Dimension finie

Algèbre linéaire, épisode 3

I. Dimension d'un espace vectoriel

Vers la définition de *dimension* – paragraphe théorique –

1

Définition.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est dit de *dimension finie* lorsqu'il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, il est de *dimension infinie*.

- **Remarque.** Si E possède une base finie, alors il est de dimension finie (car une base est en particulier une famille génératrice).

Exemples.

- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\{0_E\}$ réduit au vecteur nul est de dimension finie, car il admet comme famille génératrice la famille vide, qui est finie !
- Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ possèdent une base finie, donc sont de dimension finie.
- Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension finie : une base est $(1, i)$.
- Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension *infinie*.
En effet, soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille finie de polynômes.
Alors en prenant $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geqslant \max\{\deg P_1, \dots, \deg P_n\}$, on a $X^{d+1} \notin \mathrm{Vect}(P_1, \dots, P_n)$, donc la famille $(P_1, \dots, P_n)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{K}[X]$.

2
preuve

Théorème de la base incomplète (version forte).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie : notons $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E.

Alors toute famille libre (finie) $\mathscr{L}$ de E peut être complétée à l'aide de vecteurs de $\mathscr{G}$ pour former une base de E.

- Le mot « finie » est entre parenthèses, car on verra plus tard qu'une famille ayant plus de $q+1$ vecteurs pris dans un espace vectoriel engendré par q vecteurs est nécessairement liée.
- **En français.**

  Toute famille libre peut être complétée en une base, en piochant dans une famille génératrice.
- **En maths.**
Soit $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_q)$ une famille génératrice finie de E.
Soit $\mathscr{L} = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ une famille libre finie de E.
Alors, on peut trouver des vecteurs de $\mathscr{G}$, disons $g_{i_1}, \dots, g_{i_m}$, tels que la famille

$$\left(\ell_1, \dots, \ell_p, g_{i_1}, \dots, g_{i_m}\right) \quad \text{soit une base de } E$$

- **Un peu de zérologie.**
On peut donner un sens à l'énoncé lorsque $E = \{0_E\}$.
Prendre pour $\mathscr{L}$ la famille vide (qui est bien libre) et prendre pour $\mathscr{G}$ la famille $\mathscr{G} = \{0_E\}$ (qui est bien génératrice).
La conclusion est bien vraie (il suffit de ne rien rajouter à $\mathscr{L}$ pour obtenir une base de l'espace vectoriel nul).

- **Idée de la preuve.** On va considérer :
  — la famille $\mathscr{L}$, qui est libre
  — la famille $\mathscr{L} \vee \mathscr{G}$, qui est génératrice de E (en tant que sur-famille de $\mathscr{G}$, qui est génératrice)

  On va trouver une base $\mathscr{B}$ vérifiant

  $$(\star) \qquad \mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{L} \vee \mathscr{G}$$

  (ainsi, $\mathscr{B}$ est obtenue à partir de $\mathscr{L}$ en ajoutant éventuellement des vecteurs de $\mathscr{G}$).
  On va voir qu'il suffit de prendre pour $\mathscr{B}$ une famille libre de cardinal maximal vérifiant $(\star)$.

- **Moralement.**
  Une fois avoir décrypté la preuve de ce théorème, on peut lui faire dire la chose suivante :

  Entre une famille libre et une famille génératrice, on peut « coincer » une base.

3

Théorème de la base incomplète (version faible).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors toute famille libre (finie) $\mathscr{L}$ de E peut être complétée pour former une base de E.

- **En français.**

  Toute famille libre peut être complétée en une base.

- **En maths.**
  Soit $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre finie de E.
  Alors on peut trouver des vecteurs de E, disons $e_{p+1}, \dots, e_n$, tels que la famille $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E.

- **Remarque.** La différence entre les deux versions (forte et faible) du théorème provient du fait que dans la version forte, non seulement on peut compléter la famille en une base, mais en plus, on peut le faire en piochant les vecteurs dans une famille donnée (à condition que cette famille engendre l'espace vectoriel).

4
preuve

Théorème de la base extraite.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie : notons $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E.
Alors on peut trouver une sous-famille de $\mathscr{G}$ qui soit une base de E.

- **En français.**

  De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

- **En maths.**
  Soit $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_q)$ une famille génératrice finie de E.
  Alors, on peut trouver des vecteurs de $\mathscr{G}$, disons $g_{i_1}, \dots, g_{i_m}$, tels que la famille

  $$\left(g_{i_1}, \dots, g_{i_m}\right) \quad \text{soit une base de } E$$

- **Remarque.** C'est un corollaire immédiat du théorème de la base incomplète !

- **Défi.** Sans calcul et uniquement à l'aide du théorème précédent, montrer qu'il existe une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles.

5
preuve

Proposition.
Un espace vectoriel de dimension finie possède une base finie !

Dimension

6 preuve

Lemme de Steinitz.
Soit $\mathscr{G}$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel.
Alors toute famille de $p+1$ vecteurs appartenant à $\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$ est liée.

7 preuve

Proposition.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

— Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E.
Alors toute famille libre $\mathscr{L}$ de E est finie et vérifie $\operatorname{card}\mathscr{L} \leqslant \operatorname{card}\mathscr{G}$.

— Toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre de vecteurs.

8

Définition (dimension).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
On appelle *dimension* de E, notée $\dim E$, le nombre d'éléments d'**une** base de E.

