Relations de comparaison

Rappels : chez les suites

1 **Définition.** Étant donné deux suites u et v, on dit que :

— u est *dominée* par v lorsqu'il existe une suite b *bornée* telle que $u_n = b_n v_n$ àpcr.
On note $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

— u est *négligeable* devant v lorsqu'il existe une suite ε *tendant vers* 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$ àpcr.
On note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

— u est *équivalente* à v lorsqu'il existe une suite α *tendant vers* 1 telle que $u_n = \alpha_n v_n$ àpcr
ou encore lorsque $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$, c'est-à-dire $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$.
On note $u_n \sim v_n$.

- **À retenir.** Lorsque v est la suite constante égale à 1 :

⋆ $u_n = \mathrm{O}(1) \iff (u_n)$ est bornée

⋆ $u_n = \mathrm{o}(1) \iff u_n \to 0$

⋆ $u_n \sim 1 \iff u_n \to 1$

Les caractérisations suivantes donnent les moyens pratiques pour démontrer de telles relations.

2 **Proposition (faisant presque office de définition en PCSI).** Soit u et v deux suites.
On suppose que la suite v ne s'annule pas àpcr.

⋆ $u_n = \mathrm{O}(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée

⋆ $u_n = \mathrm{o}(v_n) \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 0$

⋆ $u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \to 1$

Motivation et contexte

Ce chapitre permet de revenir sur les notions de limite en permettant, en particulier, de comparer les vitesses de convergence ou de divergence pour des limites de fonctions.

3 **Contexte.**
Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $\mathscr{D}_a$ une partie de $\mathbb{R}$.
On suppose que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

— ou bien $\mathscr{D}_a$ est un intervalle non trivial I et $a \in \overline{I}$;

— ou bien $\mathscr{D}_a$ est de la forme $I \setminus \{a\}$ avec I intervalle non trivial et $a \in \mathring{I}$.

Soit f une fonction.
Lorsque f est définie sur un tel $\mathscr{D}_a$, on dit que « f est définie au voisinage de a ».
Ainsi, f peut ou bien être définie en a, ou bien ne pas être définie en a.

Exemples.

- Les deux fonctions $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ tendent toutes les deux vers 0 en $+\infty$.

  Mais les croissances comparées permettent de dire que $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

  Ainsi, il existe une fonction ε telle que $f = \varepsilon \times g$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

  On dit que f est négligeable devant g en $+\infty$.

  On note $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\big)$.

- Les deux fonctions $\widetilde{f} : x \longmapsto \mathrm{e}^{x}$ et $\widetilde{g} : x \longmapsto x$ tendent toutes les deux vers $+\infty$ en $+\infty$.

  Mais les croissances comparées permettent de dire que $\dfrac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{f}(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

  Ainsi, il existe une fonction ε telle que $\widetilde{g} = \varepsilon \times \widetilde{f}$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

  On dit que $\widetilde{g}$ est négligeable devant $\widetilde{f}$ en $+\infty$.

  On note $\widetilde{g}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\widetilde{f}(x)\big)$.

- Les deux fonctions $u : x \longmapsto \sin x$ et $v : x \longmapsto x$ tendent toutes les deux vers 0 en 0.

  Mais un taux d'accroissement permet de dire que $\dfrac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

  On dit que u et v sont deux fonctions équivalentes en 0.

  On note $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} v(x)$.

I. Relations de négligeabilité et de domination

4 **Définition.** Soit f et φ deux fonctions définies sur $\mathscr{D}_a$.
On dit que :

- f est *dominée* par φ au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction b définie sur $\mathscr{D}_a$, *bornée* au voisinage de a, telle que $f = b \times \varphi$ au voisinage de a.
  On note $\quad f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi) \quad$ ou $\quad f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{O}\big(\varphi(x)\big)$.
- f est *négligeable* devant φ au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction ε définie sur $\mathscr{D}_a$, *tendant* vers 0 en a, telle que $f = \varepsilon \times \varphi$ au voisinage de a.
  On note $\quad f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi) \quad$ ou $\quad f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}\big(\varphi(x)\big)$.

