -1$, c'est-à-dire que $|x| \neq 0, 1$.

Montrons que $\mathcal{R}_x = \{x^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ est infini.

Remarquons qu'il suffit de montrer que $\{x^{2^n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est infini (en rajoutant $x^{2^0} = x$, cela restera infini !).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donc *non nul*, on a $x^{2^n} = |x|^{2^n}$ (car 2^n est pair).

Distinguons deux cas (sachant que l'on a supposé que $|x|$ est différent de 0 et 1).

▷ $|x| \in]0, 1[$

Dans ce cas, la suite $(|x|^{2^n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante donc prend une infinité de valeurs.

▷ $|x| \in]1, +\infty[$

Dans ce cas, la suite $(|x|^{2^n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante donc prend une infinité de valeurs.

On vient de montrer que l'ensemble $\{|x|^{2^n}, n \in \mathbb{N}^*\} = \{x^{2^n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est infini, donc $\mathcal{R}_x$ aussi.

$\Longleftarrow$ Supposons que $x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$.

Etudions les trois cas séparément.

▷ Pour $x = 0$, l'ensemble $\mathcal{R}_x$ vaut $\{0^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble $\{0\}$ réduit à un seul élément. Cet ensemble est donc fini !

▷ Pour $x = 1$, l'ensemble $\mathcal{R}_x$ vaut $\{1^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble $\{1\}$ réduit à un seul élément. Cet ensemble est donc fini !

▷ Pour $x = -1$, l'ensemble $\mathcal{R}_x$ vaut $\{(-1)^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ c'est-à-dire l'ensemble $\{-1, 1\}$. Cet ensemble est donc fini !

(0b) Supposons $\mathcal{R}_z = \{z^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ fini.

Il existe donc $p \neq q$ deux entiers *distincts* tels que $z^{2^p} = z^{2^q}$ (WHY ?).

Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1. $z = 0$. Il n'y a rien à faire.

Cas 2. $z \neq 0$.

L'égalité $z^{2^p} = z^{2^q}$ est alors équivalente à $z^N = 1$, avec $N = 2^p - 2^q$ qui est un entier *non nul* (WHY ?). En prenant le module, on obtient $|z|^N = 1$. Comme $N \neq 0$, cela implique (WHY ?) $|z| = 1$.

Bilan des courses. On a montré que $z = 0$ ou $|z| = 1$.

① Déterminons tous les polynômes constants de **E**.

▶ Première preuve. Par analyse-synthèse.
Analyse. Soit P un polynôme constant de **E**. Ecrivons $P = a$ avec $a \in \mathbb{K}$.
Comme $P \in \mathbf{E}$, on a $a \times a = a$, d'où $a = 0$ ou $a = 1$. Donc $P = 0$ ou $P = 1$.
Synthèse. On vérifie que les polynômes 0 et 1 sont dans **E**.
Bilan : les polynômes constants de **E** sont 0 et 1.

▶ Deuxième preuve. Par équivalence.
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ constant que l'on écrit $P = a$ avec $a \in \mathbb{K}$. On a les équivalences $P \in \mathbf{E} \iff a \times a = a \iff a = 0$ ou $a = 1$ Bilan : les polynômes constants de **E** sont 0 et 1.

② (2a) En évaluant en α l'égalité vérifiée par P (celle qui définie **E**), on a $P(\alpha)P(\alpha+1) = P(\alpha^2)$.
Or α est racine de P, donc $P(\alpha^2) = 0 \times P(\alpha+1) = 0$.
Bilan : α^2 est racine de P.

(2b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$ la propriété « α^{2^n} est racine de P ».
Montrons, par récurrence, que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.
▷ Initialisation.
▷ Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Comme P est dans **E**, on a, en évaluant en α^{2^n},

$$P(\alpha^{2^n})P(\alpha^{2^n}+1) = P\Big(\underbrace{(\alpha^{2^n})^2}_{\alpha^{2^{n+1}}}\Big)$$

D'après $\mathcal{H}_n$, on a $P(\alpha^{2^n}) = 0$. Donc $P(\alpha^{2^{n+1}}) = 0$. D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

(2c) On vient de montrer que tous les éléments de $\mathcal{R}_\alpha = \{\alpha^{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ sont des racines de P.
Comme P est non nul (WHY ?), P n'a qu'un nombre fini de racines, donc $\mathcal{R}_\alpha$ est fini.
D'après (0b), on en déduit que $\alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.
Bilan : le module de α vaut 0 ou 1.

(2d) Evaluons en $\alpha - 1$ l'égalité vérifiée par P.
On a $P(\alpha-1)P\big(\underbrace{(\alpha-1)+1}_{\alpha}\big) = P\big((\alpha-1)^2\big)$.
Or α est racine de P par hypothèse, d'où $P\big((\alpha-1)^2\big) = 0$.
Bilan : $(\alpha-1)^2$ est racine de P.
Par récurrence, on démontre comme précédemment que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(\alpha-1)^{2^n}$ est racine de P.
De la même façon que précédemment, on montre que $\alpha - 1 = 0$ ou $|\alpha - 1| = 1$.
Bilan : Pour α racine de P, on a $\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$.

③
D'après (2c), on a α racine de $P \implies \alpha = 0$ ou $|\alpha| = 1$.
D'après (2d), on a α racine de $P \implies \alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$.
On a donc (WHY ? Utilisez les lois de Morgan avec le « ou » et le « et »)

$$\alpha \text{ racine de } P \implies \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ ou } \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ |\alpha - 1| = 1 \end{cases}$$

D'où, avec la question ④

$$\{\text{racines de } P\} \subset \{0,\ 1,\ -\mathrm{j},\ -\mathrm{j}^2\}$$

④ D'après la question précédente, P se factorise sous la forme $P = aX^p(X-1)^q(X+\mathrm{j})^r(X+\mathrm{j}^2)^s$.
Obtenons des conditions sur les exposants p, q, r, s et sur le coefficient dominant a (mais, attention, peut-être qu'il n'y a pas de condition à imposer).
Exploitons le fait que P vérifie $P(X)P(X+1) = P(X^2)$.
On a alors

$$aX^p(X-1)^q(X+\mathrm{j})^r(X+\mathrm{j}^2)^s \times a(X+1)^p(X)^q(X+1+\mathrm{j})^r(X+1+\mathrm{j}^2)^s = a(X^2)^p(X^2-1)^q(X^2+\mathrm{j})^r(X^2+\mathrm{j}^2)^s$$

c'est-à-dire (en utilisant à gauche que $1+\mathrm{j}=-\mathrm{j}^2$ et $1+\mathrm{j}^2=-\mathrm{j}$ et à droite que $X^2-1=(X-1)(X+1)$),
$(\star)$
$a^2X^{p+q}(X-1)^q(X+1)^p(X+\mathrm{j})^r(X-\mathrm{j}^2)^r(X+\mathrm{j}^2)^s(X-\mathrm{j})^s \;=\; aX^{2p}(X-1)^q(X+1)^q(X^2+\mathrm{j})^r(X^2+\mathrm{j}^2)^s$

Que peut-on utiliser à présent ? L'unicité des coefficients ? Euh, non, car on ne voit pas les coefficients des polynômes.
Nous allons utiliser l'unicité (à l'ordre près des facteurs) de la factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$.
En identifiant le coefficient dominant, on a $a^2=a$, d'où $a=1$ (car le coefficient dominant a de P est non nul, WHY ?).
Pour identifier les facteurs, il faut avoir des polynômes de degré 1, du type $X-\beta$.
A gauche de $(\star)$, c'est bon.
A droite de $(\star)$, il faut factoriser les facteurs de degré 2.
Commençons par $X^2+\mathrm{j}$ et cherchons ses racines. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^2+\mathrm{j}=0$, càd $z^2=-\mathrm{j}=\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}$. D'où $z=\pm\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}$.
On a donc $X^2+\mathrm{j}=(X-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})(X+\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})$.
De la même manière, on a $(X^2+\mathrm{j}^2)=(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})(X+\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})$.
L'égalité $(\star)$ s'écrit donc

$$X^{p+q}(X-1)^q(X+1)^p\underbrace{(X+\mathrm{j})^r(X-\mathrm{j}^2)^r(X+\mathrm{j}^2)^s(X-\mathrm{j})^s}_{(X+\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})^r(X-\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}})^r(X+\mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\pi}{3}})^s(X-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}})^s} \;=\; X^{2p}(X-1)^q(X+1)^q(X-\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{6}})^r(X+\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{6}})^r(X-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}})^s($$

En identifiant les exposants des facteurs, on obtient donc $\begin{cases} p+q=2p \\ q=q \\ p=q \\ r=0 \\ s=0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} p=q \\ r=0 \\ s=0 \end{cases}$

Autre preuve différente, qui n'utilise pas la factorisation
On a montré que

$$\big\{\text{racines de } P\big\} \;\subset\; \Big\{0,\ 1,\ -\mathrm{j},\ -\mathrm{j}^2\Big\}$$

On va montrer que $-\mathrm{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $-\mathrm{j}^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ne peuvent pas être racines de P.
Montrons d'abord que $-\mathrm{j}^2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ n'est pas racine de P.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})=0$.
Exploitons le fait que P vérifie $P(X)P(X+1)=P(X^2)$ et évaluons cette égalité de polynômes en $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi/3}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
On obtient $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}+1)=P\Big(\underbrace{(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})^2}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}\Big)$. D'où $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}})P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}+1)=0$ (d'après l'hypothèse $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})=0$).
Cela implique que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ OU $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}+1$ est racine de P.
Or $\big\{\text{racines de } P\big\} \subset \Big\{0,\ 1,\ -\mathrm{j},\ -\mathrm{j}^2\Big\}$ et cet ensemble ne contient pas $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}+1$, d'où la contradiction.

À vous de fournir une preuve pour montrer que $-\mathrm{j}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ n'est pas racine de P.

Bilan : $\big\{\text{racines de } P\big\} \subset \Big\{0,\ 1\Big\}$.
Ainsi, P se factorise sous la forme $P=aX^p(X-1)^q$.
En réinjectant dans l'égalité vérifiée par P, on trouve que $a=1$, puis que $p=q$ (à vous de le vérifier : pour cela, reprenez la première preuve de la question ④).

⑤ Entre les questions ② et ④, nous avons montré que :
si P est dans $\mathbf{E}$ de degré $\geqslant 1$, alors P est nécessairement du type $aX^q(X-1)^q$ avec $a\in\mathbb{K}^*$ (en fait, $a=1$) et $q\in\mathbb{N}^*$.

⑥ Montrons que

$$\mathbf{E} \;=\; \Big\{P\in\mathbb{K}[X] \;\mid\; \exists\, q\in\mathbb{N}, \exists\, a\in\{0,1\},\ P=aX^q(X-1)^q\Big\}$$

Pour l'inclusion $\subset$.

Soit $P \in \mathbf{E}$. Alors si P est constant, il vaut 0 ou 1, et est bien du type $aX^q(X-1)^q$ (en effet, le polynôme nul s'écrit $aX^q(X-1)^q$ avec $a=0$ et le polynôme constant égal à 1 s'écrit $aX^q(X-1)^q$ avec $a=1$ et $q=0$).

Pour l'inclusion $\supset$,
Soit P un polynôme de la forme $aX^q(X-1)^q$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0,1\}$.
Montrons que P est dans $\mathbf{E}$.
On a l'égalité (vérifiez ! utilisez notamment que $a^2 = a$ dans notre cas)

$$aX^q(X-1)^q \times a(X+1)^q((X+1)-1)^q \;=\; a(X^2)^q(X^2-1)^q$$

Donc $P = aX^q(X-1)^q$ est dans $\mathbf{E}$.

Si on ne sait pas écrire $\mathbf{E}$ en maths comme ci-dessus, ce n'est absolument pas grave. Il suffit de faire une phrase claire en français, par exemple :
L'ensemble $\mathbf{E}$ est constitué des polynômes constants 0 et 1 et des polynômes de la forme $X^q(X-1)^q$ avec $q \in \mathbb{N}^*$.

Polynômes

corrigés

101

Soit P un polynôme de degré d impair que l'on écrit

$$P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \qquad \text{avec } a_d \neq 0$$

On a alors

$$\forall\, x \neq 0, \quad P(x) \;=\; a_d x^d \underbrace{\left(1 + \frac{a_{d-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^d}\right)}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1} \qquad \text{et} \qquad x^d \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty.$$

On en déduit que

$$P(x) \to \begin{cases} \pm\infty & \text{si } a_d > 0 \\ \mp\infty & \text{si } a_d < 0. \end{cases}$$

Par ailleurs, la fonction $x \mapsto P(x)$ est polynomiale donc continue.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires généralisé, on en déduit l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.
Le polynôme P a donc une racine réelle.

102

Notons $\mathscr{I} = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X], PQ = 1 \right\}$ l'ensemble de l'énoncé.
Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathscr{I}$.

On peut donc trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = 1$.

En passant au degré, on obtient $\deg P + \deg Q = 0$.

Comme $\deg P, \deg Q \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, on a nécessairement $\deg P = 0$.

Synthèse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 0.

Il s'agit donc d'un polynôme constant non nul, et on peut trouver $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda$.

Posons $Q = \frac{1}{\lambda}$ (licite).

On a alors $PQ = \lambda \times \frac{1}{\lambda} = 1$, ce qui montre que $P \in \mathscr{I}$.

Bilan. $\mathscr{I} = \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.

(i) Soit P tel que $P(2X) = P(X) - 1$.
En évaluant en 0, on obtient $P(0) = P(0) - 1$, d'où $0 = -1$.
Bilan : l'ensemble des solutions est $\varnothing$.

(ii) On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P$.
Comme $\deg(X^2) \geqslant 1$, on peut appliquer la formule pour le degré de la composée de deux polynômes. Ainsi, $\deg P(X^2) = \deg P \times \deg X^2 = 2\deg P$.
Par ailleurs, $\deg\big((X^2+1)P\big) = \deg(X^2+1) + \deg P = 2 + \deg P$.
On en déduit que $2\deg P = 2 + \deg P$, d'où l'on tire $\deg P \in \{-\infty, 2\}$.
— Si $\deg P = -\infty$, on a $P = 0$.
— Si $\deg P = 2$, on peut trouver $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$.
Comme $\deg P = 2$, on a $a \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
P(X^2) = (X^2+1)P \quad &\text{donc} \quad aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) \\
&\text{donc} \quad aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c \\
&\text{donc} \quad \begin{cases} a = a \\ 0 = c \\ b = a + c \\ 0 = b \\ c = c \end{cases} \qquad \text{(par identification des coefficients)} \\
&\text{donc} \quad b = a + c = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $P = a(X^2-1)$.
On a montré qu'un polynôme vérifiant la condition de l'énoncé était nécessairement de la forme $a(X^2-1)$, le cas $a = 0$ correspondant au polynôme nul et le cas $a \neq 0$ correspondant au cas de degré 2.