- **Entier naturel.** La dimension d'un espace vectoriel est un entier naturel.
- **dimension 0.** L'espace vectoriel nul est de dimension 0 : la famille vide en est une base.
  Pour un espace vectoriel E, le seul sous-espace vectoriel de E de dimension 0 est le sous-espace réduit au vecteur nul.
- **dimension 1.** Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 est appelé *droite vectorielle.*
- **dimension 2.** Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 est appelé *plan vectoriel.*

9

Proposition.
Dans un espace vectoriel de dimension n,

— toute famille libre possède au plus n vecteurs

— toute famille génératrice possède au moins n vecteurs.

- **Contraposée.**

  Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille de cardinal $n+1$ est liée.

10

Proposition.
Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$.

— L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension ......

— L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension ......

— L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension ......

— L'espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension ......

— L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

— Soit I un intervalle. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^I$ est de dimension infinie.

11 **Question.**

— L'espace vectoriel $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ est de dimension ......

— L'espace vectoriel $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ est de dimension ......

12 **Question à l'oral.**
Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie, et déterminer sa dimension.

i) $F = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

ii) $F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\}$.

iii) $F = \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0\right\}$.

iv) $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists\, a, b \in \mathbb{R},\ f : x \mapsto a\cos x + b\sin x\right\}$.

v) $F = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists\, a, b, c \in \mathbb{R},\ f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)\cos x\right\}$.

Caractérisation des bases

On rappelle que, pour un espace vectoriel E de dimension n,

— le cardinal d'une famille libre de E est $\leqslant n$;

— le cardinal d'une famille génératrice de E est $\geqslant n$.

Dans la proposition suivante, on considère une famille de cardinal n exactement.

13 **Proposition.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\boxed{\mathscr{F} \text{ une famille de cardinal } \dim E}$.
Alors on a les équivalences

$$\mathscr{F} \text{ est libre} \iff \mathscr{F} \text{ est génératrice de } E \iff \mathscr{F} \text{ est une base de } E$$

- **Méthode de demi-fainéant.**
  Dans un espace de dimension n, pour montrer qu'une famille de n vecteurs est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre *ou bien* qu'elle est génératrice.
- **En français.** On peut retenir cela sous la forme approximative suivante

  Une famille libre de « bon cardinal » est une base.

  Autrement dit :

  $$\begin{cases} \mathscr{F} \text{ famille libre de } E \\ \mathscr{F} \text{ possède } n \text{ vecteurs où } n = \dim E \end{cases} \implies \mathscr{F} \text{ est une base de } E$$

  On a la même remarque en remplaçant « libre » par « génératrice », mais c'est en général moins intéressant.
- **Exemple classique.** Dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, considérons une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de $n+1$ polynômes tels que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on ait $\deg P_k = k$.

  — C'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés, donc elle est libre.

  — C'est une famille de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$.

  Cette famille est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

14 **Question.**
Soit a, b, c deux à deux distincts.
Soit $A = (X - b)(X - c)$, $B = (X - a)(X - c)$, $C = (X - a)(X - b)$.
Montrer que la famille (A, B, C) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
Bonus. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_2[X]$ dans cette base ?

15 preuve

Proposition (inclusion et dimension).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

— Alors F est de dimension finie et on a $\dim F \leqslant \dim E$.

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est de dimension finie.

— On a

$$\begin{cases} F \subset E \\ \dim F = \dim E \end{cases} \implies F = E$$

Un sous-espace vectoriel de E de même dimension que E est égal à E.

- **Méthode de demi-fainéant.**
  Pour montrer l'égalité entre deux espaces vectoriels de dimension finie, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.
  On dit que l'on procède par « inclusion et égalité des dimensions ».
- **Exemple.** Montrer que $F = G$ où $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid 7x + 8y + 9z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\Big((8, -7, 0), (9, 0, -7)\Big)$

16 preuve

Proposition (base adaptée à un sev).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Notons $d = \dim F$ et $n = \dim E$.

On peut trouver une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \ldots, e_d)$ soit une base de F.

Étant donné un sous-espace vectoriel F de E, il existe une base de E adaptée à ce sous-espace vectoriel F.

- **Attention.** Cette proposition dit donc que toute base de F peut être complétée en une base de E.
  Mais elle ne dit pas, qu'étant donnée une base de E, on peut en extraire une base de F.
  Par exemple, prenons $E = \mathbb{K}^2$, $\mathscr{B}_E = \big((1, 0), (0, 1)\big)$ et $F = \mathrm{Vect}\big((1, 1)\big)$.
  On voit bien que l'on ne peut pas extraire de $\mathscr{B}_E$ une base de F (qui est ici nécessairement du type $\big((a, a)\big)$ avec $a \neq 0$).

17 preuve

Proposition (existence d'un supplémentaire).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.
Alors F admet **un** supplémentaire dans E.

II. Opérations

Produit cartésien

18
preuve

Proposition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Si E et F sont de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim(E \times F) \;=\; \dim E \;+\; \dim F.$$

19

Proposition.
Soit E de dimension finie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Alors l'espace vectoriel E^p est de dimension finie et $\dim E^p = p \dim E$.

- **Cas particulier.** On retrouve le fait que $\dim \mathbb{K}^n = n$ (prendre $E = \mathbb{K}$ qui est de dimension 1).

Dimension et somme de deux sous-espaces

- **Attention !** L'opérateur « dim » n'est PAS additif.
  De manière générale, on n'a pas $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$.
  Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, prendre $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1,0,0)\big)$.
  Comme $G \subset F$, on a $F + G = F$, de sorte que $\dim(F+G) = \dim F$.

