

Fonctions rationnelles

I Généralités.	2
Définition	
Décomposition avec la partie entière	
II Décomposition en éléments simples (PCSI)	4
III Des exemples.	5
IV Application au calcul de primitives et de dérivées $n^{\text{èmes}}$	6
V La décomposition en éléments simples (MPSI)	7
Des exemples	
Les résultats	



Dans ce chapitre, lorsque $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme, on notera encore P la fonction polynomiale associée, c'est-à-dire l'application $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$:

$$x \mapsto P(x)$$

Mais il faut garder en tête que cette application n'est pas du même type que le polynôme formel P !

Autre notation pratique : pour un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$, on notera $\text{Rac}(Q)$ l'ensemble de ses racines prises dans $\mathbb{K}$.

I. Généralités

Définition

1

Définition. Soit A une partie infinie de $\mathbb{K}$.

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ est dite *fonction rationnelle* lorsqu'il existe deux polynômes $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ vérifiant :

$$\left(\forall x \in A, Q(x) \neq 0 \right) \text{ et } f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- **Exemple.** La fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction rationnelle.

$$x \mapsto \frac{x^3 + x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}$$
- **Exemple.** La fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction rationnelle.

$$z \mapsto \frac{1}{z-i}$$
- **Cas particulier.** Toute fonction polynomiale est en particulier une fonction rationnelle.
- **WHY?** Pour $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul, alors la partie $\mathbb{K} \setminus \text{Rac}(Q)$ est infinie (WHY?).

Décomposition avec la partie entière

- **Avant de commencer.**

On a (WHY?) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^5}{x^2 + x + 1} = x^3 - x^2 + 1 - \frac{x+1}{x^2 + x + 1}.$$

Déterminer $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x^5}{x^2 + x + 1} = E(x) - \frac{R(x)}{x^2 + x + 1} \quad \text{avec } \deg R < 2$$

Réponse. Posons $P = X^5$ et $Q = X^2 + X + 1$.

La division euclidienne de P par Q s'écrit :

$$P = (X^3 - X^2 + 1)Q - (X + 1).$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = x^3 - x^2 + 1 - \frac{x+1}{Q(x)}.$$



2

Proposition (décomposition d'une fonction rationnelle avec sa partie entière).

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $Q \neq 0$.

Il existe un unique couple $(E, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{K} \setminus \text{Rac}(Q), & \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \\ \deg R < \deg Q \end{cases}$$

- **Division euclidienne!** Au cours de la preuve, on a vu que le couple (E, R) n'est ni plus ni moins que le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q .

Attention ici, malgré la notation, Q n'est pas le quotient, mais le diviseur!

- **Partie entière.** Le polynôme E s'appelle la *partie entière* de la fonction rationnelle $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.

On a

- si $\deg P < \deg Q$, alors $E = 0$
- si $\deg P \geq \deg Q$, alors $\deg E = \deg P - \deg Q$

- **Exemple.** Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^5}{x^2+x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminons la partie entière et l'écriture donnée dans la proposition précédente.

La fonction rationnelle f est de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P = X^5$ et $Q = X^2 + X + 1$.

La division euclidienne de P par Q s'écrit :

$$P = (X^3 - X^2 + 1)Q - (X + 1).$$

Ainsi, la partie entière de la fonction rationnelle f est le polynôme $X^3 - X^2 + 1$, et l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - x^2 + 1 - \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

3

Question. Faire le même travail avec :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^3}{x-1} \quad f_2 : x \mapsto \frac{x^3}{x^7-1} \quad f_3 : x \mapsto \frac{x^7}{x^7+x+1} \quad f_4 : x \mapsto \frac{x+1}{3x+7}$$



II. Décomposition en éléments simples (PCSI)

4 Exemple introductif. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 2}$$

Dans ce qui suit, on suppose le polynôme Q unitaire. En particulier, Q est non nul !

Ce n'est pas restrictif, car on peut toujours s'arranger pour « mettre » le coefficient dominant de Q au niveau du numérateur (c'est-à-dire l'inclure dans P).

5 Proposition (DÉS : cas où Q est scindé à racines simples).

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q unitaire.

Notons E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Supposons que le polynôme Q est scindé à racines simples que l'on écrit $Q = \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)$.

• Alors il existe des scalaires $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \text{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^q \frac{\lambda_k}{x - \alpha_k}$$

• Soit $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$. En écrivant Q sous la forme $Q = (X - \alpha_k) \widetilde{Q}_k$, on a les deux formules :

$$\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{\widetilde{Q}_k(\alpha_k)} \quad \text{et} \quad \lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

• La formule précédente s'appelle **la décomposition en éléments simples** de la fonction rationnelle.

• **Précision.** Que vaut $\widetilde{Q}_k$?