Synthèse. Prenons P de la forme $P = a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{K}$.
On a d'une part $P(X^2) = a(X^4-1)$.
D'autre part, $(X^2+1)P = a(X^2+1)(X^2-1) = a(X^4-1)$.

Ainsi, on a montré

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X^2) = (X^2+1)P\Big\} = \mathrm{Vect}(X^2-1)$$

(iii) Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \circ P = P$.
Si d'aventure le polynôme P est non constant, on a $\deg P = \deg(P \circ P) = \deg(P)^2$, ce qui entraîne $\deg P = 0$ ou $\deg P = 1$.
Dans tous les cas, on a donc $\deg P \leqslant 1$.
Soit $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX + b$.
On a alors

$$P \circ P = a(aX+b) + b = a^2X + ab + b.$$

L'égalité $P \circ P = P$ entraîne donc

$$\begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \left(a = 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}\right)$$

Donc P est constant ou $P = X$.

Synthèse. Réciproquement, il est clair que les polynômes constants et le polynôme X satisfont aux hypothèses.

Bilan.

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P \circ P = P\Big\} = \mathbb{K}_0[X] \cup \{X\}$$

(iv) Le polynôme nul satisfait la condition.
Soit P un polynôme non nul vérifiant la condition de l'énoncé.
On peut donc trouver $Q \in \mathbb{K}[X]$ (nécessairement non nul, car P l'est) tel que $Q^2 = XP^2$.
En passant au degré, on obtient $2\deg Q = \deg X + \deg P^2 = 1 + 2\deg P$.
On obtient une égalité entre un nombre pair et un nombre impair.
Bilan.

$$\Big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \exists Q \in \mathbb{K}[X], Q^2 = XP^2\Big\} = \{0\}.$$

1. Écrire explicitement la somme. Et vérifier que les deux membres de la formule sont égaux.
2. En utilisant trois fois la formule du binôme de Newton, on a :

$$A = (1+X)^p = \sum_{n=0}^{p} \binom{p}{n} X^n \qquad \text{et} \qquad B = (1+X)^q = \sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n} X^n$$

et

$$C = (1+X)^p (1+X)^q = (1+X)^{p+q} = \sum_{n=0}^{p+q} \binom{p+q}{n} X^n$$

Par ailleurs, le coefficient de degré n du produit $C = AB$ est, d'après la formule définissant le produit de deux polynômes, égal à

$$\sum_{i+j=n} \binom{p}{i}\binom{q}{j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

En identifiant les coefficients, on en déduit la *formule de convolution de Vandermonde* :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

3. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}^2 &= \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{m}{m-i} && \text{(symétrie des coefficients binomiaux)} \\ &= \binom{2m}{m}. && \text{(convolution de Vandermonde)} \end{aligned}$$

105

Le coefficient en X^{2p} du polynôme $(X^2-1)^{2n}$ est $\binom{2n}{p}(-1)^p$.

Le coefficient en X^{2p} du polynôme $(X-1)^{2n}(X+1)^{2n}$ est $\displaystyle\sum_{i+j=2p}\binom{2n}{i}\binom{2n}{j}(-1)^j$.

D'où

$$\sum_{i+j=2p}\binom{2n}{i}\binom{2n}{j}(-1)^j \;=\; \binom{2n}{p}(-1)^p$$

En particulier, pour $p=n$, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{2n-k}\binom{2n}{k}=\binom{2n}{n}(-1)^n$.

D'où la formule avec la symétrie du coefficient binomial.

1. On obtient
$$\begin{aligned} P_2 &= 4X^2 - 2 \\ P_3 &= -8X^3 + 12X \\ P_4 &= 16X^4 - 48X^2 + 12. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A(n)$ l'assertion
« On a $\deg P_n = n$ et le coefficient dominant de P_n est $(-1)^n 2^n$. »
Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, A(n)$ par récurrence double.

Initialisation. Les assertions $A(0)$ et $A(1)$ proviennent directement de la définition de P_0 et P_1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A(n)$ et $A(n+1)$. On a alors
$$\begin{aligned} \deg(-2X\,P_{n+1}) &= \deg(-2X) + \deg P_{n+1} \\ &= 1 + n + 1 && \text{(d'après } A(n+1)\text{)} \\ &= n + 2 \\ \text{et } \deg(-2(n+1)P_n) &= n && \text{(d'après } A(n) \text{ et car } n+1 \neq 0\text{)} \\ \text{donc } \deg P_{n+2} &= n+2, \end{aligned}$$
car il s'agit de la somme de deux polynômes de degré distincts.
Cela montre $A(n+2)$ et clôt la récurrence.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ l'assertion $P_n(-X) = (-1)^n P_n$. Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, B(n)$ par récurrence double.

Initialisation. On a $P_0(-X) = 1 = P_0$ et $P_1(-X) = 2X = -P_1$, d'où $B(0)$ et $B(1)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B(n)$ et $B(n+1)$. On a alors
$$\begin{aligned} P_{n+2}(-X) &= -2(-X)P_{n+1}(-X) - 2(n+1)P_n(-X) \\ &= 2X(-1)^{n+1}P_{n+1} - 2(n+1)(-1)^n P_n && \text{(d'après } B(n) \text{ et } B(n+1)\text{)} \\ &= (-1)^n\left(-2XP_{n+1} - 2(n+1)P_n\right) \\ &= (-1)^{n+2}P_{n+2} && \text{(car } (-1)^{n+2} = (-1)^n\text{)}, \end{aligned}$$
ce qui prouve $B(n+2)$ et clôt la récurrence.

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le fonction polynomiale $t \mapsto P_n(t)$ est paire si n est pair et impaire sinon.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction polynomiale P_{2n+1} est impaire, d'après la question précédente, on a $P_{2n+1}(0) = 0$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{aligned} P_{2n+2}(0) &= \left(-2XP_{2n+1} - 2(2n+1)P_{2n}\right)(0) \\ &= -2(2n+1)P_{2n}(0). \end{aligned}$$
Par une récurrence immédiate (comme $P_0(0) = 1$), cela montre que
$$\begin{aligned} P_{2n}(0) &= (-1)^n 2^n (2n-1)(2n-3)\cdots 5 \times 3 \times 1 \\ &= (-1)^n 2^n \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)\cdots 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4 \times 2} \\ &= (-1)^n 2^n \frac{(2n)!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\ &= (-1)^n 2^n \frac{(2n)!}{2^n\, n!} \\ &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}. \end{aligned}$$

107

Les règles de calcul dans $\mathbb{K}[X]$ permettent notamment de factoriser la différence $P^3 - Q^3$:

$$P^3 - Q^3 = (P - Q)(P^2 + PQ + Q^2).$$

Comme P et Q sont distincts, $P - Q \neq 0$, donc $\deg(P - Q) \geqslant 0$ et l'on en déduit

$$\begin{aligned}\deg\left(P^3 - Q^3\right) &= \deg\left(P - Q\right) + \deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right) \\ &\geqslant \deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right). \end{aligned} \qquad (\heartsuit)$$

Notons maintenant α (resp. β) le coefficient dominant de P (resp. Q), de telle sorte que l'on peut décomposer ces polynômes avec leur terme dominant comme suit :

$$P = \alpha X^n + P_0 \qquad \text{et} \qquad Q = \beta X^n + Q_0,$$

où $P_0, Q_0 \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
On a donc

$$\begin{aligned} P^2 &= (\alpha X^n + P_0)^2 \\ &= \alpha^2 X^{2n} + 2 \underbrace{\alpha X^n P_0}_{\in \mathbb{K}_{2n-1}[X]} + \underbrace{P_0^2}_{\in \mathbb{K}_{2n-2}[X]} \\ &= \alpha^2 X^{2n} + R_1, \end{aligned}$$

où $R_1 = 2\alpha X^n P_0 + P_0^2 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$.
De la même façon, on peut trouver $R_2, R_3 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ tels que $PQ = \alpha\beta X^{2n} + R_2$ et $Q^2 = \beta^2 X^{2n} + R_3$.
En notant $R = R_1 + R_2 + R_3 \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$, on trouve donc

$$P^2 + PQ + Q^2 = (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)X^{2n} + R. \qquad (\spadesuit)$$

Le point-clef est maintenant que la non-nullité de α et β entraîne que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$ (et cette quantité est donc non nulle).
Avant de démontrer ce fait, constatons qu'il permet de conclure : l'égalité $(\spadesuit)$ montre en effet alors que $\deg\left(P^2 + PQ + Q^2\right) = 2n$, et l'inégalité $(\heartsuit)$ montre donc que $\deg(P^3 - Q^3) \geqslant 2n$.

Pour montrer que $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \neq 0$, proposons plusieurs démonstrations

En se ramenant à une identité remarquable. On distingue deux cas.

— Si α et β sont du même signe, $\alpha\beta > 0$. On en déduit alors que $\alpha\beta > -2\alpha\beta$, donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 \geqslant 0.$$

— De même, si α et β sont de signes opposés, on a $0 > \alpha\beta > 2\alpha\beta$, donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geqslant \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \geqslant 0.$$

Grâce à la forme canonique d'un trinôme. On peut appliquer la manipulation qui permet d'obtenir la factorisation canonique d'un trinôme, c'est-à-dire essayer de reconnaître dans une somme le début du développement du carré. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{4} + \beta^2 \\ &= \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\beta^2. \end{aligned}$$

Cette quantité est donc la somme d'un carré de nombre réel et de $\frac{3}{4}\beta^2 > 0$, donc elle est strictement positive.

En se ramenant à un trinôme. Comme $\beta \neq 0$, on peut factoriser

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \beta^2 \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \frac{\alpha}{\beta} + 1\right).$$

Le trinôme du second degré $X^2 + X + 1$ ayant un discriminant < 0, on en déduit

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0,$$

comme voulu.

Grâce aux complexes. Posons $z = e^{i\pi/3}$. On a $|z| = 1$ et $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, donc

$$\begin{aligned}
|\alpha + \beta z|^2 &= \overline{(\alpha + \beta z)}(\alpha + \beta z) \\
&= (\alpha + \beta \overline{z})\,(\alpha + \beta z) && (\text{car } \alpha, \beta \in \mathbb{R}) \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta\,(z + \overline{z}) + \beta^2 z\overline{z} \\
&= \alpha^2 + 2\alpha\beta \operatorname{Re}(z) + \beta^2 |z|^2 \\
&= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2.
\end{aligned}$$

Comme $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta z$ n'est pas nul (il suffit par exemple de regarder sa partie imaginaire), donc

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = |\alpha + \beta z|^2 > 0.$$

108

Dans chacun des cas, on peut effectuer la division euclidienne de $A \in \mathbb{R}[X]$ par $B \in \mathbb{R}[X]$, qui est de degré 2.
On peut donc trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $A = BQ + R$.
En notant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ les coefficients de R, on obtient donc l'égalité

$$A = BQ + \alpha X + \beta, \qquad (*)$$

et il s'agit de déterminer α et β.

(i) On évalue $(*)$ en 1 et en 2, qui sont les racines de B. On obtient ainsi

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{et} \qquad 2^n = \alpha \times 2 + \beta.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer l'unique polynôme affine $R = \alpha X + \beta$ tel que $R(1) = 1$ et $R(2) = 2^n$. Après calcul, on obtient $\alpha = 2^n - 1$ et $\beta = 2 - 2^n$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est

$$(2^n - 1)X + (2 - 2^n).$$

(ii) On évalue $(*)$ en 1, qui est l'unique racine de B. On obtient ainsi

$$1 = 1^n = \alpha \times 1 + \beta \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \alpha + \beta = 1.$$

Pour exploiter le fait que 1 est racine double de B, on va également dériver la relation $(*)$, puis évaluer la relation dérivée en 1. Ainsi, $A' = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + \alpha$ d'où $nX^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2Q' + \alpha$ puis, en évaluant 1, on trouve $n = \alpha$.
On en déduit $\beta = 1 - \alpha = 1 - n$.
Ainsi, le reste dans la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ est

$$nX + (1 - n).$$

(iii) Le polynôme B possède deux racines qui sont cette fois-ci non réelles : il s'agit de $\pm i$.
En évaluant $(*)$ en i, on obtient

$$(i \sin t + \cos t)^n = \alpha i + \beta \qquad \text{donc} \qquad e^{int} = \alpha i + \beta.$$

(On pourrait également évaluer en $-i$, mais on n'obtiendrait alors rien d'autre que la relation conjuguée, ce qui ne nous apporterait pas de nouvelle information).
On obtient ainsi

$$\alpha = \operatorname{Im} e^{int} = \sin(nt)$$
$$\beta = \operatorname{Re} e^{int} = \cos(nt).$$

Ainsi, le reste dans la division euclidienne de $(X \sin t + \cos t)^n$ par $(X-1)^2$ est

$$\sin(nt)X + \cos(nt).$$

109

Solution. à rédiger !

Autre solution sans nombres complexes, mais avec une récurrence sur n, alors qu'au début de l'exercice n est fixé !
Cela nécessite de connaître le résultat !
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

$$\text{le reste de la division euclidienne de } (X+1)^n \text{ par } X^2+1 \text{ est } \alpha_n X + \beta_n \text{ où}$$

$$\alpha_n = \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Initialisation. Montrons que la propriété est vraie au rang 0.

D'une part, la division euclidienne de $(X+1)^0$ par X^2+1 s'écrit

$$(X+1)^0 \quad = \quad (X^2+1) \times 0_{\mathbb{R}[X]} \; + \; 0X + 1$$

D'autre part, on a $\alpha_0 = \sqrt{2}^0 \sin 0 = 0$ et $\beta_0 = \sqrt{2}^0 \cos 0 = 1$.

Ainsi, le reste de la division euclidienne de $(X+1)^0$ par X^2+1 s'écrit $\alpha_0 X + \beta_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété est vraie au rang n.

Ainsi, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$(X+1)^n \quad = \quad (X^2+1)Q_n \; + \; \alpha_n X + \beta_n$$

Multiplions par $X+1$, on obtient :

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)(X+1)Q_n \; + \; (X+1)(\alpha_n X + \beta_n)$$

ou encore :

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)(X+1)Q_n \; + \; \alpha_n X^2 + (\alpha_n + \beta_n)X + \beta_n$$

Écrivons $\alpha_n X^2$ sous la forme $\alpha_n(X^2+1) - \alpha_n$. On obtient

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)(X+1)Q_n \; + \; \alpha_n(X^2+1) \; + \; (\alpha_n + \beta_n)X + (\beta_n - \alpha_n)$$

D'où

$$(X+1)^{n+1} \; = \; (X^2+1)\Big((X+1)Q_n + \alpha_n\Big) \; + \; (\alpha_n + \beta_n)X + (\beta_n - \alpha_n)$$

Il ne reste plus qu'à montrer que

$$\alpha_n + \beta_n = \alpha_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \beta_n - \alpha_n = \beta_{n+1}$$

On a

$$\alpha_{n+1} \; = \; \sqrt{2}^{n+1} \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \; = \; \sqrt{2}^{n+1}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \; + \; \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

En utilisant que $\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on obtient :

$$\alpha_{n+1} \; = \; \sqrt{2}^n\left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \; + \; \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

ce qui s'écrit $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \beta_n$.