20

Proposition. Soit E un espace vectoriel.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

— **Sous-additivité de dim**
La somme $F+G$ est de dimension finie et :

$$\dim(F+G) \;\leqslant\; \dim F + \dim G$$

— **Additivité de dim avec la somme directe**
Si F et G sont en somme directe, alors la somme directe $F \oplus G$ est de dimension finie et :

$$\dim(F \oplus G) \;=\; \dim F + \dim G$$

- **Exemple.** On note H l'espace vectoriel des matrices de trace nulle.
  On a montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$. On peut en déduire la dimension de H (WHY ?).

- **Remarque.** La réciproque est également vraie (ce n'est pas complètement immédiat) :

  Si $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$, *alors F et G sont en somme directe.*

  On verra une preuve de cette réciproque avec la formule de Grassmann à venir, mais on peut fournir une preuve sans Grassmann (cf. ci-dessous).
  Rappelons et utilisons le résultat suivant :

  Si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de $F+G$, alors F et G sont en somme directe.

  Comme la concanétation d'une base de F et d'une base de G est toujours une famille génératrice de $F+G$, avec l'hypothèse sur la dimension $\dim(F+G) = \dim F + \dim G$, on en déduit que cette famille génératrice est « de bon cardinal » donc est une base de $F+G$.

21 preuve

Proposition (Formule de Grassmann)
Soit E un espace vectoriel.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie. Alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$$

- **Remarque.** On en déduit l'équivalence :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G \iff F\cap G = \{0_E\}$$

Supplémentarité en dimension finie

On rappelle que (en dimension quelconque, finie ou infinie), on a : $E = F\oplus G \iff \begin{cases} E = F+G \\ F\cap G = \{0_E\} \end{cases}$

Le raisonnement sous-jacent à cette équivalence est le raisonnement par Analyse-Synthèse puisqu'il s'agit de montrer que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

— l'analyse prouve le $\oplus$ (unicité de l'écriture sous réserve d'existence)

— la synthèse prouve $E = F+G$ (existence de l'écriture)

Ci-dessous, encore un théorème de demi-fainéant ! Vive la dimension finie !

22 preuve

Proposition (caractérisation de la supplémentarité en dimension finie).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels.

(1) $E = F\oplus G \iff \begin{cases} E = F+G \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$

(2) $E = F\oplus G \iff \begin{cases} F\cap G = \{0_E\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$

- **Remarque.** Comme l'implication $\Longrightarrow$ est évidente, il faut surtout retenir l'implication $\Longleftarrow$.
Et il faudra surtout retenir le point (2). Le point (1) est moins pratique. WHY ?

23

Proposition (dimension d'un supplémentaire).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E.
Tous les supplémentaires de F ont pour dimension $\dim E - \dim F$.

III. Applications linéaires

Isomorphie

24 **Proposition.**
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soit E de dimension *finie*.
Si F est isomorphe à E, alors F est de dimension finie, et $\dim F = \dim E$.

- **Résumé.** On peut résumer cela par « deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension ».
  En effet :
  - Si l'un est de dimension finie alors, d'après la proposition, l'autre est aussi de dimension finie et les deux espaces ont même dimension.
  - Sinon, les deux sont de dimension infinie, et l'assertion finale « ils ont même dimension » est vraie car elle doit être comprise en « s'ils ont une dimension, alors les dimensions sont égales ».
- **Concept.** Ce résultat peut donc être vu comme le fondement de la dimension :

  On peut déterminer la dimension d'un espace vectoriel en le mettant en isomorphie avec d'autres espaces vectoriels.
- **Exemple.** Soit $b, c \in \mathbb{K}$. Soit $F = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\right\}$.
  Montrer que F et $\mathbb{K}^2$ sont isomorphes. Qu'en déduire ?

25 **Proposition.**
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
En particulier, deux espaces vectoriels de même dimension finie sont isomorphes.

26 **Proposition facile à retenir !**
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E et F de dimension finie.
- Si f est injective, alors $\dim E \leqslant \dim F$.
- Si f est surjective, alors $\dim E \geqslant \dim F$.

27 preuve **Proposition de demi-fainéant !**
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire avec E et F de dimension finie.
- On a
$$\begin{cases} f \text{ est injective} \\ \dim E = \dim F \end{cases} \implies f \text{ est bijective}$$
  Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.
- On a
$$\begin{cases} f \text{ est surjective} \\ \dim E = \dim F \end{cases} \implies f \text{ est bijective}$$
  Une application linéaire surjective entre deux espaces de même dimension est un isomorphisme.

28 **Corollaire (endomorphisme)**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme avec E de dimension finie.
$$f \text{ injectif} \iff f \text{ bijectif} \iff f \text{ surjectif}$$
En dimension finie, un endomorphisme injectif est un automorphisme.
En dimension finie, un endomorphisme surjectif est un automorphisme.

- **Attention.** Ce résultat est faux si la dimension n'est pas finie.
  L'endomorphisme de dérivation chez les polynômes $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ est surjectif mais pas injectif.
  L'endomorphisme de multiplication par X, à savoir $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$ est injectif mais pas surjectif.
- **Exemple.** Montrer que l'endomorphisme $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P-P' \end{array}$ est un automorphisme.

29 **Proposition.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme avec E de dimension finie.
Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est un automorphisme de E

(ii) il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$

(iii) il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_E$

Dans ce cas, g est égal à f^{-1}.

- **Commentaires.**
  Si on dispose de $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors on vient de montrer que f est un automorphisme, donc f^{-1} existe.
  En composant à droite par f^{-1}, on obtient $(g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E \circ f^{-1}$, d'où $g = f^{-1}$.