- **Exemple.** On a (WHY ?) $\quad x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{O}(x^3) \quad$ et $\quad x^2 \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}(\sin x)$.
- **Implication.** On a (WHY ?) $\quad f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi) \implies f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$
- **À retenir.**
  - f est bornée au voisinage de $a \iff f$ est dominée par la fonction constante 1.
  - f tend vers 0 en $a \iff f$ est négligeable devant la fonction constante 1.
- **Remarque 1.** Supposons $a \in \mathscr{D}_a$.
  Si φ s'annule en a et si $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$, alors f s'annule également en a.
  A fortiori, on a la même conclusion lorsque $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$.
- **Remarque 2.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est non nul, on a $\quad f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\lambda\varphi) \iff f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$.
  On évitera donc d'écrire $\mathrm{O}(3x^2)$ pour privilégier $\mathrm{O}(x^2)$. Idem avec les o.

5 **Règles de calcul.** Les résultats suivants sont des traductions de propriétés connues sur

les fonctions bornées et *les fonctions tendant vers* 0.

Compatibilité :

$$f = \mathrm{o}(\varphi) \implies f = \mathrm{O}(\varphi)$$

Somme :

$$f_1 = \mathrm{O}(\varphi) \text{ et } f_2 = \mathrm{O}(\varphi) \implies f_1 + f_2 = \mathrm{O}(\varphi)$$
$$f_1 = \mathrm{o}(\varphi) \text{ et } f_2 = \mathrm{o}(\varphi) \implies f_1 + f_2 = \mathrm{o}(\varphi)$$

Produit :

$$f_1 = \mathrm{O}(\varphi_1) \text{ et } f_2 = \mathrm{O}(\varphi_2) \implies f_1 f_2 = \mathrm{O}(\varphi_1\varphi_2)$$
$$f_1 = \mathrm{o}(\varphi_1) \text{ et } f_2 = \mathrm{O}(\varphi_2) \implies f_1 f_2 = \mathrm{o}(\varphi_1\varphi_2)$$
$$f_1 = \mathrm{o}(\varphi_1) \text{ et } f_2 = \mathrm{o}(\varphi_2) \implies f_1 f_2 = \mathrm{o}(\varphi_1\varphi_2)$$

Transitivité :

$$f = \mathrm{O}(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = \mathrm{O}(\varphi_2) \implies f = \mathrm{O}(\varphi_2)$$
$$f = \mathrm{o}(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = \mathrm{O}(\varphi_2) \implies f = \mathrm{o}(\varphi_2)$$
$$f = \mathrm{O}(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = \mathrm{o}(\varphi_2) \implies f = \mathrm{o}(\varphi_2)$$
$$f = \mathrm{o}(\varphi_1) \text{ et } \varphi_1 = \mathrm{o}(\varphi_2) \implies f = \mathrm{o}(\varphi_2)$$

6 **Proposition (interaction).** Soit f et φ deux fonctions définies sur $\mathscr{D}_a$.

— Si $f \underset{a}{=} \mathrm{O}(\varphi)$ et

  ⋆ si φ est bornée au voisinage de a, alors f aussi.

  ⋆ si φ tend vers 0 en a, alors f aussi.

— Si $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$ et

  ⋆ si φ est bornée au voisinage de a, alors f tend vers 0 en a.

- **Remarque.** On a aussi le résultat suivant (mais il est moins intéressant, WHY ?).
Supposons $f \underset{a}{=} \mathrm{o}(\varphi)$

  ⋆ si φ est bornée au voisinage de a, alors f aussi.

  ⋆ si φ tend vers 0 en a, alors f aussi.

7 **Proposition (dans la pratique).**
On suppose que

- φ ne s'annule pas sur $\mathscr{D}_a \setminus \{a\}$
- si $a \in \mathscr{D}_a$ et $\varphi(a) = 0$, alors $f(a) = 0$.