On procède de même pour β_{n+1}.

La propriété au rang $n+1$ est donc vraie.

111

Le reste de la division euclidienne de X^a par X^b-1 est X^r si et seulement si $\begin{cases} X^b-1 \mid X^a-X^r \\ \deg(X^r) < \deg(X^b-1) \end{cases}$

Comme $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$, la deuxième condition sur le degré est vérifiée.
Reste à montrer la divisibilité.
On a

$$X^a - X^r \;=\; X^{bq+r} - X^r \;=\; X^r((X^b)^q - 1)$$

L'égalité de Bernoulli dit que $X^b - 1$ divise $(X^b)^q - 1$, a fortiori divise $X^r((X^b)^q - 1)$, donc divise $X^a - X^r$.

112

Le mot clé est « Bernoulli ».
Supposons que $a = bq$.
Alors $X^a - 1 = (X^b)^q - 1^q$. Ce dernier polynôme est divisible par $X^b - 1$ (merci Bernoulli).

113

On peut fournir deux preuves.

1. À vous. En utilisant les racines de X^2+X+1, à savoir j et $\mathrm{j}^2=\bar{\mathrm{j}}$.
2. Ici, on s'interdit d'invoquer $\mathbb{C}$.
   • Commençons par montrer le lemme suivant

   Lemme pratique.

   $$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \exists\, Q_n\in\mathbb{R}[X],\quad X^{3n}=(X^3-1)Q_n+1$$

   L'identité de Bernoulli stipule que le polynôme A^n-B^n est divisible par $A-B$. En utilisant cela avec $A=X^3$ et $B=1$, on obtient que $X^{3n}-1$ est divisible par X^3-1. Ainsi il existe $Q_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que $X^{3n}-1=(X^3-1)Q_n$, d'où le lemme.

   On applique ce lemme avec les entiers p,q,r. Donc il existe Q_p, Q_q et Q_r tels que

   $$X^{3p}=(X^3-1)Q_p+1 \qquad X^{3q}=(X^3-1)Q_q+1 \qquad X^{3r}=(X^3-1)Q_r+1$$

   En utilisant l'égalité $X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r}=X^{3p}X^2+X^{3q}X+X^{3r}$, on en déduit

   $$X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r} \;=\; \Big((X^3-1)Q_p+1\Big)X^2 \;+\; \Big((X^3-1)Q_q+1\Big)X \;+\; \Big((X^3-1)Q_r+1\Big)$$

   D'où

   $$X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r} \;=\; (X^3-1)\Big(X^2Q_p+XQ_q+Q_r\Big)+(X^2+X+1)$$

   Or $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$, d'où

   $$X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r} \;=\; (X^2+X+1)\left[(X-1)\Big(X^2Q_p+XQ_q+Q_r\Big)+1\right]$$

   On a donc montré que X^2+X+1 divise $X^{3p+2}+X^{3q+1}+X^{3r}$.

114

Deux preuves.

- Une avec les racines de X^2+2 (chausser ses lunettes : il y a un système somme-différence à voir).
- L'autre avec l'identification des coefficients (est-ce faisable ?)

Notons $P = X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.
Comme une cherche une condition *nécessaire et suffisante*, il serait bon de raisonner directement par équivalence. Cela va être faisable grâce au cours, et au fait que l'on résout ensuite un système linéaire (par équivalence).

On a la factorisation $X^2+2 = (X+\mathrm{i}\sqrt{2})(X-\mathrm{i}\sqrt{2})$.
D'après le cours, on a l'équivalence

$$X^2+2 \text{ divise } P \iff \mathrm{i}\sqrt{2} \text{ et } -\mathrm{i}\sqrt{2} \text{ sont racines de } P$$

En évaluant P en $\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{2}$, on obtient donc les deux égalités suivantes qui sont équivalentes à l'assertion initiale :

$$\begin{cases} 4 - \mathrm{i}2\sqrt{2} - 2\lambda + \mathrm{i}\sqrt{2}\mu + 2 = 0 \\ 4 + \mathrm{i}2\sqrt{2} - 2\lambda - \mathrm{i}\sqrt{2}\mu + 2 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} 2\lambda - \mathrm{i}\sqrt{2}\mu = 6 - 2\sqrt{2}\mathrm{i} \\ 2\lambda + \mathrm{i}\sqrt{2}\mu = 6 + 2\sqrt{2}\mathrm{i} \end{cases}$$

Par somme et différence (on ne perd pas les équivalences, WHY ?), on a

$$\lambda = 3 \quad \text{et} \quad \mu = 2$$

115

Écrire explicitement la division euclidienne en fonction de a et b. Puis imposer au reste d'être nul.

On trouve $b^3 - 2b - 1$ et $a = b^2 - 1$. D'où $b = -1$ ou $b = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. D'où 3 couples solutions.

116

1. Écrivons P comme combinaison linéaire de X^k.
   Constatons que $P \circ A - P \circ B$ est alors combinaison linéaire de $A^k - B^k$ pour $k \geqslant 1$ (que devient le terme pour $k = 0$?).
   Or $A - B$ divise $A^k - B^k$ en vertu de l'égalité de Bernoulli.
   Par transitivité, on en déduit que $A - B$ divise $P \circ A - P \circ B$.
   On a donc
   $$P \circ A - P \circ B \ = \ (A - B) \times \text{qq chose}$$
2. On a $P \circ P - X = (P \circ P - P) + (P - X)$.
   Donc il suffit de montrer que $P - X$ divise $P \circ P - P$.

   On applique la question précédente à $A = P$ et $B = X$.
   D'où $P - X$ divise $P \circ P - P$.
3. Posons $P = X^2 + 3X + 1$.
   On a

   $$P \circ P - X \ = \ (X^2+3X+1)^2+3(X^2+3X+1)+1 \ - \ X \ = \ (X^2+3X+1)^2+3X^2+8X+4$$

   Et on a
   $$P - X \ = \ X^2 + 2X + 1 \ = \ (X+1)^2$$
   D'après la question précédente, on sait que $(X+1)^2$ divise $(X^2+3X+1)^2+3X^2+8X+4$.
   On identifie le quotient (par exemple en identifiant les coefficients) et on trouve
   $$Q = X^2 + 4X + 5$$

   Reste à trouver les racines de ce polynôme (à vous) et à conclure (à vous).

   Les solutions de l'équation $(z^2+3z+1)^2+3z^2+8z+4 = 0$ sont donc ...

118

Supposons qu'un tel polynôme P existe.
Ainsi, il existe $A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A,\ P(x) = \ln(x)$.
La clé de la preuve est de constater que le logarithme vérifie l'équation différentielle $xy' = 1$.
En particulier,

$$\forall\, x \geqslant A,\ x \ln'(x) = 1$$

Ainsi,

$$\forall\, x \geqslant A,\ xP'(x) = 1$$

On en déduit que les polynômes XP' et 1 coïncident sur un ensemble infini à savoir $[A, +\infty[$.
Donc ils sont égaux.
À cet instant, on a donc $XP' = 1$. En passant au degré, on en déduit que nécessairement $1 + \deg P' = 0$.
Or l'équation $1 + d = 0$ n'a pas de solution $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. D'où l'absurdité.

Solution de Tigrane Ponsin (2022-2023). Exploiter le fait que $\ln(x^2) = 2\ln x$ pour obtenir $P(X^2) = 2P(X)$, d'où $2\deg P = \deg P$, d'où P est constant. Mais la fonction ln n'est pas constante !

(i) Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = \frac{1}{k}.$$

Le polynôme $Q = XP$ vérifie alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, Q(k) = 1.$$

Autrement dit, les polynômes Q et 1 coïncident en une infinité de points. D'où $Q = 1$.
On a donc montré $XP = 1$, ce qui est absurde (par exemple, en évaluant en 0, on trouve $1 = 0$).

(ii) Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = \sqrt{k^2+1}.$$

Le polynôme $Q = P^2$ vérifie alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, Q(k) = k^2 + 1.$$

Autrement dit, les polynômes Q et X^2+1 coïncident en une infinité de points.
D'où $Q = X^2 + 1$.
On a donc montré $P^2 = X^2 + 1$.
Montrons que cela est absurde.
En passant au degré, on obtient $2 \deg P = 2$, donc $\deg P = 1$.
Comme tout polynôme réel de degré 1 possède une racine réelle, on en déduit qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P(x_0) = 1$. En évaluant en x_0 l'égalité $P^2 = X^2 + 1$, on trouve

$$\underbrace{P(x_0)^2}_{=0} = x_0^2 + 1$$

Or $x_0^2 + 1 > 0$ donc est non nul, d'où la contradiction.

(iii) **Solution 1 (probablement la plus simple).** Supposons par l'absurde pouvoir trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = 2^k.$$

Il est déjà clair qu'un tel polynôme P ne peut pas être nul.
On peut alors écrire $P = \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell X^\ell$, où $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ et $a_d \in \mathbb{R}^*$.
Par croissance comparée, quel que soit $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{x^\ell}{2^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit (par opérations) que

$$\frac{P(x)}{2^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Cela contredit le fait que cette fonction $f : x \mapsto \frac{P(x)}{2^x}$ doit satisfaire $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = 1$, et donne la contradiction attendue.

Solution 2 (un peu trop compliquée). On peut ici essayer de faire une démonstration dans la même veine que celle des deux points précédents. Le problème est qu'il n'est pas si facile de se ramener au fait que des polynômes coïncident une infinité de points : passer au logarithme, par exemple, transformerait 2^k en $\ln(2)\, k$, qui est bien la valeur en k du polynôme $\ln(2)\, X$, mais le second membre de l'égalité, $\ln P(k)$, ne serait plus polynomial.
On peut essayer d'utiliser la dérivée : la fonction $f : t \mapsto 2^t = \exp(\ln(2)\, t)$ est dérivable et vérifie $f' = \ln(2)\, f$, et on peut vérifier que le polynôme nul est le seul polynôme P vérifiant $P' = \ln(2)P$ (pour des raisons de degré, ou parce que tout polynôme devient nul quand on le dérive suffisamment de fois). Le problème est que la condition $\forall t \in$

$\mathbb{N}^*, P(t) = f(t)$ ne permettra pas de « passer » à la dérivée, car on a coïncidence en des points isolés. Pour prendre un exemple, les fonctions cos et sin coïncident en tout point de la forme $2\pi\, k + \frac{\pi}{4}$, mais cela ne suffit pas à dire que leurs dérivées sont égales en ces points.

On peut contourner cette difficulté en utilisant un analogue discret de la dérivée, « l'opérateur aux différences finies », qui remplace P par $P(X+1)-P(X)$ (comme $(X+1)-X = 1$, on peut penser à cette différence comme à un taux d'accroissement).

Après ces longs prolégomènes, passons à la démonstration.

Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme P tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = 2^k$. En particulier, P est non constant. On peut noter $d = \deg P \in \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} P(k+1) - P(k) &= 2^{k+1} - 2^k \\ &= 2^k \\ &= P(k). \end{aligned}$$

Ainsi, la différence $P(X+1) - P(X)$ et P coïncident sur une infinité de valeurs. Par rigidité des polynômes, on en déduit que $P(X+1) - P(X) = P$.

On va aboutir à une contradiction en vérifiant que $\deg(P(X+1) - P(X)) \leqslant d-1$ (on pourrait d'ailleurs montrer l'égalité).

On note α le coefficient dominant de P, de telle sorte que αX^d soit le coefficient dominant de P. On peut donc trouver $P_0 \in K_{d-1}[X]$ tel que $P = \alpha X^d + P_0$.

On a alors

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= \big(\alpha(X+1)^d + P_0(X+1)\big) - \big(\alpha X^d + P_0(X)\big) \\ &= \alpha \left[\sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} X^k - X^d\right] + P_0(X+1) - P_0(X) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k + P_0(X+1) - P_0(X). \end{aligned}$$

Or,

- quel que soit $k \in [\![0, d-1]\!]$, on a $X^k \in K_{d-1}[X]$ donc $\alpha \sum_{k=0}^{d-1} \binom{d}{k} X^k \in K_{d-1}[X]$ (par stabilité par combinaison linéaire) ;
- par construction, $P_0 \in K_{d-1}[X]$;
- le polynôme $X+1$ est non constant, donc $\deg\left(P_0(X+1)\right) = \deg P_0 = \deg(X+1) = \deg P_0$, donc $P_0(X+1) \in K_{d-1}[X]$.

Par stabilité par combinaison linéaire, on en déduit que $P(X+1) - P(X) \in K_{d-1}[X]$, ce qui conclut la démonstration.

1. Le polynôme $\widetilde{L_0} = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ convient.

   Ce polynôme est bien de degré n et admet les x_i comme racines.

2. Considérons le polynôme $\widetilde{L_0}$ précédent.

   Son évaluation en x_0 est non nulle : elle vaut $\widetilde{L_0}(x_0) = \prod_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)$, qui est non nul car les x_j sont deux à deux distincts.

   Posons $L_0 = \dfrac{1}{\widetilde{L_0}(x_0)}\widetilde{L_0}$ (licite d'après la phrase précédente).

   Ce polynôme est de degré n, vérifie $L_0(x_0) = 1$ et admet $x_1, \dots, x_n$ comme racines.

   Résumons. Le polynôme L_0 cherché (on démontre en fait qu'il est unique) est :

$$L_0 \;=\; \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(x_0 - x_i)} \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \frac{X - x_i}{x_0 - x_i}$$

3. Il suffit de poser

$$L_k \;=\; \frac{1}{\prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (x_k - x_j)} \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} (X - x_j)$$

   qui s'écrit encore

$$L_k \;=\; \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}} \frac{X - x_j}{x_k - x_j}$$

4. — **Existence.** Considérons $P = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$.

   Le polynôme P est une combinaison linéaire de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$, donc $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

   Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Calculons $P(x_i)$.

   On a donc

$$P(x_i) \;=\; \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) \;=\; \sum_{k \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} y_k \underbrace{L_k(x_i)}_{=0} + \sum_{k \in \{i\}} y_k \underbrace{L_k(x_i)}_{=1} \;=\; y_i.$$

   — **Unicité.**

   Prenons deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant la condition. Alors ils coïncident en $n+1$ points (et sont de degré $\leqslant n$), donc ils sont égaux.

5. **Première solution.**

   Un tel polynôme Q est unique d'après la question précédente, et s'exprime à l'aide des polynômes de Lagrange.

   Considérons les polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ associés aux points $1, 2, \dots, n$.

   Ainsi,

$$L_k \;=\; \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}} \frac{X - j}{k - j}$$

   Le polynôme cherché vaut $Q = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} L_k$.