• **Choix de la formule.**

- la formule $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{\widetilde{Q}_k(\alpha_k)}$ est utilisée lorsque le dénominateur est factorisé ;
- on utilise $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ lorsque le dénominateur apparaît sous forme développée, donc facile à dériver.

• **Exemple.** Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2}$.

Notons $P = X^3 - 2X + 7$ et $Q = X^2 + X - 2$.

— La partie entière de f , quotient dans la division euclidienne de P par Q , vaut $X - 1$.

— On a $Q = (X - 1)(X + 2)$, donc Q est scindé à racines simples.

D'après la proposition précédente, on peut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad f(x) = x - 1 + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 2}.$$

Pour trouver a et b , utilisons la formule « $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{\widetilde{Q}_k(\alpha_k)}$ » :

$$a = \frac{1^3 - 2 \times 1 + 7}{1 + 2} = 2 \quad \text{et} \quad b = \frac{(-2)^3 - 2 \times (-2) + 7}{-2 - 1} = -1.$$

La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2} = x - 1 + \frac{2}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$



III. Des exemples

6 Question. Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 + 1}$.

7 Question. Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \frac{10z^3}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}$.
sol → 10

8 Question. Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \frac{1}{z^3 - 1}$.
sol → 10

9 Question. Décomposer en éléments simples $f : z \mapsto \frac{1}{z^5 - 1}$.

10 Proposition (fonction réelle homographique).

Soit a, b, c, d quatre réels, avec $c \neq 0$.

— La division euclidienne de $aX + b$ par $cX + d$ est :

$$aX + b = \frac{a}{c}(cX + d) - \frac{1}{c}(ad - bc)$$

— On a la décomposition en éléments simples :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}, \quad \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \frac{ad - bc}{cx + d}$$

— La fonction homographique $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ et on a :

$$f' : x \mapsto \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

A lire uniquement :

11 Proposition (Q' sur Q).

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ unitaire scindé à racines simples que l'on écrit $Q = \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)$.

Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \text{Rac}(Q), \quad \frac{Q'(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^q \frac{1}{x - \alpha_k}.$$

IV. Application au calcul de primitives et de dérivées $n^{\text{èmes}}$

12 Exemple. Reprenons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + x - 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.
La décomposition en éléments simples de f est :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad f(x) = x - 1 + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

• **Question.** Déterminer une primitive de f sur l'intervalle $] -2, 1[$.

— Une primitive de $x \mapsto x - 1$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x$.

— Des primitives sur $] -2, 1[$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont respectivement

$$x \mapsto \ln|x-1| \quad \text{et} \quad x \mapsto \ln|x+2|$$

Une primitive de f sur $] -2, 1[$ est donc :

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x-1| - \ln|x+2|,$$

ou encore, puisque l'on travaille sur l'intervalle $] -2, 1[$:

$$F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln(1-x) - \ln(x+2).$$

• **Question.** Soit $n \geq 2$. Déterminer l'expression de la dérivée d'ordre n de f sur l'intervalle $] -2, 1[$.

— La fonction polynomiale $x \mapsto x - 1$ a ses dérivées nulles à partir de l'ordre 2.

— Les dérivées d'ordre n des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ sont respectivement :

$$x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}.$$

La dérivée d'ordre n de f est :

$$f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n n! \left(\frac{2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right).$$

13 Question. Soit $n \geq 1$.

sol → 10

Montrer que la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction Arctan est donnée par :

$$\text{Arctan}^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right).$$

Défi. Trouver une expression sans passer par $\mathbb{C}$.



V. La décomposition en éléments simples (MPSI)

Des exemples

Toutes les fonctions rationnelles ne rentrent pas dans le cadre de la proposition 5. Elle ne traite que les fonctions rationnelles de la forme $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec Q scindé à racines simples.

Le cas général est hors programme.

Illustrons sur deux exemples quelques techniques qui, en admettant la forme de la décomposition en éléments simples recherchée, permettent d'en déterminer les coefficients.

- **Cas où Q n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, mais est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples.**

Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Admettons qu'il existe trois réels a, b et c tels que :

$$(\star) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

— **Détermination de a .** En multipliant $(\star)$ par $x-1$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \underbrace{(x-1)f(x)}_{\frac{x+1}{x^2+x+1}} = a + (x-1)\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1$, on obtient $a = \frac{2}{3}$.

— **Détermination de b .** En multipliant $(\star)$ par x , on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \frac{x(x+1)}{x^3-1} = \frac{ax}{x-1} + \frac{(bx+c)x}{x^2+x+1}$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on obtient $0 = a + b$, donc $b = -\frac{2}{3}$.

— **Détermination de c .** En évaluant $(\star)$ en $x = 0$, on obtient :

$$-1 = -a + c \quad \text{d'où} \quad c = a - 1 = -\frac{1}{3}.$$

Bilan. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} \right).$$

- **Cas où Q est scindé sur $\mathbb{R}$ mais possède des racines multiples.**

Considérons la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{x^2+2}{x(x-1)^3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Admettons qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3}$$

— Déterminons les coefficients a et d .