Alors :

— f est dominée par φ au voisinage de a $\iff$ $\frac{f}{\varphi}$ est bornée au voisinage de a

— f est négligeable devant φ au voisinage de a $\iff$ $\frac{f}{\varphi}$ tend vers 0 en a.

Croissances comparées

8 **Proposition (croissances comparées).**
Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

$\boxed{\text{En } +\infty}$ les expressions $(\ln x)^\beta$ x^α $\mathrm{e}^{\gamma x}$ tendent vers $+\infty$ et on a :

$$(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(x^\alpha) \qquad \text{et} \qquad x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\,(\mathrm{e}^{\gamma x})$$

$\boxed{\text{En } 0}$ les expressions $|\ln x|^\beta$ $\frac{1}{|x|^\alpha}$ tendent vers $+\infty$ et on a :

$$|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

$\boxed{\text{En } -\infty}$ les expressions $\mathrm{e}^{\gamma x}$ $\frac{1}{|x|^\alpha}$ tendent vers 0 et on a :

$$\mathrm{e}^{\gamma x} \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$$

II. Fonctions équivalentes

9 **Définition.** Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}_a$.
On dit que
f est *équivalente* à g au voisinage de a lorsque $f-g$ est négligeable devant g au voisinage de a.

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

- **En cryptique.** On a $\quad f \underset{a}{\sim} g \iff f-g \underset{a}{=} \mathrm{o}(g)$
- **Conséquence.** Si $h \underset{a}{=} \mathrm{o}(f)$, alors $f+h \underset{a}{\sim} f$.
- **Exemple.** On a $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x \qquad$ car $1 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$.
  On a $x^2+x+\ln x+\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$
- **Reformulation.**
  La fonction f est *équivalente* à g au voisinage de a lorsqu'il existe une fonction u définie sur $\mathscr{D}_a$, *tendant* vers 1 en a, telle que $f = u\times g$ au voisinage de a.
- **Grand O.** On a (WHY?) $\quad f\sim g \implies f = \mathrm{O}(g)$
  Si deux fonctions sont équivalentes, chacune d'entre elle est dominée par l'autre.
  Attention, la réciproque est fausse : $\qquad x \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(2x) \qquad$ et $\qquad 2x \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(x)$
- **Dans la pratique.**
  Supposons que g ne s'annule pas sur $\mathscr{D}_a\setminus\{a\}$ et que, si $a\in\mathscr{D}_a$ et $g(a)=0$, alors $f(a)=0$.
  Alors
  $$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f}{g} \underset{a}{\longrightarrow} 1$$

10 **Proposition (fonctions polynomiales).**
Soit f une fonction polynomiale non nulle de la forme $f : x \mapsto \sum\limits_{k=p}^{n} a_k x^k$.

$\boxed{\text{En } 0}$ Si $a_p\neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p \qquad$ $\boxed{\text{En } \pm\infty}$ Si $a_n\neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$

11 **Proposition (limite non nulle).** Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_a$.

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ \ell\neq 0 \end{cases} \implies f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$$

- **Réciproque.** On a toujours $\quad f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell \implies f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$
- **« Équivalent simple ».** Lorsque l'on écrit un équivalent pour une fonction, on cherchera toujours à écrire « l'équivalent le plus simple possible ».
  Par exemple, si $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1+x+x^2$, alors on simplifiera systématiquement en $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, équivalent plus simple et qui donne exactement la même information que le précédent.
- **A méditer très longtemps.** En physique, il arrive que l'on écrive $e^x \approx 1+x$ pour préciser le comportement de la fonction exponentielle près de 0.
  Cette notation n'a rien à voir avec les équivalents : l'équivalent $e^x \underset{0}{\sim} 1+x$ est juste, mais n'apporte pas plus de renseignement que $e^x \underset{0}{\sim} 1$ ou même $e^x \underset{0}{\sim} 1-3x^2$.
  On verra comment, avec les développements limités, écrire une forme mathématique offrant la même précision que celle de physique : $e^x = 1+x+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$.