   On souhaite calculer $Q(-1)$.

   Pour cela, calculons les $\dfrac{1}{k} L_k(-1)$.

   On peut conjecturer cette valeur en calculant ce terme pour $k = 1$, puis $k = 2$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}L_k(-1) &= \frac{1}{k}\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}\frac{-1-j}{k-j}\\
&= \frac{1}{k}\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}(-1-j)\times\frac{1}{\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}(k-j)}\\
&= \frac{1}{k}\times(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{k+1}\times\frac{1}{\prod\limits_{j\in[\![1,k-1]\!]}(k-j)\prod\limits_{j\in[\![k+1,n]\!]}(k-j)}\\
&= \frac{1}{k}\times(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{k+1}\times\frac{1}{(k-1)!\times(-1)^{n-k}(n-k)!}\\
&= (-1)^{k+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\\
&= (-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

On a donc

$$Q(-1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}L_k(-1) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n+1}{k+1} = \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i\binom{n+1}{i}$$

On reconnaît la somme alternée des coefficients binomiaux amputée de ses deux premiers termes.
On rappelle que la somme alternée des coefficients binomiaux est nulle, exceptée lorsque l'on est à la ligne numéro 0 du triangle de Pascal (ce qui n'est pas ici, car $n+1$ est supérieur à 1).
Reprenons :

$$Q(-1) = 0-\left((-1)^0\binom{n+1}{0}+(-1)^1\binom{n+1}{1}\right) = -\Big(1-(n+1)\Big) = n$$

Autre solution (moins calculatoire, mais plus astucieuse).
Soit $Q\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $\forall\, k\in[\![1,n]\!], Q(k)=\frac{1}{k}$ (un tel polynôme existe et est unique d'après la question précédente).
Posons $P=XQ-1$.
C'est un polynôme qui appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ et qui vérifie

$$P(0)=-1 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k\in[\![1,n]\!],\ P(k)=0$$

Considérons $x_0,x_1,\dots,x_n$ tels que $\forall\, k\in[\![0,n]\!]$, $x_k=k$
Posons également $y_0=-1$, $y_1=0$, …, $y_n=0$.
On a donc $\forall\, i\in[\![0,n]\!],\ P(x_i)=y_i$.
D'après la question précédente, P est unique.
Comme on connaît n racines, et une évaluation, on a nécessairement :

$$P = -\frac{\prod\limits_{j=1}^{n}(X-j)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(-j)} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad P=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{j=1}^{n}(X-j)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} P(-1) &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\prod_{j=1}^{n}(-1-j) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!}(-1)^n\prod_{j=1}^{n}(1+j) \\ &= -\frac{(n+1)!}{n!} \\ &= -(n+1) \end{aligned}$$

Comme $P(-1) = -Q(-1) - 1$, on en déduit $Q(-1) = n$.

1. Presque facile !
2. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine non nulle de P.
   Par récurrence, on montre que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a^{2^n} \text{ est une racine de } P$$
   Comme le polynôme P est non nul, il n'a qu'un nombre fini de racines.
   Ainsi, l'ensemble $\left\{a^{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est fini.
   On peut donc trouver deux entiers $n \neq m$ tels que $a^{2^n} = a^{2^m}$.
   Quitte à échanger n et m, on peut supposer $n > m$.
   En divisant de part et d'autre par a^{2^n} (ce qui est licite car $a \neq 0$), on obtient $a^{2^n - 2^m} = 1$.
   On a trouvé $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^p = 1$.
   Donc a est une racine de l'unité.
3. • Par l'absurde, supposons 0 racine de P.
   Alors d'après la question 1, le scalaire $(0+1)^2 = 1$ est aussi racine de P.
   Puis, à nouveau avec la question 1, le scalaire $(1+1)^2 = 4$ est aussi racine de P.
   La question 2 implique alors que 4 est une racine de l'unité, d'où la contradiction !

   • Par l'absurde, supposons -1 racine de P.
   Alors d'après la question 1, le scalaire $(-1+1)^2 = 0$ est aussi racine de P.
   Contradiction avec le point précédent.
4. On va montrer que $\begin{cases} |\beta| = 1 \\ |\beta + 1| = 1 \end{cases}$ ce qui fournira (WHY ?) que $\beta \in \{j, j^2\}$ (faire un dessin).
   • Par hypothèse, β est racine de P.
   D'après la question 3, β n'est pas nul.
   D'après la question 2, β est une racine de l'unité, donc a fortiori est de module 1.
   Cela montre la première égalité $|\beta| = 1$.
   • Par hypothèse, β est racine de P.
   D'après la question 1, le scalaire $(\beta+1)^2$ est racine de P, et est non nul d'après la question 3.
   D'après la question 2, $(\beta+1)^2$ est une racine de l'unité, donc a fortiori est de module 1.
   D'où la deuxième égalité $|\beta + 1| = 1$.

   Justification. Montrons $\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases} \implies z \in \{j, j^2\}$

   Par le dessin.
   L'ensemble des complexes z tels que $|z| = 1$ est le cercle trigonométrique.
   L'ensemble des complexes z tels que $|z+1| = 1$ est le cercle de centre $(-1, 0)$ et de rayon 1.
   Ces deux cercles s'intersectent en deux points qui sont équidistants des points $O = (0, 1)$ et $\Omega = (-1, 0)$ et donc sont sur la médiatrice du segment $[O\Omega]$ qui est la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
   Ainsi, ces deux points ont une abscisse égale à $-\frac{1}{2}$ et comme ils sont sur le cercle trigonométrique leur ordonnée vaut $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   Ces deux points ont donc pour affixe j et j^2.

   Par le calcul.

   Rappel. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*
   $$\begin{aligned} |z+1|^2 &= (z+1)(\overline{z+1}) \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 \end{aligned}$$
   Plus généralement, pour tous $z, \omega \in \mathbb{C}$, on a :
   $$\begin{aligned} |z+\omega|^2 &= (z+\omega)(\overline{z+\omega}) \\ &= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{\omega}) + |\omega|^2 \end{aligned}$$

On a les équivalences suivantes

$$
\begin{aligned}
\begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z+1|^2 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 1 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 1 \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Im}(z)^2 = \dfrac{3}{4} \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Im}(z) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\iff z \in \{j, j^2\}
\end{aligned}
$$

On écrit le polynôme sous la forme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où *a priori*, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.
Cela permet de définir le polynôme conjugué

$$\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k \in \mathbb{C}[X].$$

On voit directement que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{P}(t) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} t^k = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k} = \overline{P(t)}.$$

Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que $P(\alpha) \in \mathbb{R}$, on a automatiquement $P(\alpha) = \overline{P}(\alpha)$.
L'hypothèse de l'énoncé entraîne donc que P et $\overline{P}$ coïncident sur un ensemble infini, c'est-à-dire que leur différence $P - \overline{P}$ possède une infinité de racines. D'après le critère radical de nullité, on en déduit que $P - \overline{P} = 0$, c'est-à-dire que $P = \overline{P}$.
En identifiant les coefficients, on obtient $\forall k \in [\![0, n]\!], \overline{a_k} = a_k$, c'est-à-dire $\forall k \in [\![0, n]\!], a_k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $P \in \mathbb{R}[X]$.

(i) Si $\deg P \geqslant 1$, on sait que $\deg P' = \deg P - 1$, ce qui entraîne $P \neq P'$.
Si $\deg P \leqslant 0$, on a $P' = 0$, donc P ne peut être égal à P' que si $P = 0$.
Ainsi, $\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P = P'\right\} = \{0\}$.

(ii) On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $(P')^2 = 4P$. On distingue deux cas :

— Si $\deg P \leqslant 0$, $P' = 0$, donc $P = 0$.

— Supposons $\deg P \geqslant 1$. On a alors $\deg P' = \deg P - 1$. On a alors

$$\deg(P')^2 = 2\deg P' = 2\deg P - 2 \quad \text{et} \quad \deg(4P) = \deg P,$$

d'où il vient $2\deg P - 2 = \deg P$ et donc $\deg P = 2$.
On peut donc trouver $a \in \mathbb{K}^*$ et $b, c \in \mathbb{K}$ tels que $P = aX^2 + bX + c$. On a alors la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}
(P')^2 = 4P \quad &\text{donc} \quad (2aX+b)^2 = 4(aX^2+bX+c) \\
&\text{donc} \quad 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \\
&\text{donc} \quad \begin{cases} 4a^2 = 4a \\ 4ab = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases} \qquad \text{(par identification des coefficients)} \\
&\text{donc} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b^2 = 4c, \end{cases} \qquad \text{(car } a \neq 0\text{).}
\end{aligned}$$

Ainsi, $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$.

Synthèse. Réciproquement, on vérifie directement que le polynôme nul et, pour tout $b \in \mathbb{K}$, le polynôme $X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$, vérifient la condition de l'énoncé.

In fine,

$$\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid (P')^2 = 4P\right\} = \{0\} \cup \left\{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \mid b \in \mathbb{K}\right\}$$

(i) On constate que le polynôme est solution.
Montrons que c'est la seule solution.
Pour cela, supposons qu'il existe un polynôme *non nul* P tel que $P = P'$.
Comme $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on a $\deg P \in \mathbb{N}$.
Comme $P = P'$, on a $\deg P = \deg P'$.
Or $\deg P \leqslant \deg P' - 1$.
On en déduit $\deg P \leqslant \deg P - 1$ (ce qui serait possible si $\deg P$ était égal à $-\infty$).
Comme $\deg P \in \mathbb{N}$, en ajoutant $-\deg P$, on obtient $0 \leqslant -1$, d'où la contradiction.

(ii) Montrons que l'équation $P - XP' = X$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de solution.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P - XP' = X$.

Première solution d'Alfred – année 2021-2022

On a $P - XP' = X$.
Alors en dérivant, on obtient

$$P' - (P' + XP'') = 1$$

D'où $-XP'' = 1$.
Cette égalité montre que $P'' \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, donc $\deg P'' \in \mathbb{N}$.
En prenant les degrés, on a $1 + \deg P'' = 0$, ce qui conduit à $\deg P'' = -1$ qui n'est pas dans $\mathbb{N}$ d'où la contradiction.

Deuxième solution

Écrivons P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
L'égalité $P - XP' = X$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \;-\; X \times \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \;=\; X$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} a_k (1-k) X^k \;=\; X$$

En examinant le coefficient en X^1, on a

$$a_1(1-1) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad 0 = 1$$

d'où la contradiction.

(iii) Résoudre l'équation $2P = XP'$.

Première solution

Analyse Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $2P = XP'$.

Écrivons P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).
L'égalité $2P = XP'$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \;=\; X \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \;=\; \sum_{k=1}^{n} k a_k X^k$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad 2a_k = ka_k \qquad \text{ou encore} \qquad (2-k)a_k = 0$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \neq 2, \quad a_k = 0$$

Bilan de l'analyse : P est de la forme a_2X^2 avec $a_2 \in \mathbb{K}$.

Synthèse Vérifions que les polynômes de la forme aX^2 avec $a \in \mathbb{K}$ sont solutions.

Le membre gauche vaut $2P = 2aX^2$.

Le membre droit vaut $XP' = X \times 2aX = 2aX^2$.

D'où $2P = XP'$.

BILAN : les solutions sont les polynômes de la forme aX^2 avec $a \in \mathbb{K}$.

Deuxième solution par équivalences (mais attention, en général, c'est dangereux de raisonner par équivalence)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ que l'on écrit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
2P = XP' &\iff \sum_{k=0}^{n} 2a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} ka_k X^k \\
&\iff \forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad 2a_k = ka_k \\
&\overset{\text{WHY}}{\iff} \forall\, k \in [\![0,n]\!] \setminus \{2\}, \quad a_k = 0 \\
&\iff P = a_2X^2
\end{aligned}$$

(iv) **Analyse** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $mP = XP'$.

Écrivons P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on ne suppose pas que $a_n \neq 0$).

L'égalité $mP = XP'$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{n} ma_k X^k = X \sum_{k=1}^{n} ka_k X^{k-1}$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} ma_k X^k = \sum_{k=1}^{n} ka_k X^k$$

ou encore

$$\sum_{k=0}^{n} ma_k X^k = \sum_{k=0}^{n} ka_k X^k$$

Par identification des coefficients, on en déduit que

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad ma_k = ka_k \qquad \text{ou encore} \qquad (m-k)a_k = 0$$

Par conséquent,

$$\forall\, k \neq m, \quad a_k = 0$$

Bilan de l'analyse : P est de la forme a_mX^m avec $a_m \in \mathbb{K}$.

Synthèse Vérifions que les polynômes de la forme aX^m avec $a \in \mathbb{K}$ sont solutions.

Le membre gauche vaut $mP = maX^m$.

Le membre droit vaut $XP' = X \times maX = maX^m$.

D'où $mP = XP'$.

BILAN : les solutions sont les polynômes de la forme aX^m avec $a \in \mathbb{K}$.

125

Vous devez trouver $\mathrm{Vect}(X+2)$.
Remarque. Cette équation est « linéaire en P ».
En effet, on cherche le noyau de $P \mapsto X(X+1)P'' + (X+2)P' - P$ qui est une application linéaire.
Ainsi, la solution doit être également « linéaire en P ».
Une famille génératrice permettra donc de décrire l'ensemble des solutions !

126

Le polynôme nul est solution.
Soit P non nul vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.
Notons $n = \deg P$.
Si $n < 2$, alors $P'' = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Avec la relation, on trouve $P = 0$ ce que l'on a exclu.
Ainsi, $n \geqslant 2$ et alors $\deg P'' = n - 2$ et $\deg P = n - 1$.
Par passage au degré dans la relation, on trouve $n = (n-1) + (n-2)$.
D'où $n = 3$.
On peut l'écrire avec ses coefficients et traduire l'égalité $P(2X) = P'(X)P''(X)$ à l'aide des coefficients.
On trouve $P = \frac{4}{9}X^3$.
Réciproquement, ce polynôme est bien solution.

L'ensemble des solutions est donc le doubleton $\left\{0_{\mathbb{K}[X]},\ \frac{4}{9}X^3\right\}$.

127

Le polynôme nul n'est pas solution.
Un polynôme solution est nécessairement de degré n.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} P - P' = X^n \quad &\iff \quad a_n X^n \ + \ \sum_{k=0}^{n-1} \big[a_k - (k+1)a_{k+1}\big] X^k \ = \ X^n \\ &\iff \quad a_n = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad a_k = (k+1)a_{k+1} \end{aligned}$$

Ces relations définissent de manière unique les coefficients de P, donc définissent de manière unique P.