30 **Exemple très important (interpolation de Lagrange).**
Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des scalaires distincts.
Considérons

$$\Phi: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big) \end{array}$$

Montrer que Φ est un isomorphisme.

31 **Question.**
Soit $a \in \mathbb{K}$. Considérons

$$\Psi: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a), P'(a), P''(a)\big) \end{array}$$

Montrer que Ψ est un isomorphisme.

Rang d'une application linéaire

32 **Définition.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.
On dit que f est de *rang fini* lorsque $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie.
Dans ce cas, on définit le *rang* de f comme étant :

$$\operatorname{rg} f = \dim\left(\operatorname{Im} f\right)$$

33 **Proposition.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire.

— Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini, et l'on a $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim F$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

— Si E est de dimension finie, alors f est de rang fini, et l'on a $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si f est injective.

- **Remarque.** Le deuxième point a une version plus générale.

  Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. Soit E' un sev de E.
  Si E' est de dimension finie, alors $\varphi(E')$ est de dimension finie et $\dim \varphi(E') \leqslant \dim E'$.

34 **Proposition.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire avec E et F de dimension finie.
Alors f est de rang fini et :

$$\operatorname{rg}(f) \leqslant \min\left(\dim E, \dim F\right)$$

Le rang d'une application linéaire est inférieur à la dimension de l'espace de départ et d'arrivée.

35 preuve **Proposition (Sous-additivité du rang).**
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ deux applications linéaires avec E ou F de dimension finie.
On a

$$\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

- **Attention.** Il n'existe pas de formule donnant $\operatorname{rg}(f+g)$ en fonction du rang de f et de g.
  Au cours de la preuve, on a néanmoins vu une formule plus précise que celle annoncée :

$$\operatorname{rg}(f+g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$

36 preuve **Proposition (composition avec un isomorphisme).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

— Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini, et $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.

— Si g est un isomorphisme et si f est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini, et $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f$.

37 **Proposition (composition).**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux applications linéaires de rang fini.
Alors $g \circ f$ est de rang fini et :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min\left(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f)\right).$$

Le rang d'une composée de deux applications linéaires est inférieur au rang des deux applications linéaires.

Le théorème du rang

38 **Lemme.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie.
Soit S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.
Alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} f$.

Autrement dit, l'application $\widehat{f} : \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ s & \longmapsto & f(s) \end{array}$ est un isomorphisme.

- **Remarque.** Ici, F n'a pas besoin d'être de dimension finie.
- **En français.**

  Tout supplémentaire du noyau d'une application linéaire est isomorphe à son image.

  Autrement dit, si $E = \operatorname{Ker} f \oplus S$, alors S est isomorphe à $\operatorname{Im} f$.
- **Attention de chez attention!**

  Ce théorème ne dit **pas** que $\cancel{E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f}$

  ▷ Première raison : f n'est pas forcément un endomorphisme, et donc l'image de f n'est pas nécessairement incluse dans E.

  ▷ Deuxième raison : prenons l'endomorphisme $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array}$

  Que vaut son noyau ? Et son image ? Sont-ils en somme directe ?

39 **Théorème du rang.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ *avec E de dimension finie.*
Alors f est de rang fini et on a l'égalité de nombres entiers :

$$\dim E \;=\; \dim \operatorname{Ker} f \;+\; \operatorname{rg} f$$

Pour une application linéaire, la dimension de son espace de départ est égale à la somme des dimensions de son noyau et de son image.

40 **Question.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'endomorphisme Δ de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par :

$$\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

Déterminer le noyau et l'image de Δ.

Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

41 **Proposition.**
Soit E et F de dimension finie.
Alors l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathscr{L}(E,F) \;=\; \dim E \times \dim F$$

IV. Hyperplan en dimension finie

Rappel en dimension quelconque

- **Définition MPSI.** Soit E un espace vectoriel quelconque.
Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.
- **Définition PCSI.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.
Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.
- **Proposition.** Soit φ une forme linéaire non nulle sur E. On a

$$\forall\, v_0 \in E \setminus \operatorname{Ker}\varphi, \quad E \;=\; \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Vect}(v_0)$$

Et pour $x \in E$, on a l'écriture suivante

$$x \;=\; \text{{\tiny il n'y a plus le choix}} \;+\; \frac{\varphi(x)}{\varphi(v_0)}\, v_0$$

- **Proposition.**
  — Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.
  — Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Équation d'un hyperplan en dimension finie

42 **Proposition.** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Une partie H de E est un hyperplan
ssi
il existe $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi_{\mathbf{a}}$ où $\varphi_{\mathbf{a}} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i \end{array}$

- **Vocabulaire.** La relation $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ est appelée *équation de H dans la base $\mathscr{B}$*.
- **Exemple.**
En dimension 2, une droite vectorielle possède une équation de la forme $ax+by=0$ avec $(a,b) \neq (0,0)$.
En dimension 3, un plan vectoriel possède une équation de la forme $ax+by+cz=0$ avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

43 **Proposition.** Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ et $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$.

Soit $H_{\mathbf{a}}$ l'hyperplan d'équation $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\, x_i = 0$ dans la base $\mathscr{B}$

et $H_{\mathbf{b}}$ l'hyperplan d'équation $\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i\, x_i = 0$ dans la base $\mathscr{B}$.