— En multipliant $(\star)$ par x puis en passant à la limite quand $x \rightarrow 0$, on obtient $a = -2$.

— En multipliant $(\star)$ par $(x-1)^3$ puis en passant à la limite quand $x \rightarrow 1$, on obtient $d = 3$.

— En multipliant $(\star)$ par x puis en passant à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on a $0 = a + b$, donc $b = 2$.

— Pour déterminer le dernier coefficient c , évaluons $(\star)$ en -1 :

$$\frac{3}{8} = -a - \frac{b}{2} + \frac{c}{4} - \frac{d}{8} \quad \text{d'où} \quad c = -1.$$

Bilan. On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, \quad f(x) = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

Les résultats

Pour finir, donnons deux théorèmes **hors programme** indiquant la forme de la décomposition en éléments simples dans le cas général.

Il est intéressant de comprendre qu'ils sont cohérents avec les décompositions en éléments simples obtenues dans les exemples.

Dans ce qui suit, on suppose le polynôme Q unitaire. En particulier, Q est non nul!

Ce n'est pas restrictif, car on peut toujours s'arranger pour « mettre » le coefficient dominant de Q au niveau du numérateur (c'est-à-dire l'inclure dans P).

14

Proposition (Cas où Q est scindé).

Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec Q unitaire.

Notons E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Supposons que le polynôme Q soit scindé sous la forme $Q = \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)^{r_k}$.

Alors il existe des scalaires $\lambda_{k,\ell} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \text{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(x - \alpha_k)^\ell}.$$

- **Exemple.** Si $Q = (X - \alpha)^2(X - \beta)^3$, la proposition dit que ...

15

Proposition (Cas général pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients réels).

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec Q unitaire.

Notons E la partie entière de $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Écrivons la DFI du polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$:

$$Q = \prod_{k=1}^q (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^p R_k^{s_k} \quad \text{où les } R_k \text{ sont de degré } 2 \text{ à discriminant } < 0.$$

Alors il existe des réels $\lambda_{k,\ell}$, $a_{k,\ell}$ et $b_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \text{Rac}(Q), \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^q \sum_{\ell=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,\ell}}{(x - \alpha_k)^\ell} + \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^{s_k} \frac{a_{k,\ell}x + b_{k,\ell}}{R_k(x)^\ell}$$

- **Exemple.** Si $Q = (X - \alpha)^2(X^2 + 1)^3$, la proposition dit que ...



Fonctions rationnelles

preuve et éléments de correction

7

On a $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $\deg P = 3$ et $\deg Q = 4$.

Puisque $\deg P < \deg Q$, la partie entière de f est nulle.

D'autre part, $Q = (X + i)(X - i)(X + 2)(X - 2)$, donc Q est scindé à racines simples.

La proposition 5 s'applique et on trouve, après calcul des coefficients :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 2, -2\}, \quad f(z) = \frac{1}{z-i} + \frac{1}{z+i} + \frac{4}{z-2} + \frac{4}{z+2}.$$

8

Considérons la fonction rationnelle :

$$f : z \mapsto \frac{1}{z^3 - 1} = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{avec } P = 1 \text{ et } Q = X^3 - 1$$

— La partie entière de f est nulle, puisque $\deg P = 0$ et $\deg Q = 3$, donc $\deg P < \deg Q$.

— Le polynôme Q admet 3 racines distinctes : 1, j et $\bar{j}$, donc Q est scindé à racines simples.

Ainsi, la proposition 5 assure qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, j, \bar{j}\}, \quad f(z) = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-j} + \frac{c}{z-\bar{j}}.$$

Pour trouver a, b, c , utilisons la formule « $\lambda_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ ». On a $Q = X^3 - 1$, donc $Q' = 3X^2$, d'où :

$$a = \frac{P(1)}{Q'(1)} = \frac{1}{3} \quad b = \frac{P(j)}{Q'(j)} = \frac{1}{3j^2} = \frac{1}{3}j \quad \text{et} \quad c = \frac{P(\bar{j})}{Q'(\bar{j})} = \frac{1}{3\bar{j}^2} = \frac{1}{3}\bar{j}$$

La décomposition en éléments simples de f est donc :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1, j, \bar{j}\}, \quad \frac{1}{z^3 - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{j}{z-j} + \frac{\bar{j}}{z-\bar{j}} \right).$$

13

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right).$$

Les dérivées $n^{\text{èmes}}$ des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x-i}$ et $x \mapsto \frac{1}{x+i}$ sont respectivement :

$$x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}.$$

D'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Arctan}^{(n)}(x) = g^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2i} \left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right).$$