Essayons de trouver une formule explicite.
Par récurrence descendante finie, on voit que les a_k sont non nuls.
Ensuite, fixons $j \in [\![0, n-1]\!]$ (et même dans $[\![0, n]\!]$ si l'on veut !). On a :

$$\prod_{k=j}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \prod_{k=j}^{n-1} (k+1)$$

d'où, par télescopie, $\dfrac{a_j}{a_n} = n(n-1)\cdots(j+1)$.
Comme $a_n = 1$, on obtient $a_j = \dfrac{n!}{j!}$.
Bilan : $P_n = \sum_{j=0}^{n} \dfrac{n!}{j!} X^j$.

Autre preuve.

Analyse.

Soit P solution.
Le polynôme P n'est pas nul.
On a nécessairement $n = \deg P$.
En dérivant une fois $P' - P'' = nX^{n-1}$, puis $P'' - P^{(3)} = n(n-1)X^{n-2}$.
Par récurrence, on obtient

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad P^{(k)} - P^{(k+1)} \ = \ n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}$$

Par somme,

$$P - \underbrace{P^{(n+1)}}_{=0} \ = \ \sum_{k=0}^{n} n(n-1)\cdots(n-k+1)X^{n-k}$$

D'où

$$P \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$$

Synthèse. On vérifie que le polynôme $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}$ est solution.

130

Soit $n \in \mathbb{N}$ un majorant du degré de P.
D'après la formule de Taylor, on a

$$P \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k \;=\; P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$

On a donc

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) = P(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

On a $\forall\, x \in [a, +\infty[,\ x - a \geqslant 0$, d'où $(x-a)^k \geqslant 0$.
De plus, par hypothèse, on a $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(a)$.
Donc tous les termes de la somme de droite sont $\geqslant 0$, ce qui montre que

$$\forall\, x \in [a, +\infty[, \quad P(x) \geqslant P(a) > 0.$$

On en déduit que P ne possède pas de racines dans $[a, +\infty[$.

— La linéarité n'est pas difficile : elle résulte de la linéarité de la dérivation et de l'évaluation.

— Montrons l'injectivité de Ψ. Prenons un polynôme du noyau de Ψ. Alors il est de degré $\leqslant n$ et admet a comme racine de multiplicité au moins $n+1$. Donc c'est le polynôme nul.

— Montrons la surjectivité. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.

Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k$.

On montre que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et que $\Psi(P) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$.

— **Conclusion.** L'application Ψ est un isomorphisme et on a

$$\begin{array}{rccc} \Psi^{-1} : & \mathbb{K}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ & (\lambda_0, \dots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}(X-a)^k \end{array}$$

— **Remarque (1).** En exploitant la formule de Taylor, on peut montrer directement la bijectivité de Ψ.

— **Remarque (2).** En algèbre linéaire, on apprend que « une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension est un isomorphisme ».
Ce résultat peut être appliqué ici car $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$ qui vaut également $\dim \mathbb{K}^{n+1}$.

— **Remarque (3).** Une autre façon de montrer que Ψ est un isomorphisme est de montrer que Ψ est une application linéaire qui transforme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ en une base de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Un petit calcul montre que

$$\begin{array}{rcl} \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \Psi(X^k) & = & (0, \dots, 0, k!, 0, \dots, 0) \\ & = & k!\; e_{k+1} \end{array}$$

où $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.
Ainsi, Ψ transforme la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ en la famille $\big(k!\, e_{k+1}\big)_{k \in [\![0,n]\!]}$ qui est une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ (WHY ?).

(i) On a $P = X^5 - 4X^4 + 7X^3 - 7X^2 + 4X - 1$, donc $P(1) = 0$.
Puis $P' = 5X^4 - 16X^3 + 21X^2 - 14X + 4$, donc $P'(1) = 0$.
On a $P'' = 20X^3 - 48X^2 + 42X - 14$, d'où $P''(1) = 0$.
On a $P''' = 60X^2 - 96X + 42$, d'où $P'''(1) \neq 0$.
Ainsi 1 est racine de P de multiplicité 3.
Ainsi P s'écrit $(X-1)^3 Q$ avec $Q \in \mathbb{K}_2[X]$.
En examinant les coefficients dominant et constant, on peut dire que Q est de la forme $X^2 + bX + 1$. Reste donc à déterminer b.
On a l'égalité

$$P = (X-1)^3(X^2 + bX + 1)$$

Le coefficient en X du polynôme à droite vaut $3 - b$.
Comme le coefficient en X de P vaut 4, on a $4 = 3 - b$, d'où $b = -1$.
On a donc l'égalité :

$$P = (X-1)^3(X^2 - X + 1)$$

Comme le discriminant de $X^2 - X + 1$ est strictement négatif, ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$P = (X-1)^3(X^2 - X + 1)$$

(ii) On a $P = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$, donc $P(1) = 0$.
On a $P' = 4X^3 + 4X - 8$, donc $P'(1) = 0$.
Donc 1 racine de P de multiplicité au moins 2. Ainsi, P s'écrit $(X-1)^2 Q$ avec $\deg Q \leqslant 2$.
Le polynôme Q est de la forme $aX^2 + bX + c$.
En examinant le coefficient dominant et constant, on obtient directement $a = 1$ et $c = 5$. Reste à déterminer le coefficient b. On trouve $b = 2$.
On a donc l'égalité

$$P = (X-1)^2(X^2 + 2X + 5)$$

Comme le discriminant de $X^2 + 2X - 5$ est strictement négatif, ce polynôme est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, la factorisation du polynôme P est

$$P = (X-1)^2(X^2 + 2X + 5)$$

(iii) On a

$$P = X^4 - (5 + \sqrt{2})X^3 + (5\sqrt{2} - 2)X^2 + (10 + 2\sqrt{2})X - 10\sqrt{2}$$

Donc $P(\sqrt{2}) = 0$.
Puis $P' = 4X^3 - 3(5 + \sqrt{2})X^2 + 2(5\sqrt{2} - 2)X + (10 + 2\sqrt{2})$, d'où $P'(\sqrt{2}) = 0$.
De plus, $P'' = 12X^2 - 6(5 + \sqrt{2})X + 2(5\sqrt{2} - 2)$, donc $P''(\sqrt{2}) = -20\sqrt{2} + 8 \neq 0$,
Donc $\sqrt{2}$ est racine de P de multiplicité 2.
Ainsi P s'écrit $(X - \sqrt{2})^2(aX^2 + bX + c)$.
En identifiant les coefficients, on trouve $a = 1$, $b = \sqrt{2} - 5$ et $c = -5\sqrt{2}$.
On a donc l'égalité

$$P = (X - \sqrt{2})^2(X^2 + (\sqrt{2} - 5)X - 5\sqrt{2})$$

Le polynôme $X^2 + (\sqrt{2} - 5)X - 5\sqrt{2}$ a un discriminant positif ; il admet 5 et $-\sqrt{2}$ pour racine. Il s'écrit donc $(X - 5)(X + \sqrt{2})$.
On a donc l'égalité

$$P = (X - \sqrt{2})^2(X - 5)(X + \sqrt{2})$$

C'est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

133

Première preuve. On utilise la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(X+1)^n - nX - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k \\ &= X^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-2}}_{\in \mathbb{K}[X]},\end{aligned}$$

donc ce polynôme est divisible par X^2.

Deuxième preuve. Notons $P = (X+1)^n - nX - 1$. On a

- ⋆ $P(0) = (0+1)^n - n\,0 - 1 = 0$, donc 0 est racine de P ;
- ⋆ $P' = n(X+1)^{n-1} - n$, donc $P'(0) = n1^{n-1} - n = 0$.

Donc 0 est racine de multiplicité au moins 2. Donc X^2 divise P.

134

On a

- $P(1) = 1 - (2n+1) + (2n+1) - 1 = 0$, donc 1 est racine de P.
- $P' = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1}$, donc

$$\begin{aligned} P'(1) &= (2n+1) - (2n+1)(n+1) + (2n+1)n \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P'.
- $P'' = (2n+1)(2n)X^{2n-1} - (2n+1)(n+1)nX^{n-1} + (2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ donc

$$\begin{aligned} P''(1) &= (2n+1)(2n) - (2n+1)(n+1)n + (2n+1)n(n-1) \\ &= (2n+1)n\left[2 - (n+1) + (n-1)\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P''.
- $P''' = (2n+1)(2n)(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)(n+1)n(n-1)X^{n-2} + (2n+1)n(n-1)(n-2)X^{n-3}$ donc

$$\begin{aligned} P'''(1) &= (2n+1)(2n)(2n-1) - (2n+1)(n+1)n(n-1) + (2n+1)n(n-1)(n-2) \\ &= (2n+1)n\left[2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)\right] \\ &= (2n+1)n\left[4n - 2 - (n-1)\left[(n+1) - (n-2)\right]\right] \\ &= (2n+1)n(n+1) \neq 0, \end{aligned}$$

  donc 1 n'est pas racine de P'''.

La multiplicité de 1 en tant que racine de P est donc 3.

1. Soit a une racine de P_n, donc $P_n(a) = 0$. Montrons que $P_n'(a) \neq 0$.
   La clé de la démonstration réside dans l'égalité suivante (à prouver tout seul)

$$P_n' \;=\; P_{n-1} \quad \text{qui s'écrit encore} \quad P_n' \;=\; P_n - \frac{1}{n!}X^n$$

   D'où

$$P_n'(a) = P_n(a) - \frac{1}{n!}a^n$$

   Comme $P_n(a) = 0$, on obtient $P_n'(a) = -\frac{1}{n!}a^n$.
   Cette expression est non nulle car $a \neq 0$ (en effet, on remarque que $P_n(0) = 1$ donc 0 n'est pas racine).

   Résumé de la preuve.
   On a l'égalité fondamentale suivante (spécifique à ce polynôme) :

$$P_n \;=\; \frac{1}{n!}X^n \;+\; P_n'$$

   En évaluant en $a \in \mathbb{C}$, on obtient

$$P_n(a) \;=\; \frac{1}{n!}a^n \;+\; P_n'(a)$$

   Désormais, si on prend a une racine de P_n, on a nécessairement $a \neq 0$ (WHY ?), et on constate donc que $P_n'(a) \neq 0$.

   Autre rédaction (un petit raisonnement par l'absurde).
   Le polynôme constant $P_0 = 1$ n'a pas de racine, donc il n'a tautologiquement que des racines simples.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que P_n n'a que des racines simples.
   Supposons par l'absurde que P_n possède une racine multiple $a \in \mathbb{C}$. En particulier, on doit avoir

$$P_n(a) = P_n'(a) = 0.$$

   Or,

$$\begin{aligned} P_n' &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\,X^{k-1}}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{X^{\ell}}{\ell!} \qquad [\ell = k-1] \\ &= P_{n-1} \\ &= P_n - \frac{X^n}{n!}. \end{aligned}$$

   La double égalité $P_n(a) = P_n'(a) = 0$ donne alors que $\frac{a^n}{n!} = 0$; ce qui entraîne, *puisque* $n \geqslant 1$, que $a = 0$.
   Or 0 n'est pas racine de P_n, car $P_n(0) = 1 \neq 0$.
   On obtient ainsi la contradiction souhaitée, ce qui conclut la démonstration.

2. **Brouillon.**
   On commence par se faire la main sur les petites valeurs de n.
   On a

$$P_0 = 1 \qquad P_1 = X + 1 \qquad P_2 = \frac{1}{2}X^2 + X + 1 \qquad P_3 = \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X + 1$$

   On constate que les polynômes P_0 et P_2 n'ont pas de racine réelle (calculer le discriminant).

D'autre part, on se rappelle du résultat suivant « un polynôme à ceofficients réels de degré impair admet *au moins* une racine réelle ».

Pour connaître le nombre de racines de P_3, on peut étudier les variations de la fonction polynomiale associée, notée $\widetilde{P_3}$.

Or on a l'égalité de polynômes formels $P_3' = P_2$.

De plus, la fonction $\widetilde{P_2}$ ne s'annule pas, donc garde un signe constant en vertu du TVI (une fonction polynomiale est continue).

Comme il est facile de voir que $\widetilde{P_2}$ est une fonction positive, on constate que $\widetilde{P_3}$ est croissante, donc ne peut pas s'annuler plus de deux fois (comme $\widetilde{P_3}$ s'annule une fois, elle s'annule une unique fois !).

Début de la preuve. On note $\widetilde{P}$ la fonction polynomiale associée à un polynôme P.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété :

$$\text{« Le polynôme } P_n \text{ possède } \begin{cases} 0 \text{ racine réelle} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 \text{ unique racine réelle} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \text{ »}$$

Initialisation.

Montrons $\mathcal{H}_0$. Comme 0 est pair, il s'agit de montrer que P_0 n'a pas de racine réelle, ce qui est le cas puisque $P_0 = 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_{n-1}$. Montrons $\mathcal{H}_n$.

Il y a deux cas à distinguer !

— **Cas n pair.** Montrons que P_n n'a pas de racine réelle.

Utilisons un raisonnement d'Analyse en étudiant les fonctions polynomiales associées.

On a l'égalité de polynômes formels $P_n' = P_{n-1}$.

D'après $\mathcal{H}_{n-1}$, comme $n-1$ est impair, le polynôme P_{n-1} admet une unique racine réelle, notons-la α.

Comme le coefficient dominant de P_{n-1} est positif, on en déduit la première ligne du tableau suivant.

Justifions la deuxième ligne.

On a $P_{n-1}(\alpha) = 0$ et la relation fondamentale $P_n = \frac{1}{n!}X^n + P_n'$, d'où $P_n(\alpha) = \dfrac{1}{n!}\alpha^n$.

Comme n est pair, $P_n(\alpha) \geqslant 0$.

Par ailleurs, comme 0 n'est pas racine des polynômes P_k, on a $\alpha \neq 0$.

On en déduit $P_n(\alpha) > 0$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $\widetilde{P_n}' = \widetilde{P_{n-1}}$		$-$	0	$+$	
Variations de $\widetilde{P_n}$		↘	> 0	↗	

On en déduit que P_n n'a pas de racine réelle.

— **Cas n impair.** Montrons que P_n a une unique racine réelle.

D'après $\mathcal{H}_{n-1}$, comme $n-1$ est pair, le polynôme P_{n-1} n'admet pas de racine réelle. De plus, en examinant le signe du coefficient dominant et en utilisant la continuité de $\widetilde{P_{n-1}}$, on obtient que la fonction $\widetilde{P_{n-1}}$ est strictement positive.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $\widetilde{P_n}' = \widetilde{P_{n-1}}$		$+$	
Variations de $\widetilde{P_n}$	$-\infty$	↗	$+\infty$

Le TVI appliqué à la fonction $\widetilde{P_n}$ montre que le polynôme formel P_n admet une unique racine réelle.

Dans les deux cas, on a montré $\mathcal{H}_n$.