Alors

$$H_{\mathbf{a}} = H_{\mathbf{b}} \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ (b_1, \ldots, b_n) = \lambda\, (a_1, \ldots, a_n)$$

- **En français.** Deux hyperplans sont égaux si et seulement si leurs équations dans une même base sont proportionnelles.
- **Exemple.** Dans $\mathbb{K}^3$ muni de sa base canonique, les deux équations $x_1+2x_2+3x_3=0$ et $2x_1+4x_2+6x_3=0$ définissent le même hyperplan.

V. À propos de rang

Rang d'une famille de vecteurs

44 **Définition (rang).** Soit E un espace vectoriel.
Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E.
Le rang de la famille $\mathscr{F}$ est la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.

On le note $\mathrm{rg}(\mathscr{F})$.

-
- **Ou encore.** Le rang de $\mathscr{F}$ est le cardinal maximal d'une sous-famille libre de $\mathscr{F}$.
- **Remarque.** On a
  - $\mathrm{rg}\,\mathscr{F} \in \mathbb{N}$
  - Si $\mathscr{F}$ est la famille vide ou si $\mathscr{F}$ est la famille réduite au vecteur nul, alors le rang de $\mathscr{F}$ vaut 0.
  - Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathrm{rg}\,\mathscr{F} = \mathrm{card}\,\mathscr{F}$.
- **Exemple.** Considérons la famille $\mathscr{F} = \big((1,2,3),(3,2,1),(1,1,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.
  On constate que :
  - les deux premiers vecteurs $(1,2,3)$ et $(3,2,1)$ ne sont pas colinéaires ;
  - le troisième est combinaison linéaire des deux premiers car $4\,(1,1,1) = (1,2,3) + (3,2,1)$.

  Ainsi,
  $$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \;=\; \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,2,3),(3,2,1)}_{\text{famille libre}}\big)$$
  Bilan. On a $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = 2$.

45 **Proposition.** Soit E un espace vectoriel *de dimension finie*.
Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E.
On a
$$\mathrm{rg}\,\mathscr{F} \leqslant \mathrm{card}\,\mathscr{F} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}\,\mathscr{F} \leqslant \dim E$$

46 **Question.**

i) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{F}_n = (I_2, A, A^2, \dots, A^n)$.
Déterminer le rang de $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$, puis de $\mathscr{F}_n$ en fonction de n (avec preuve, of course)

ii) Dans $E = \mathscr{C}^0\big(]-1,1[\big)$, on considère
$$f_1 : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad f_2 : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \qquad f_3 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
Déterminer le rang de $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

Retour sur le rang d'une application linéaire

Soit E de dimension finie équipé d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ et $f : E \to F$ une application linéaire.
Comme $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$, on a en appliquant l'opérateur dim
$$\dim\Big(\mathrm{Im}\, f\Big) \;=\; \dim\Big(\mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)\Big)$$
Autrement dit, le rang de f est aussi le rang de la famille de vecteurs $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$.

2

• Candidat pour $\mathscr{B}$
Considérons
$$A = \left\{ \operatorname{card} \mathscr{L}' \mid \mathscr{L}' \text{ est libre et } \mathscr{L} \subset \mathscr{L}' \subset \mathscr{L} \vee \mathscr{G} \right\}$$
C'est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$.
On peut donc poser $a = \max A$.
On peut alors considérer une famille de cardinal a. Notons-la $\mathscr{B}$.

• Montrons que $\mathscr{B}$ est génératrice de E.
Montrons que $\operatorname{Vect}(\mathscr{B}) = E$. L'inclusion $\subset$ est évidente.
Pour l'inclusion $E \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$, remarquons que $E = \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$.
Il s'agit donc de montrer $\operatorname{Vect}(\mathscr{G}) \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$.
Prenons un vecteur g de la famille $\mathscr{G}$ et montrons qu'il est dans $\operatorname{Vect}(\mathscr{B})$.
Pour montrer que $g \in \operatorname{Vect}(\mathscr{B})$, il suffit de montrer que la famille $\mathscr{B} \vee (g)$ est liée (WHY ?).
Raisonnons par l'absurde et supposons-la libre.
Cette famille vérifie
$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \vee (g) \subset \mathscr{L} \vee \mathscr{G}$$
Donc son cardinal est dans A.
Donc $a + 1 \in A$, ce qui contredit le fait que $a = \max A$.

BILAN. La famille $\mathscr{B}$ est génératrice de E. Comme $\mathscr{B}$ est libre (WHY ?), c'est une base de E.

4

Première preuve. On applique le théorème de la base incomplète à

— la famille $\mathscr{G}$ donnée dans l'énoncé (qui est bien génératrice de E)

— la famille vide $\mathscr{L} = ()$ (qui est bien libre).

Deuxième preuve, version algorithmique.
Si $\mathscr{G}$ est libre, c'est bon.
Sinon, il existe un vecteur v de $\mathscr{G}$ qui est combinaison linéaire des autres. On l'enlève et l'espace vectoriel engendré ne change pas :
$$\operatorname{Vect}(\mathscr{G}) = \operatorname{Vect}\big(\mathscr{G} \setminus \{v\}\big) \qquad \text{car } v \in \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$$
Si $\mathscr{G} \setminus \{v\}$ est libre, c'est bon.
Sinon, il existe un vecteur w de $\mathscr{G} \setminus \{v\}$ qui est combinaison linéaire des autres.
On l'enlève et l'espace vectoriel engendré ne change pas :
$$\operatorname{Vect}\big(\mathscr{G} \setminus \{v\}\big) = \operatorname{Vect}\big((\mathscr{G} \setminus \{v\}) \setminus \{w\}\big) \qquad \text{car } w \in \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$$
On continue le processus, qui finit par s'arrêter car le cardinal de la famille diminue strictement d'une unité à chaque itération.