137

1. À vous.
2. • L'identité de Bernoulli fournit

$$X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$$

Comme le discriminant de X^2+X+1 est négatif, c'est la factorisation de X^3-1 dans $\mathbb{R}[X]$.
• On a $X^3+1=-\Big((-X)^3-1\Big)=-\big((-X)-1\big)\big((-X)^2+(-X)+1\big)$. Donc

$$X^3+1 \;=\; -(-X-1)(X^2-X+1)$$

Donc

$$X^3+1 \;=\; (X+1)(X^2-X+1)$$

Comme le discriminant de X^2-X+1 est négatif, c'est la factorisation de X^3+1 dans $\mathbb{R}[X]$.
• Concluons.
En utilisant les deux points précédents et la factorisation de Y^2-1, on a :

$$X^6-1 \;=\; (X^3)^2-1 \;=\; (X^3-1)(X^3+1) \;=\; (X-1)(X^2+X+1)(X+1)(X^2-X+1)$$

Comme les discriminants des polynômes de degré 2 sont négatifs, c'est la factorisation de X^6-1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Autre idée (pas terrible).
En utilisant la factorisation de Y^3-1, on a

$$X^6-1 \;=\; (X^2)^3-1 \;=\; (X^2-1)(X^4+X^2+1)$$

Il nous faut donc factoriser X^2-1 (facile, c'est $(X-1)(X+1)$) et factoriser le polynôme de degré X^4+X^2+1 (plus difficile !), c'est un polynôme sans racine réelle donc produit de deux polynômes de degré 2. Et sa factorisation fait l'objet de l'exercice suivant.

138

Première solution astucieuse On a

$$X^4+X^2+1 \;=\; (X^2+1)^2-X^2 \;=\; (X^2+1-X)(X^2+1+X)$$

Comme chaque polynôme de degré 2 obtenu a un discriminant strictement négatif, la factorisation du polynôme P est :

$$X^4+X^2+1 \;=\; (X^2-X+1)(X^2+X+1)$$

Deuxième solution
Voici un mini-lemme.

> Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré pair est toujours un produit de polynômes de degré 2.
> Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré impair est toujours un produit de polynômes de degré 2, à un facteur de degré 1 près !

Le polynôme $P=X^4+X^2+1$ se factorise sous la forme suivante (penser au mini-lemme, ou à sa démonstration) :

$$P=a(X^2+bX+c)(X^2+b'X+c')$$

Comme P est unitaire, on a $a=1$.
Le membre droit vaut $X^4+(b+b')X^3+(c+bb'+c')X^2+(bc'+cb')X+cc'$.
Par identification des coefficients, on a les 4 égalités suivantes :

$$\begin{cases} b+b'=0 \\ c+bb'+c'=1 \\ bc'+cb'=0 \\ cc'=1 \end{cases}$$

Les lignes 1 et 3 impliquent $b(c'-c)=0$.
Donc $b=0$ ou $c=c'$.

Montrons que le cas $b=0$ ne peut pas arriver. Si $b=0$, alors la ligne 1 fournit $b'=0$; la ligne 2 s'écrit donc $c+c'=1$. Or $cc'=1$. En combinant ces deux dernières égalités, on a $c(1-c)=1$ d'où $c^2-c+1=0$.
Donc c est solution de $t^2-t+1=0$. Or cette équation n'a pas de racine réelle, car le discriminant vaut -3. D'où la contradiction.

On a donc $c=c'$.
Les lignes 1 et 2 fournissent $2c-b^2=1$ et la ligne 4 fournit $c^2=1$. Ces deux égalités fournissent $c=1$ (WHY ?).
D'où $c'=1$.
Reste à identifier b et b'. La ligne 2 fournit $bb'=-1$ et et la ligne 1 est $b+b'=0$. Donc b et b' sont solution de $t^2-1=0$.
Ainsi b et b' valent 1 ou -1.
D'où :

$$P=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$$

Ces deux polynômes de degré 2 étant de discriminant <0, c'est la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

139

On utilise ici la notation classique $\zeta_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$.

(i) Sur $\mathbb{C}$: $X^2+X+1 = (X-j)(X-\overline{j})$;
Sur $\mathbb{R}$, le polynôme est irréductible.

(ii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4-4 = (X^2-2)(X^2+2) = (X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X-\sqrt{2}i)(X+\sqrt{2}i)$.
Sur $\mathbb{R}$: $(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})(X^2+2)$.

(iii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4+1 = (X-\zeta_8)(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)(X-\zeta_8^7)$ (les racines sont les racines quatrièmes de -1).
Sur $\mathbb{R}$, on rassemble les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} X^4+1 &= (X-\zeta_8)(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)(X-\zeta_8^7) \\ &= \left[(X-\zeta_8)(X-\zeta_8^7)\right]\left[(X-\zeta_8^3)(X-\zeta_8^5)\right] \\ &= \left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right). \end{aligned}$$

(iv) Sur $\mathbb{C}$: $X^6+27 = \prod_{\omega\in\mathbb{U}_6}\left(X-\omega\, i\sqrt{3}\right) = \prod_{\substack{k\in[\![0,11]\!]\\ k \text{ impair}}}\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^k\right)$.
Sur $\mathbb{R}$ (un petit dessin aide),

$$\begin{aligned} X^6+27 &= \left[\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}\right)\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^{11}\right)\right]\left[\left(X-\sqrt{3}\,i\right)\left(X+\sqrt{3}\,i\right)\right]\left[\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^{5}\right)\left(X-\sqrt{3}\,\zeta_{12}^{7}\right)\right] \\ &= (X^2-3X+3)(X^2+3)(X^2+3X+3). \end{aligned}$$

(v) Sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (X^2-X+1)^2+1 &= \left[(X^2-X+1)-i\right]\left[(X^2-X+1)+i\right] \\ &= \left(X^2-X+(1-i)\right)\left(X^2-X+1+i\right) \\ &= (X+i)(X-(1+i))(X-i)(X-(1-i)). \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (X^2-X+1)^2+1 &= \left[(X+i)(X-i)\right]\left[(X-(1+i))(X-(1-i))\right] \\ &= \left(X^2+1\right)\left(X^2-2X+2\right). \end{aligned}$$

(vi) On se rend compte (soit successivement soit, si l'on sent l'arnaque, en vérifiant que les premières dérivées du polynôme ont 1 comme racine) que $(X-1)^3$ divise le polynôme. On obtient alors

$$\begin{aligned} X^5-10X^4+25X^3-25X^2+10X-1 &= (X-1)^3(X^2-7X+1) \\ &= (X-1)^3\left(X-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui est à la fois la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

(vii) L'indication montre qu'il existe une racine z telle que la somme des trois racines vaille $2z$. D'après les relations coefficients-racines, cette somme vaut en fait 8, donc on obtient que 4 est racine. Ainsi,

$$X^3-8X^2+23X-28 = (X-4)(X^2-4X+7),$$

ce qui est la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ s'obtient alors immédiatement :

$$X^3-8X^2+23X-28 = (X-4)(X-(2+\sqrt{3}\,i))(X-(2-\sqrt{3}\mathrm{i})).$$

(viii) L'indication nous permet d'obtenir une factorisation de la forme

$$X^4+12X-5 = (X^2-2X+a)(X^2+bX+c),$$

d'où l'on tire immédiatement $b=2$ puis, rapidement, $a=5$ et $c=-1$.
Ainsi,

$$X^4+12X-5 = (X^2-2X+5)(X^2+2X-1) = (X^2-2X+5)(X+1+\sqrt{2}))(X+1-\sqrt{2}),$$

ce qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
On obtient alors la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4+12X-5 = (X-(1+2i))(X-(1-2i))(X+1+\sqrt{2}))(X+1-\sqrt{2}).$$

• On montre la première égalité en distinguant le cas $z = 0$ ou pas à l'aide de l'identité :

$$X^n - 1 \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (X-\omega)$$

Pour $z \neq 0$, on a

$$X^n \;-\; z^n \;=\; z^n\Big((\frac{1}{z}X)^n - 1\Big) \;=\; z^n \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \left(\Big(\frac{1}{z}X\Big) - \omega\right) \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (X-\omega z)$$

L'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ \xi & \longmapsto & \overline{\xi}\end{array}$ est bijective (c'est même une involution).

Ainsi

$$\Big\{\omega,\ \omega\in\mathbb{U}_n\Big\} \;=\; \Big\{\overline{\xi},\ \xi\in\mathbb{U}_n\Big\}$$

D'où

$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (X-\omega z) \;=\; \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n} (X-\overline{\xi} z)$$

• Prenons la première égalité que l'on évalue en z_1 :

♣ $$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_1^n \;-\; z_2^n \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (z_1 - \omega z_2)$$

• D'après l'égalité ♣, on a :

$$\forall\, \xi\in\mathbb{C}, \quad (A^n \;-\; B^n)(\xi) \;=\; \left(\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (A-\omega B)\right)(\xi)$$

Ainsi, les deux polynômes $A^n - B^n$ et $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} (A-\omega B)$ coïncident sur $\mathbb{C}$.

D'où l'égalité.

1. D'après le cours (relation coefficients-racines), on a $\sigma_1 = \dfrac{-b}{a}$, puis $\sigma_2 = \dfrac{c}{a}$ et $\sigma_3 = \dfrac{-d}{a}$.
2. Vous devez trouver $x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ et $x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.
3. On doit trouver 6 solutions. L'une d'entre elles est $(1, -2, 3)$, je vous laisse deviner les 5 autres.

147

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{yz+xz+xy}{xyz}=1 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 \\ yz+xz+xy=-4 \\ xyz=-4 \end{cases} \iff \begin{array}{l} x,\ y,\ z \text{ racines de} \\ X^3-X^2-4X+4 \end{array}$$

Le polynôme X^3-X^2-4X+4 admet 1 comme racine évidente, donc est factorisable par $X-1$.
En effectuant la division euclidienne, ou bien en identifiant les coefficients, on trouve que

$$X^3-X^2-4X+4 \;=\; (X-1)(X^2-4)$$

Donc les racines de ce polynôme sont $1, 2, -2$.
Il y a donc 6 triplets solutions :

$$(1,2,-2) \quad ; \quad (1,-2,2) \quad ; \quad (2,-2,1) \quad ; \quad (2,1,-2) \quad ; \quad (-2,2,1) \quad ; \quad (-2,1,2).$$

On peut commencer à se faire la main, même si c'est trop petit, avec $n = 2$ (on trouve -4).
On a

$$\prod_{\substack{(\omega,\omega')\in\mathbb{U}_n^2\\ \omega\neq\omega'}} (\omega-\omega') \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (\omega-\omega') \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\omega \prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (1-\frac{\omega'}{\omega})\right)$$

Pause.
Faisons une pause dans notre calcul, et apprenons un peu de maths.
Fixons $\omega_0 \in \mathbb{U}_n$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\omega_0}: & \mathbb{U}_n & \longrightarrow & \mathbb{U}_n \\ & \zeta & \longmapsto & \dfrac{\zeta}{\omega_0} \end{array}$$

est bien définie (WHY ?) et est bijective (de bijection réciproque $\xi \mapsto \omega_0\xi$).
On en déduit facilement par restriction et co-restriction (ou bien on refait une preuve) que l'application :

$$\begin{array}{rccc} \psi_{\omega_0}: & \mathbb{U}_n\setminus\{\omega_0\} & \longrightarrow & \mathbb{U}_n\setminus\{1\} \\ & \zeta & \longmapsto & \dfrac{\zeta}{\omega_0} \end{array}$$

est bijective.

Autre pause.
Soit $f : E \to F$ une application *bijective* entre deux ensembles finis, et on suppose que $F \subset \mathbb{C}$ (de sorte que les éléments de F se multiplient).
Alors

$$\prod_{x\in E} f(x) = \prod_{y\in F} y$$

On peut reformuler cela :

> *Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une application injective avec E ensemble fini.*
> *Alors*
>
> $$\prod_{x\in E} f(x) = \prod_{y\in f(E)} y$$

Un joli résultat. On a les deux égalités :

$$X^n-1 \;=\; \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n}(X-\xi) \qquad \text{et} \qquad X^n-1 = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

On en déduit (WHY ? Cela nécessite une vraie preuve)

$$\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}(X-\xi) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} X^k$$

En évaluant en 1, on obtient la belle identité :

$$\prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}(1-\xi) \;=\; n$$

Revenons à nos moutons et recollons les morceaux !

On a

$$\prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (1-\frac{\omega'}{\omega}) \;=\; \prod_{\xi\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}(1-\xi) \;=\; n$$

Multiplions par $\omega \in \mathbb{U}_n$ et effectuons le produit sur ω :

$$\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\omega \prod_{\omega'\in\mathbb{U}_n\setminus\{\omega\}} (1-\frac{\omega'}{\omega})\right) \;=\; \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}(\omega n) \;=\; n^n \prod_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega \;=\; n^n(-1)^{n+1}$$

Cette formule fonctionne bien pour $n = 2$, c'est rassurant !

1. **Remarque initiale.** Rappelons que l'on a

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

En prenant $p=(n+1)\theta$ et $q=(n-1)\theta$, on a $\dfrac{p+q}{2}=n\theta$ et $\dfrac{p-q}{2}=\theta$.
D'où

$$\cos\big((n+1)\theta\big)+\cos\big((n-1)\theta\big) \;=\; 2\cos(n\theta)\cos\theta$$

Reformulation : on vient de montrer que

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\quad \cos\big((p+2)\theta\big) \;=\; 2\cos\theta\,\cos\big((p+1)\theta\big)-\cos(p\theta)$$

Existence.
On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par récurrence de la façon suivante

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = X \\ \forall\, n\in\mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1}-T_n \end{cases}$$

Montrons maintenant que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$

Pour cela, fixons $\theta\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété suivante :

$$\mathcal{H}_n :\qquad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$

Prouvons cela par récurrence double.

Initialisation

⋆ D'une part, on a $T_0=1$, donc $T_0(\cos\theta)=1$. D'autre part, $\cos(0\times\theta)=1$.
Donc $\mathcal{H}_0$ et vraie.
⋆ D'une part, on a $T_1=X$, donc $T_1(\cos\theta)=\cos\theta$. D'autre part, $\cos(1\times\theta)=\cos\theta$.
Donc $\mathcal{H}_1$ et vraie.

Hérédité Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$.
Montrons $\mathcal{H}_{n+2}$.
Par définition de la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$, on a

$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; 2\cos\theta\,T_{n+1}(\cos\theta)-T_n(\cos\theta)$$

D'après $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$, on a

$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; 2\cos\theta\cos\big((n+1)\theta\big)-\cos(n\theta)$$

Or, d'après la remarque initiale, on a

$$\forall\, p\in\mathbb{N},\quad 2\cos\theta\,\cos\big((p+1)\theta\big)-\cos(p\theta)=\cos\big((p+2)\theta\big)$$

On applique cela à $p=n$ et on obtient

$$T_{n+2}(\cos\theta) \;=\; \cos\big((n+2)\theta\big)$$

D'où $\mathcal{H}_{n+2}$.