5

Soit E de dimension finie.
On peut considérer $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E.
D'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base, qui possède donc qu'un nombre fini de vecteurs (puisque c'est le cas de $\mathscr{G}$!).

6

Soit $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace vectoriel.
Soit $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_{p+1})$ une famille de $p+1$ vecteurs appartenant à $\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$.
Montrons que $\mathscr{F}$ est liée.
Il suffit d'exhiber une relation de liaison non triviale entre les f_i.

Les f_i sont des vecteurs de $\mathrm{Vect}(\mathscr{G})$, on peut donc trouver une famille de scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant p+1}}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} f_1 & = & a_{11}g_1 & +\cdots+ & a_{p1}g_p \\ & \vdots & & & \\ f_p & = & a_{1p}g_1 & +\cdots+ & a_{pp}g_p \\ f_{p+1} & = & a_{1,p+1}g_1 & +\cdots+ & a_{p,p+1}g_p \end{array}\right.$$

On cherche $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f_i = 0$.

En combinant les lignes précédentes, on voit qu'il suffit de trouver $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$ tel que l'on ait les p égalités suivantes (penser à faire la somme en colonne) :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_{i,1} = 0, \qquad \dots \qquad \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i a_{i,p} = 0$$

Réorganisons ces p égalités. On obtient un système linéaire de p équations et $p+1$ inconnues (les λ_i) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_{1,1}\lambda_1 & +\cdots+ & a_{p+1,1}\lambda_{p+1} & = & 0 \\ & \vdots & & & \\ a_{1,p}\lambda_1 & +\cdots+ & a_{p+1,p}\lambda_{p+1} & = & 0 \end{array}\right.$$

Notons M la matrice de ce système (c'est la transposée de A) et considérons $\widetilde{M}$ la sous-matrice carrée extraite sur les p premières colonnes.

— Cas où $\widetilde{M}$ est inversible

  On effectue des opérations élémentaires sur les lignes (ce qui ne change pas l'ensemble des solutions du système), et on se ramène au système suivant

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & \mathbf{0} & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & b_p \end{array}\right] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

  On a une relation de liaison non triviale entre les colonnes de cette matrice

$$\mathrm{Col}_{p+1} = b_1\mathrm{Col}_1 + \cdots + b_p\mathrm{Col}_p$$

  Ainsi, en posant

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

  qui n'est pas la colonne nulle (WHY), on a ce qu'il faut.

— Cas où $\widetilde{M}$ n'est pas inversible

On sait qu'il existe une colonne $\widetilde{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ non nulle telle que $\widetilde{M}\widetilde{X} = 0$.

Il suffit alors de poser

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \lambda_{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

qui n'est pas la colonne nulle (WHY), et on a ce qu'il faut.

Elle a lieu par récurrence sur p. Mais il faut prendre le soin de reformuler l'énoncé.
Notons $\mathscr{H}_p$ la propriété :

> « pour toute famille $\mathscr{G}$ de cardinal p, et toute famille $\mathscr{F}$ de cardinal $p+1$ telle que $\text{Vect}(\mathscr{F}) \subset \text{Vect}(\mathscr{G})$, alors $\mathscr{F}$ est liée »

• **Initialisation** $p=0$
Dans ce cas, $\text{Vect}(\mathscr{G})$ est l'espace vectoriel engendré par la famille vide, donc est $\{0_E\}$.
Soit une famille de 1 vecteur, disons x, appartenant à $\text{Vect}(\mathscr{G})$. Alors $x = 0_E$ et donc cette famille est liée.

• **Hérédité** Soit $p \geqslant 1$ tel que $\mathscr{H}_{p-1}$ soit vraie. Montrons que $\mathscr{H}_p$ est vraie.
Remarque importante pour suivre le bon déroulement de la partie « hérédité ». Comme la preuve est relativement subtile, si on ne prend pas le soin de bien choisir ses notations, on est fichu. Je noterai avec un « prime » les familles qui sont de cardinal un de moins que dans $\mathscr{H}_p$. Ainsi $\mathscr{F}'$ désignera une famille de cardinal p et $\mathscr{G}'$ désignera une famille de cardinal $p-1$. Si bien qu'en présence d'une inclusion du type $\text{Vect}(\mathscr{F}') \subset \text{Vect}(\mathscr{G}')$, il ne faudra pas se gêner pour appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}_{p-1}$.
Donnons-nous $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_{p+1})$ et $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_p)$ deux familles telles que $\text{Vect}(\mathscr{F}) \subset \text{Vect}(\mathscr{G})$.
Montrons que $\mathscr{F}$ est liée.
Explicitons l'inclusion $\text{Vect}(\mathscr{F}) \subset \text{Vect}(\mathscr{G})$: on peut trouver une famille de scalaires $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant p+1}}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{rcllll} f_1 &=& a_{11}g_1 & +\cdots+ & a_{p1}g_p \\ & \vdots & & & \\ f_p &=& a_{1p}g_1 & +\cdots+ & a_{pp}g_p \\ f_{p+1} &=& a_{1,p+1}g_1 & +\cdots+ & a_{p,p+1}g_p \end{array}\right.$$

On distingue deux cas. Et on note $\mathscr{G}' = (g_1, \dots, g_{p-1})$.

▷ Si tous les a_{pj} sont nuls alors la famille $\mathscr{F}' = (f_1, \dots, f_p)$ vérifie $\text{Vect}(\mathscr{F}') \subset \text{Vect}(\mathscr{G}')$.
D'après $\mathscr{H}_{p-1}$, la famille $\mathscr{F}'$ est liée. Donc $\mathscr{F}$ aussi (en tant que sur-famille de $\mathscr{F}'$).

▷ S'il existe un certain a_{pj} non nul, alors quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que $a_{p,p+1} \neq 0$.
On introduit une nouvelle famille de vecteurs $\mathscr{F}' = (f'_1, \dots, f'_p)$ définie par

$$\forall\, j \in [\![1,p]\!], \qquad f'_j \;=\; a_{p,p+1}f_j - a_{p,j}f_{p+1}$$

On vérifie que tous les f'_j sont dans $\text{Vect}(\mathscr{G}')$ (car g_p n'apparait pas dans leur expression en fonction des g_i), de sorte que

$$\text{Vect}(\mathscr{F}') \subset \text{Vect}(\mathscr{G}')$$

D'après $\mathscr{H}_{p-1}$, on en déduit que $\mathscr{F}'$ est liée.
Ainsi il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\lambda_1 f'_1 + \cdots + \lambda_p f'_p = 0_E$
En remplaçant f'_j par son expression en fonction de f_j et f_{p+1}, on en déduit que

$$(\lambda_1 a_{p,p+1})f_1 \;+\; \cdots \;+\; (\lambda_p a_{p,p+1})f_p \;-\; \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_{p,j}\right)f_{p+1} \;=\; 0_E$$

Comme les scalaires $\lambda_1 a_{p,p+1}, \dots, \lambda_p a_{p,p+1}$ sont non tous nuls, on en déduit que la famille $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_{p+1})$ est liée.

7

— Soit $\mathscr{L}$ une famille libre.
Montrons que $\mathscr{L}$ est finie.
Par l'absurde, si $\mathscr{L}$ était une famille libre infinie, on pourrait en extraire une sous-famille $\mathscr{L}'$ *libre* (WHY?) de cardinal $\text{card}\,\mathscr{G} + 1$.

Or $\mathscr{L}'$ est une famille de $\mathrm{Vect}(\mathscr{G}) = E$.
D'après Steinitz, on en déduit que $\mathscr{L}'$ est *liée*. Contradiction.
Ainsi, $\mathscr{L}$ est finie.

Toujours avec Steinitz, on en déduit que $\mathrm{card}\,\mathscr{L} \leqslant \mathrm{card}\,\mathscr{G}$.

— Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Déjà $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont finies (car ce sont des familles libres et on peut appliquer le point précédent).
Montrons que $\mathrm{card}\,\mathscr{B} = \mathrm{card}\,\mathscr{B}'$.
On a en particulier
  — $\mathscr{B}$ famille génératrice de E
  — $\mathscr{B}'$ famille libre de E

D'après le point précédent, on en déduit que $\mathrm{card}\,\mathscr{B}' \leqslant \mathrm{card}\,\mathscr{B}$.
En échangeant les rôles joués par $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on obtient l'autre inégalité $\mathrm{card}\,\mathscr{B} \leqslant \mathrm{card}\,\mathscr{B}'$.
D'où l'égalité.

15

• Toute famille libre de F est une famille libre de E.
Comme E est de dimension finie, toute famille libre de F est finie et de cardinal $\leqslant \dim E$ (d'après 7).
En particulier, le cardinal des familles libres de F est majorée.
On peut considérer une telle famille $(e_1, \dots, e_d)$ de cardinal maximal.

Montrons que $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de F.
Ce qui montrera que F est de dimension finie égale à d vérifiant $d \leqslant \dim E$.

▷ Montrons que cette famille est génératrice en montrant $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$.
$\boxed{\subset}$ Soit $x \in F$. Par maximalité de $(e_1, \dots, e_d)$, la famille $(e_1, \dots, e_d, x)$ est liée.
Donc (WHY ?) $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_d)$.

▷ Cette famille est libre par construction.

• Montrons qu'une base de F est une base de E.
Soit $\mathscr{B}_F$ une base de F.
Elle est de cardinal $\dim F$, donc $\dim E$ par hypothèse.
Comme $\mathscr{B}_F$ est une famille libre (de F donc de E) et de cardinal $\dim E$, c'est une base de E.

16

Prenons une base de F.
Complétons-la en une base de E !

17

Reprenons les notations précédentes.
Posons $S = \mathrm{Vect}(e_{d+1}, \dots, e_n)$. C'est un supplémentaire de F dans E en vertu de :

Proposition (concaténation de bases)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E admettant des bases *ayant un nombre fini de vecteurs*.

— Si la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E, alors F et G sont supplémentaires dans E.
— Si F et G sont supplémentaires dans E, alors la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

18

Idée.
Il s'agit juste de vérifier que si (e_i) est une base de E, et si (f_i) est une base de F,
Alors la famille $\big((e_1,0),\ldots,(e_n,0),(0,f_1),\ldots,(0,f_p)\big)$ est une base de $E\times F$.

21

Notons $\mathscr{B}_{F\cap G}=(e_1,\ldots,e_r)$ une base de $F\cap G$.
L'espace vectoriel $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de F.
D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $\mathscr{B}_{F\cap G}$ en une base $\mathscr{B}_F=(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_p)$ de F.
De la même manière, complétons $\mathscr{B}_{F\cap G}$ en une base $\mathscr{B}_G=(e_1,\ldots,e_r,g_1,\ldots,g_q)$ de G.