2. Considérons deux suites de polynômes (S_n) et (T_n) telles que

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \forall\,\theta\in\mathbb{R},\qquad S_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)\qquad\text{et}\qquad T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$$

On souhaite montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, les polynômes S_n et T_n sont égaux.
Fixons $n\in\mathbb{N}$.
On remarque que

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\quad S_n(\cos\theta) \;=\; T_n(\cos\theta)$$

Comme la fonction cosinus a pour image $[-1,1]$, on en déduit :

$$\forall\, t\in[-1,1],\quad S_n(t) \;=\; T_n(t)$$

Ainsi les polynômes S_n et T_n coïncident sur une partie infinie de $\mathbb{R}$ donc, d'après le critère radical de nullité, les polynômes S_n et T_n sont égaux.

3. On souhaite calculer $T_n(x_k)$ sachant que x_k est du type $\cos\theta_k$ avec $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$.
   Or $T_n(\cos\theta_k) = \cos(n\theta_k)$.
   Donc
   $$T_n(x_k) \;=\; \cos\left(n\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \;=\; \cos\left(k+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{WHY}}{=} 0$$
   On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le réel x_k est racine de T_n.
   Remarque. On a l'impression d'avoir trouvé une infinité de racines pour T_n. Mais T_n n'est pas le polynôme nul comme on le verra dans un instant. Où est donc l'explication ? Les x_k ne sont pas deux à deux distincts !

   Montrons que $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts.
   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\theta_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} \in [0, \pi]$. Comme la fonction cosinus est **strictement** décroissante et que $\theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1}$, on en déduit
   $$x_0 = \cos\theta_0 \;>\; x_1 = \cos\theta_1 \;>\; \cdots \;>\; x_{n-1} = \cos\theta_{n-1}$$
   Donc les x_i sont deux à deux distincts pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

   BILAN : le polynôme T_n possède (au moins) n racines réelles distinctes deux à deux.
4. Commençons par remarquer que T_0 est constant et que sa factorisation est donc immédiate :
   $$T_0 = 1$$
   Désormais, supposons $n \geqslant 1$.
   Le polynôme T_n possède n racines réelles distinctes, à savoir $x_0, \dots, x_{n-1}$.
   Comme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} (récurrence double, faites-le), on en déduit la factorisation de T_n dans $\mathbb{R}[X]$:
   $$T_n \;=\; 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X - x_k)$$

1. La fonction polynomiale $f : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est dérivable.
   On a $f' : x \mapsto 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
   On a $f'' : x \mapsto 12x^2 + 6x + 2$ qui est une fonction polynomiale de degré 2 dont le discriminant est < 0. Ainsi, f' est strictement monotone (croissante ici) et est une fonction polynomiale de degré 3, donc f' s'annule exactement une fois en un certain r.

x	$-\infty$		r		$+\infty$
f''		$+$	$+$	$+$	
f'	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	$?$	↗	$+\infty$

   On a $4r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0$. Donc $f(r) = r^4 + r^3 + r^2 + r + 1$ s'exprime en fonction de $r^4, r^2, r, 1$ et on trouve

$$f(r) \;=\; \frac{1}{4}(4r^4 + r^2 + 2r + 3) \;=\; \frac{1}{4}\Big(4r^4 + (r+1)^2 + 2\Big) > 0$$

   Ainsi f admet un minimum strictement positif, donc f ne s'annule pas.
   Donc Q n'a pas de racine réelle.

2. (2a) Comme $\theta = \frac{2\pi}{5}$, on a

$$\cos(4\theta) = \cos(5\theta - \theta) = \cos(2\pi - \theta) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

   (2b) On a donc

$$\cos(4\theta) \;=\; \cos(2\times 2\theta) \;=\; 2\cos^2(2\theta) - 1 \;=\; 2\big(2\cos(\theta) - 1\big)^2 - 1 \;=\; 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$

3. D'après la question précédente, $\cos(\theta)$ est racine de Q.
   On vérifie facilement que 1 et $-\frac{1}{2}$ sont racines de Q.
   Donc Q se factorise sous la forme

$$Q = 8(X-1)\Big(X + \frac{1}{2}\Big)(X^2 + bX + c)$$

   En identifiant les coefficients, on trouve $b = \frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{4}$.
   Comme $\cos(\theta)$ est racine de Q, on a donc

$$0 = 8\big(\cos(\theta) - 1\big)\Big(\cos(\theta) + \frac{1}{2}\Big)\Big(\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{4}\Big)$$

   Comme $\cos(\theta) \neq 1$ et $\cos(\theta) \neq -\frac{1}{2}$ (WHY ?), on a

$$\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{4} = 0$$

   D'où

$$4\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta) - 1 = 0$$

4. En utilisant que $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et le fait que $\cos^2(\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\theta) + \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\cos(2\theta) \;=\; -\cos(\theta) - \frac{1}{2}$$

   Avec cette dernière égalité (et celle donnant $\cos^2(\theta)$), on en déduit que :

$$\cos(\theta)\cos(2\theta) \;=\; \frac{1}{4}$$

En développant, on trouve que $\big(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1\big)\big(X^2 - 2\cos(2\theta)X + 1\big)$ vaut

$$X^4 + \big(-2\cos(2\theta) - 2\cos(\theta)\big)X^3 + \big(2 + 4\cos\theta\cos(2\theta)\big)X^2 + \big(-2\cos\theta - 2\cos(2\theta)\big)X + 1$$

D'après les relations de la question précédente, on obtient

$$\big(X^2 - 2\cos(\theta)X + 1\big)\big(X^2 - 2\cos(2\theta)X + 1\big) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

5. Comme $Q = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ n'a pas de racines réelles (ce que l'on peut revérifier en calculant les discriminants des deux polynômes de degré 2 ci-dessus), l'égalité précédente fournit la factorisation du polynôme Q.

162

L'application qui à P associe $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)$ est linéaire ;
Par la formule du binôme, cette application envoie chaque X^k sur$(X+1)^k$;
Deux applications linéaires égales sur une base sont égales sur l'espace.

1. • Tout d'abord, remarquons que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre. En effet, c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés.
• Reste à montrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.
Ce n'est pas facile !
En fait, **au mois de Mai**, nous n'aurons pas besoin de montrer l'aspect générateur. On pourra dire (avec un théorème de demi-fainéant) :

> *La famille $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre de E de bon cardinal (« de bon cardinal » voulant dire que $\mathcal{F}$ possède $\dim E$ vecteurs). Donc $\mathcal{F}$ est une base de E.*

Mais comme on n'est pas encore au mois de Mai (ah, si, maintenant, on y est, mais je laisse quand même la preuve ci-dessous), on va prouver que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
Pour cela, on se donne un polynôme Q quelconque de E.
On cherche à montrer que Q est combinaison linéaire des polynômes $P_0, \dots, P_n$.
Autrement dit, on cherche à montrer qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n = Q$$

En identifiant les coefficients en $X^0, X^1, \dots, X^n$ de cette égalité, cela revient à montrer l'existence de scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
\lambda_0\text{coeff}_{X^0}(P_0) & + & \lambda_1\text{coeff}_{X^0}(P_1) & + & \cdots & + & \lambda_n\text{coeff}_{X^0}(P_n) & = & \text{coeff}_{X^0}(Q) \\
\lambda_0\text{coeff}_{X^1}(P_0) & + & \lambda_1\text{coeff}_{X^1}(P_1) & + & \cdots & + & \lambda_n\text{coeff}_{X^1}(P_n) & = & \text{coeff}_{X^1}(Q) \\
\vdots & & & & & & & & \\
\lambda_0\text{coeff}_{X^n}(P_0) & + & \lambda_1\text{coeff}_{X^n}(P_1) & + & \cdots & + & \lambda_n\text{coeff}_{X^n}(P_n) & = & \text{coeff}_{X^n}(Q)
\end{array}\right.$$

En fait (WHY ?), on obtient le système *triangulaire* suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_0\text{coeff}_{X^0}(P_0) & + & \lambda_1\text{coeff}_{X^0}(P_1) & + & \lambda_2\text{coeff}_{X^0}(P_2) & + & \cdots & + & \lambda_n\text{coeff}_{X^0}(P_n) & = & \text{coeff}_{X^0}(Q) \\
 & & \lambda_1\text{coeff}_{X^1}(P_1) & + & \lambda_2\text{coeff}_{X^1}(P_2) & + & \cdots & + & \lambda_n\text{coeff}_{X^1}(P_n) & = & \text{coeff}_{X^1}(Q) \\
 & & & & \lambda_2\text{coeff}_{X^2}(P_2) & + & \cdots & + & \lambda_n\text{coeff}_{X^2}(P_n) & = & \text{coeff}_{X^2}(Q) \\
 & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & \lambda_n\text{coeff}_{X^n}(P_n) & = & \text{coeff}_{X^n}(Q)
\end{array}\right.$$

Dans notre exercice, on a $\quad \forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad \text{coeff}_{X^k}(P_k) = \dfrac{1}{k!}$
Le système précédent s'écrit matriciellement :

matrice triangulaire avec une belle diagonale à dessiner : à vous de faire le dessin

La matrice qui intervient est triangulaire supérieure avec aucun zéro sur la diagonale donc elle est inversible.
Donc en inversant la matrice, on obtient des λ_i en fonction des coefficients de Q tels que...

BILAN : la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

D'ailleurs, est-ce que cette dernière preuve ne montrerait pas directement que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E ?

Autre preuve.
On veut montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{K}_n[X]$.
L'inclusion non évidente est $\supset$ et cette inclusion revient à montrer que

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], \quad X^k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

Montrons que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la propriété $\mathcal{H}_k$: « $X^k \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ » est vraie.
Procédons par récurrence forte.
▷ Initialisation. La propriété $\mathcal{H}_0$ est vraie car X^0 vaut P_0 qui est bien dans $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

▷ Hérédité. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On suppose que les propriétés $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_k$ sont vraies.
Montrons $\mathcal{H}_{k+1}$.
On a l'égalité

$$P_{k+1} \;=\; \frac{1}{(k+1)!} X(X-(k+1))^k \;=\; \frac{1}{(k+1)!}\Big[X^{k+1} + R\Big] \quad \text{avec } R \text{ de degré} \leqslant k$$

Ainsi

★ $$X^{k+1} \;=\; (k+1)!\, P_{k+1} \;-\; R$$

• Le polynôme R est de degré $\leqslant k$, donc est combinaison linéaire de $X^0, \dots, X^k$.
D'après $\mathcal{H}_0, \dots, \mathcal{H}_k$, on en déduit que R est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
• Le polynôme P_{k+1} est un polynôme de la famille $\mathcal{F}$, donc est a fortiori dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

L'égalité ★ et les deux points • précédents montrent que X^{k+1} est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

2. Pour $k=1$, on a $P_1'(X+1)=1=P_0(X)$.

   Pour $k\in[\![2,n]\!]$, on a

$$P_k'(X+1)=\frac{1}{k!}(X+1-k)^{k-1}+\frac{k-1}{k!}(X+1)(X+1-k)^{k-2}=\frac{1}{(k-1)!}X(X+1-k)^{k-2}=P_{k-1}$$

3. (3a) On remarque que $f=\mathrm{id}_E-g$ où $g:P\mapsto P'(X+1)$.
   Il suffit de montrer que g est un endomorphisme. Et ce n'est pas trop dur !
   Ainsi, f est un endomorphisme de E.

   (3b) On a $f(P_0)=P_0$.
   Et pour $k\in[\![1,n]\!]$, on a $f(P_k)=P_k-P_k'(X+1)=P_k-P_{k-1}$.

   (3c) La matrice de f dans la base $\mathcal{F}$ est $A=\begin{bmatrix}1&-1&0&\dots&0\\0&1&-1&0&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\dots&\ddots&1&-1\\0&\dots&\dots&0&1\end{bmatrix}$
   Cette matrice est inversible, donc f est un automorphisme de E.

   (3d) Montrons que $(X-1)^{n+1}$ est un polynôme annulateur de f.
   Autrement dit, montrons que $(f-\mathrm{id})^{n+1}=0_{\mathcal{L}(E)}$.
   En notant $g:P\mapsto P'(X+1)$, on remarque que $f=\mathrm{id}_E-g$.
   Ainsi $(f-\mathrm{id}_E)^{n+1}=(-1)^{n+1}g^{n+1}$.
   Il suffit donc de montrer que $g^{n+1}=0_{\mathcal{L}(E)}$.
   Pour cela, on va calculer les itérés de g.
   Par une récurrence immédiate, on montre que $g^k:P\mapsto P^{(k)}(X+k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
   En particulier $g^{n+1}:P\mapsto P^{(n+1)}(X+n)$.
   Or lorsque P est de degré $\leqslant n$, alors $P^{(n+1)}$ est le polynôme nul. Ainsi, l'endomorphisme g^{n+1}, défini sur $E=\mathbb{K}_n[X]$, est nul.

   (3e) Déterminer les valeurs propres de f, c'est-à-dire les $\lambda\in\mathbb{K}$ tels que $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E)\neq\{0_E\}$.
   Analyse.
   Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre de f.
   Faisons une remarque HORS CONTEXTE. De manière générale, lorsqu'on a un endomorphisme f d'un espace vectoriel E annulé par un certain polynôme Q, alors une valeur propre de f est racine de Q.
   En effet, une égalité du type $f(x)=\lambda x$ s'itère de la manière suivante $f^2(x)=f(\lambda x)=\lambda f(x)=\lambda\lambda x=\lambda^2x$, et on montre que $f^k(x)=\lambda^k x$ par récurrence.
   Ainsi si $Q(f)=0$ avec $Q=\sum b_kX^k$, alors $Q(f)=\sum b_kf^k$.
   En prenant l'image de x par cet endomorphisme, on a $Q(f)(x)=\sum b_kf^k(x)$.
   Si x vérifie $f(x)=\lambda x$, alors $Q(f)(x)=\sum b_k\lambda^kx$; d'où $P(\lambda)x=0_E$.
   Si $x\neq0_E$ (ce qui est le cas si c'est un vecteur propre), alors on en déduit que $P(\lambda)=0$.

   Comme le polynôme $Q=(X-1)^{n+1}$ est annulateur de f, on en déduit que λ est racine de Q, autrement dit que $\lambda=1$.

   Bilan de l'Analyse : si λ est valeur propre de f, alors nécessairement $\lambda=1$.

   Synthèse.
   Vérifions (ou pas) que 1 est valeur propre.
   Il s'agit de voir s'il existe un polynôme P **non nul** tel que $f(P)=P$, c'est-à-dire tel que $P-P'(X+1)=P$.
   Et c'est bien le cas en prenant un polynôme constant non nul. Il vérifie bien $f(P)=P$!

   (3f) Pour déterminer la matrice inverse de A, soit on écrit le système $Y=AX$ à inverser avec le pivot de Gauss.
   Ou bien on écrit $A=I-N$ avec N la matrice ayant une surdiagonale de 1 et des 0 ailleurs. Les puissances de N sont évidentes à calculer et on a $N^{n+1}=0$.

En utilisant l'identité de Bernoulli (car I et N commutent), on a

$$I^{n+1} - N^{n+1} \;=\; (I-N)\sum_{k=0}^{n} N^k \qquad \text{ce qui s'écrit} \qquad I = A\sum_{k=0}^{n} N^k$$

Donc $A^{-1} = \sum_{k=0}^{n} N^k$, ce qui, après calculs des puissances de N, donne :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **Première preuve, sans se fatiguer.** Fixons $m \in \mathbb{N}$.
On écrit f sous la forme $\mathrm{id}_E - g$ avec $g : P \mapsto P'(X+1)$.
Comme id_E et g commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient :

$$f^m \;=\; \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k g^k$$

Appliquons cette égalité d'endomorphismes à un polynôme quelconque. On obtient :

$$\forall\, P \in E, \qquad f^m(P) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k g^k(P)$$

Or, par récurrence immédiate, on montre que $g^k : P \mapsto P^{(k)}(X+k)$. Donc

$$f^m(P) \;=\; \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k P^{(k)}(X+k)$$

Soit $P \in E$. Démontrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f^m(P) \;=\; \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

Deuxième preuve, on reprouve le binôme de Newton dans ce cas particulier.
On prouve par récurrence sur m le résultat proposé.
On peut commencer par fixer un polynôme P qui ne bougera pas.
Pour tout entier naturel m, on pose

$$\mathcal{H}(m) : \quad f^m(P)(X) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i)$$

• $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
• Soit $m \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{H}(m)$. Montrons $\mathcal{H}(m+1)$.
En écrivant que $f^{m+1} = f \circ f^m$ et en utilisant $\mathcal{H}(m)$, on a :

$$f^{m+1}(P) = f \circ f^m(P) = f\left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i) \right)$$

Par linéarité de f, puis définition de f :

$$f^{m+1}(P) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} f\Big(P^{(i)}(X+i)\Big) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \Big(P^{(i)}(X+i) - P^{(i+1)}(X+i+1)\Big)$$

Ensuite, on utilise la linéarité du symbole Σ, puis on fait un changement d'indice.

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i) - \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i+1)}(X+i+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} P^{(i)}(X+i) - \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m}{j-1} P^{(j)}(X+j)$$

Enfin, on sort le terme pour $i = 0$ et le terme pour $j = m+1$. D'où

$$= (-1)^0 \binom{m}{0} P^{(0)}(X+0) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \left[\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} \right] P^{(i)}(X+i) + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} P^{(m+1)}(X+m+1)$$

D'où

$$f^{m+1}(P)(X) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i \binom{m+1}{i} P^{(i)}(X+i)$$

Ce qui établit $\mathcal{H}(m+1)$.

— On remarque que l'égalité est « linéaire en P » .

— Pour $P = X^0$, l'égalité est connue...

— Pour $P = X^1$, l'égalité est plus difficile à établir. Penser à la formule du capitaine

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

— Pour $P = X^2$, l'égalité est désagréable à montrer.
On peut utiliser le jeu d'écriture $k^2 = k(k-1) + k$.
Mais il est plus astucieux de montrer l'égalité directement avec le polynôme $P = X(X-1)$, en exploitant le fait que

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

— Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Pour $P = X(X-1)\cdots(X-i+1)$, on exploite le fait que

$$k(k-1)\cdots(k-i+1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdots(n-i+1)\binom{n-i}{k-i}$$

— On conclut en disant que l'égalité est vérifiée pour les vecteurs de la famille

$$\Big(X(X-1)\cdots(X-i+1)\Big)_{i\in[\![0,n-1]\!]}$$

qui est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Par linéarité, la formule est vraie pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

170

En développant $(X-x)(X-y)(X-z)$, on obtient que x, y et z sont racines de $X^3 - xyz$.
Les trois nombres complexes ont donc le même cube et, *a fortiori*, le même module.

> ***Rappel.*** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z, \omega \in \mathbb{C}$.*
> *Si $z^n = \omega^n$, alors $|z| = |\omega|$.*

1. • Comme P est non constant, P est de degré $n \geqslant 1$.
Notons c son coefficient dominant. Alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} cx^n$

Or $cx^n \xrightarrow[+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$

L'hypothèse $\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ implique que P est positif au voisinage de $+\infty$, donc la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$, donc $c > 0$.

• Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine de P. Notons m sa multiplicité.
Ainsi, P s'écrit $(X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
On a donc $P(x) \underset{a}{\sim} \lambda(x-a)^m$ où $\lambda = Q(a)$.
Supposons par l'absurde que m est impair.
Alors $(x-a)^m$ change de signe au voisinage de a, donc $P(x)$ aussi (par partage de signe).
Or $P(x)$ est positif pour x au voisinage de a.
D'où la contradiction.
Donc m est pair.

Bilan. Les racines de P sont de multiplicité paire.

2. Considérons la décomposition en facteurs irréductibles de P :

$$P \;=\; c \prod_{i=1}^{s} (X - x_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^{t} R_j^{q_j}$$

où les x_i sont les racines réelles de P (elles sont de multiplicité paire !),
et les R_j sont des polynômes du second degré à discriminant négatif.
Les racines de ces polynômes sont des nombres complexes conjugués $z_j, \overline{z_j}$.
En particulier, on a

$$R_j \;=\; (X - z_j)\,\overline{(X - z_j)}.$$

Posons donc

$$C \;=\; \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{s} (X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{t} (X - z_j)^{q_j}\,.$$

On a bien $P = C\overline{C}$.

3. Décomposons C en partie réelle et en partie imaginaire $C = A + \mathrm{i}B$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.
D'après la question précédente, on a $P = C\overline{C} = A^2 + B^2$.

— On remarque que les constantes de module 1 sont solutions, que le polynôme nul n'est pas solution, que les monômes X^n sont solutions.

— On remarque également que $\mathcal{E}$ est stable par produit (ceci est dû au fait que $\mathbb{U}$ est lui-même stable par produit : un produit de nombres complexes de module 1 est de module 1).
Ainsi, si on prend P et Q dans $\mathcal{E}$, alors :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{U}, \quad (PQ)(\omega) = \underbrace{P(\omega)}_{\in\mathbb{U}}\underbrace{Q(\omega)}_{\in\mathbb{U}} \in \mathbb{U}$$

— Avec cela, on peut rapidement conjecturer que

$$\mathcal{E} \;=\; \left\{P \in \mathbb{C}[X] \mid \exists\,(\lambda, n) \in \mathbb{U}\times\mathbb{N},\ P = \lambda X^n\right\}$$

Montrons l'inclusion difficile.
Soit $P \in \mathcal{E}$. Alors P n'est pas le polynôme nul, donc possède un degré entier $n \in \mathbb{N}$.
Par hypothèse, on a (penser à traduire que le module au carré vaut 1) :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{U}, \quad P(\omega)\overline{P(\omega)} = 1$$

Comme $\overline{P(\omega)} = \overline{P}(\overline{\omega})$ et $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$, on a en multipliant par ω^n :

$$\forall\, \omega \in \mathbb{U}, \quad P(\omega) \times \omega^n \overline{P}(\omega^{-1}) \;=\; \omega^n$$

Cette dernière égalité est polynomiale, elle s'écrit

$$P(\omega)Q(\omega) = \omega^n \qquad \text{où} \quad Q \;=\; \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^{n-k} \quad \text{avec } a_k = \operatorname{coeff}_{X^k}(P)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n} \overline{a_{n-\ell}} X^{\ell}$$

Ainsi, PQ et X^n coïncident sur $\mathbb{U}$ qui est une partie infinie, donc ils sont égaux.
En passant au degré dans l'égalité $PQ = X^n$, on en déduit que $\deg Q = 0$, ainsi

$$\forall\, \ell \in [\![1, n]\!], \qquad \overline{a_{n-\ell}} = 0$$

D'où

$$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \qquad a_k = 0$$

Finalement, $P = a_n X^n$. On montre que $a_n \in \mathbb{U}$ en évaluant en $1 \in \mathbb{U}$.

178

Considérons le polynôme $D = P - Q$. Comme P et Q sont distincts, la différence D est un polynôme non nul.
D'après le critère radical de nullité, D a un nombre fini ($\leqslant \deg D$) de racines. En particulier, on peut trouver un réel $A \in \mathbb{R}$ tel que D n'a pas de racine dans $[A, +\infty[$.
En effet,

— si D n'a pas de racine (réelle), n'importe quel réel A convient, par exemple $A = 0$;

— si D a des racines (réelles), le réel $A = z_{\max} + 1$ convient, où $z_{\max}$ est la plus grande racine réelle.

Montrons que sur l'intervalle $[A, +\infty[$, le polynôme D reste de signe constant.

— Si $D(A) > 0$, montrons $\forall t \in [A, +\infty[\,, D(t) > 0$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \in [A, +\infty[$ tel que $D(t_0) \leqslant 0$. Comme $D(A) > 0$, on a nécessairement $t_0 > A$.
La fonction $t \mapsto D(t)$ est continue (car polynomiale), vaut $D(A) > 0$ en A et $D(t_0) \leqslant 0$ en t_0. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $c \in [A, t_0]$ tel que $D(c) = 0$.
Cela fournit une racine réelle $\geqslant A$ au polynôme D, et une contradiction avec ce qui précède.
Cela conclut la preuve : on a montré $\forall t \geqslant A, D(t) > 0$, donc

$$\forall t \geqslant A, P(t) < Q(t).$$

— Si $D(A) < 0$, on montre de la même façon $\forall t \geqslant A, D(t) < 0$, donc

$$\forall t \geqslant A, P(t) > Q(t).$$

179

Analyse (éventuellement cachée). Si P est un tel polynôme, P' est de degré 4 et vérifie

$$(X-1)^2 \mid (P+1)' = P' \qquad \text{et} \qquad (X+1)^2 \mid (P-1)' = P',$$

d'où l'on tire l'existence de $u \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$P' = u(X-1)^2(X+1)^2 = u(X^4 - 2X^2 + 1),$$

puis celle de $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$P = u\left(\frac{X^5}{5} - \frac{2}{3}X^3 + X\right) + c.$$

Les conditions $P(1) = -1$ et $P(-1) = 1$ donnent

$$\begin{cases} \frac{8}{15}u + c = -1 \\ -\frac{8}{15}u + c = 1 \end{cases}$$

d'où l'on tire $c = 0$ puis $u = -\frac{15}{8}$. Ainsi,

$$P = -\frac{3}{8}X^5 + \frac{5}{4}X^3 - \frac{15}{8}X.$$

Synthèse. Réciproquement, on vérifie que $-\frac{3}{8}X^5 + \frac{5}{4}X^3 - \frac{15}{8}X$ convient.

Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $P \in K[X]$ tel que $P = P'P''$.

Distinguons deux cas.

— Si $\deg P \leqslant 1$, on a $P'' = 0$, donc $P = P'P'' = 0$.

— si $d = \deg P \geqslant 2$, on a $\deg(P'P'') = \deg P' + \deg P'' = (d-1) + (d-2)$.
On a donc l'égalité $d = 2d - 3$, c'est-à-dire $d = 3$.

À ce stade, on pourrait chercher bourrinement parmi tous les polynômes de degré 3. On va essayer d'être un peu plus fin, même si ce n'est pas nécessairement la meilleure chose à faire ici.

Si l'on considère P' comme un élément de $\mathbb{C}[X]$, il est scindé. Ainsi, l'une ou l'autre des deux possiblilités adviennent :

- Le polynôme P' a deux racines distinctes $z_1 \neq z_2$. L'égalité $P = P'P''$ montre alors que z_1 et z_2 sont également des racines de P. D'après le critère différentiel, on a donc
$$\mu_{z_1}(P) \geqslant 2 \quad \text{et} \quad \mu_{z_2}(P) \geqslant 2,$$
ce qui contredit le fait que P est de degré 3. Ce cas est donc impossible.
- Le polynôme P' a une racine double z. L'égalité $P = P'P''$ montre alors que z est également une racine de P. D'après le critère différentiel, z est donc une racine au moins triple de P. Vu que P est de degré 3, P s'écrit donc sous la forme $P = u(X-z)^3$, où $u \in K$ est le coefficient dominant du polynôme P.
Remarquons que dans le cas $K = \mathbb{R}$, la racine z est nécessairement réelle. En effet [1], si z n'était pas réelle, $\overline{z}$ serait aussi racine triple de P ce qui est exclu par des considérations de degré.
Ainsi, on a trouvé $u \in K^*$ et $z \in K$ tel que $P = u(X-z)^3$.
On obtient alors par le calcul que $P'P'' = 3u(X-z)^2 \times 6u(X-z) = 18u^2(X-z)^3$, donc l'égalité $P = P'P''$ entraîne $u = \frac{1}{18}$.
Ainsi, il existe $z \in K$ tel que $P = \frac{1}{18}(X-z)^3$.

En résumé, on a $P = 0$ ou $\exists z \in K : P = \frac{1}{18}(X-z)^3$.

Synthèse. Réciproquement, il est déjà clair que le polynôme nul satisfait à la condition.

Dans le deuxième cas, soit donc $z \in K$ et $P = \frac{1}{18}(X-z)^3$. On a donc

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{6}(X-z)^2 \\ P'' &= \frac{1}{3}(X-z) \\ \text{donc} \quad P'P'' &= \frac{1}{18}(X-z)^3 \\ &= P, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

In fine,

$$\left\{P \in K[X] \mid P = P'P''\right\} \;=\; \{0\} \cup \left\{\frac{1}{18}(X-z)^3,\ z \in \mathbb{K}\right\}$$

1. Deuxième argument : d'après les relations coefficients-racines, le coefficient de degré 2 de P est $-3uz$, ce qui entraîne assez directement que $z \in \mathbb{R}$.

181

Clairement, $(P, \lambda P)$ avec $|\lambda| \geqslant 1$ convient. On va montrer que c'est la seule possibilité.
Soit (P, Q) un tel couple ; écrivons $Q = u\prod_{i=1}^{r}(X-a_i)^{p_i}$ une factorisation de Q (u est un complexe non nul, les (a_i) sont des complexes distincts et $p_i \geqslant 1$). Montrons que P est associé à Q en trois étapes.

— En a_i, l'inégalité implique $P(a_i) = 0$: les a_i sont des racines de P.

— On a l'équivalent
$$Q(a_i + h) \sim u\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)h^{p_i}.$$
L'inégalité entraîne donc que $P(a_i + h) = \underset{h\to 0}{O}(h^{p_i})$. Cela entraîne que la multiplicité de a_i en tant que racine de P est $\geqslant p_i$. En particulier, Q divise P.

— En général, un polynôme R de terme dominant $a_d\, X^d$ vérifie $|R(x)| \underset{|x|\to\infty}{\sim} a_d\,|x|^d$.
Ainsi, l'inégalité pour des complexes de grand module entraîne $\deg P \leqslant \deg Q$ et donc que P et Q sont associés.