On a donc
$$\dim(F\cap G)=r \qquad \dim F=r+p \qquad \dim G=r+q$$
L'égalité de Grassmann est $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$; elle se réécrit
$$\dim(F+G)\ =\ (r+p)+(r+q)-r$$
c'est-à-dire $\dim(F+G)=r+p+q$.
Il ne reste donc plus qu'à exhiber une base de $F+G$ de cardinal $r+p+q$.
On propose la famille $(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_q)$.
Vérifions que cette famille est génératrice de $F+G$ et que cette famille est libre.

▷ Aspect générateur.
On a
$$\begin{aligned}F+G&=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_p)+\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_r,g_1,\ldots,g_q)\\&=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_p,\ e_1,\ldots,e_r,g_1,\ldots,g_q)\\&=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_q)\end{aligned}$$
La famille $(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_p,g_1,\ldots,g_q)$ est donc génératrice de $F+G$.

▷ Aspect libre.
Soit $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_p,\gamma_1,\ldots,\gamma_q$ des scalaires tels que
$$\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_re_r+\beta_1f_1+\cdots+\beta_pf_p+\gamma_1g_1+\cdots+\gamma_qg_q\ =\ 0$$
Pour alléger les notations, on pose
$$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_re_r\ \in\ F\cap G \qquad y=\beta_1f_1+\cdots+\beta_pf_p\ \in\ F \qquad z=\gamma_1g_1+\cdots+\gamma_qg_q\ \in\ G$$
Par construction, on a donc $x+y+z=0$.
On en déduit que $z=-(x+y)$. Comme $x,y\in F$, on obtient que z appartient à F.
Or $z\in G$, donc $z\in F\cap G=\mathrm{Vect}(e_1,\ldots,e_r)$.
On écrit z comme combinaison linéaire des e_i, disons
$$z=a_1e_1+\cdots+a_re_r$$
En reprenant l'égalité initiale, on obtient
$$(\alpha_1+a_1)e_1+\cdots+(\alpha_r+a_r)e_r+\beta_1f_1+\cdots+\beta_pf_p\ =\ 0$$
Comme la famille $\mathscr{B}_F=(e_1,\ldots,e_r,f_1,\ldots,f_p)$ est une base de F, c'est une famille libre, donc
$$(\forall\, i,\ \alpha_i+a_i=0) \qquad \text{et surtout} \qquad \forall\, i,\ \beta_i=0$$

En reportant dans l'égalité initiale, on obtient

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_q g_q \;=\; 0$$

Comme la famille $\mathscr{B}_G = (e_1, \ldots, e_r, g_1, \ldots, g_q)$ est une base de G, c'est une famille libre, donc

$$\forall\, i,\ \alpha_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, i,\ \gamma_i = 0$$

22

Notons $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ une base de F et G.

(1) On a l'équivalence suivante (l'implication difficile $\Longleftarrow$ étant due à « une famille génératrice de E de bon cardinal est une base de de E »)

$$\mathscr{B}_F \vee \mathscr{B}_G \text{ est une base de } E \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \mathscr{B}_F \vee \mathscr{B}_G \text{ est une famille génératrice de } E \\ \dim E \;=\; \operatorname{card} \mathscr{B}_F + \operatorname{card} \mathscr{B}_G \end{cases}$$

(2) On a l'équivalence suivante (l'implication difficile $\Longleftarrow$ étant due à « une famille libre de E de bon cardinal est une base de de E »)

$$\mathscr{B}_F \vee \mathscr{B}_G \text{ est une base de } E \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \mathscr{B}_F \vee \mathscr{B}_G \text{ est une famille libre de } E \\ \dim E \;=\; \operatorname{card} \mathscr{B}_F + \operatorname{card} \mathscr{B}_G \end{cases}$$

27

Preuve. Il suffit de montrer que l'image par f d'une base de E est une base de F (WHY ?).

— Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de E.
Comme f est injective, la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est ....

Or cette famille est de cardinal ....

Donc cette famille est une base de F.

— Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de E.
Comme f est surjective, la famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ est ....

Or cette famille est de cardinal ....

Donc cette famille est une base de F.

35

On a $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Par sous-additivité de dim, on obtient $\dim\big(\operatorname{Im}(f+g)\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g\big)$.
On utilise la formule de Grassmann pour le membre droit et on obtient :

$$\operatorname{rg}(f+g) \;\leqslant\; \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$

A fortiori, on a :

$$\operatorname{rg}(f+g) \;\leqslant\; \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$$

36

— Supposons f isomorphisme et g de rang fini.

Comparons $\mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}\, g$. Ces deux espaces sont peut-être directement comparables car ils vivent tous les deux dans G.

On a toujours $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

Par surjectivité de f, on a même $\mathrm{Im}(g \circ f) = g\Big(f(E)\Big) = g(F) = \mathrm{Im}\, g$.

Bref :

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$$

Comme g est de rang fini, on en déduit que $g \circ f$ est de rang fini et on a $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$.

— Supposons g isomorphisme et f de rang fini.

Comparons $\mathrm{Im}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}\, f$. Ces deux espaces ne sont pas directement comparables (ils ne vivent pas au même endroit). Montrons qu'ils sont isomorphes.

On a $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(F')$ où $F' = \mathrm{Im}\, f$. Il s'agit de comparer $g(F')$ et F'.

Par injectivité de g, la restriction de g à F' induit un isomorphisme entre F' et $g(F')$.

Ainsi, F' et $g(F')$ sont isomorphes.

Autrement dit, $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f)$ sont isomorphes.

Comme f est de rang fini, on en déduit que $g \circ f$ également et on a $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$.