12 **Version sophistiquée du théorème des Gendarmes (avec les ∼).**
Soit f, g et h trois fonctions *réelles* définies sur $\mathscr{D}_a$ telles que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.
Si f et h sont équivalentes à une même fonction ϕ en a, alors g aussi.

13 **Question.** Déterminer un équivalent en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x+1) - \operatorname{Arctan}(x)$.

Équivalents classiques

14 **Proposition (si tangente oblique, alors ...).**
Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_a$ dérivable en a.
Alors

$$f'(a) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

15 **Proposition (équivalents usuels en 0).**
Au voisinage de 0, on a :

- ⋆ $e^x - 1 \sim x$
- ⋆ $\ln(1+x) \sim x$
- ⋆ $\operatorname{sh} x \sim x$
- ⋆ $\operatorname{th} x \sim x$
- ⋆ $\sin x \sim x$
- ⋆ $\tan x \sim x$
- ⋆ $\operatorname{Arcsin} x \sim x$
- ⋆ $\operatorname{Arctan} x \sim x$
- ⋆ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$)
- ⋆ $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{2} x$.

16
preuve

Proposition.

— **Partage de limite.** Si deux fonctions sont équivalentes en a et si l'une possède une limite (finie ou pas) en a, l'autre possède la même limite :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \end{cases} \implies f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$$

— **Partage de non nullité.**

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g \text{ ne s'annule pas au voisinage de } a \end{cases} \implies f \text{ ne s'annule pas au voisinage de } a$$

— **Partage de signe, pour les suites réelles.**

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \\ g \text{ positive au voisinage de } a \end{cases} \implies f \text{ positive au voisinage de } a$$

- **Attention.** Réciproque fausse pour le partage de limite.
  Si f et g ont une même limite en a, elles ne sont pas nécessairement équivalentes en a.
  Penser à x et x^2 en $+\infty$. Ou en 0.
- **Exemple.** Soit $f : x \mapsto x^5 + x^3 - x^2$.
  Quel est le signe de f au voisinage de 0 ?
  Comme on a
  $$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*,\ -x^2 < 0$$
  on en déduit que f est négative au voisinage de 0, et même est strictement négative sur un voisinage épointé de 0.
  Dessiner l'allure du graphe de f au voisinage de 0.
  Et même sur $\mathbb{R}$ (examiner les racines).

III. Opérations

Produit, quotient, puissance

17 **Proposition (produit, quotient)** Soit f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre fonctions définies sur $\mathscr{D}_a$.
Au voisinage de a :

— Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors $f_1\, f_2 \ \sim g_1\, g_2$.

— Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, et si aucune de ces fonctions ne s'annule sur $\mathscr{D}_a \setminus \{a\}$, alors $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$.

- **Exemple important.** On a

$$\forall\, t \in\,]-\pi, \pi[, \quad \cos t - 1 \ = \ \frac{\cos^2 t - 1}{\cos t + 1} \ = \ -\frac{\sin^2 t}{\cos t + 1}.$$

D'où $\boxed{\cos t - 1 \underset{t \to 0}{\sim} \frac{-1}{2} t^2}$.

- **Fonctions rationnelles.** Soit $f : x \mapsto \frac{2x+3x^2+4x^4}{5x^2+6x^3}$. On a

$$\text{en } 0, \quad f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{2x}{5x^2} = \frac{2}{5x} \qquad \text{et} \qquad \text{en } \pm\infty, \quad f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{4x^4}{6x^3} = \frac{2x}{3}$$

Plus généralement, toute fonction rationnelle non nulle est équivalente en 0 au quotient de ses termes de plus bas degré et en $\pm\infty$ au quotient de ses termes de plus haut degré.

18 **Question.** Donner un équivalent en 1 de $\dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$.

19 **Proposition (Élévation à une puissance fixe, indépendante de x).**
Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}_a$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont équivalentes en a, alors les fonctions f^α et g^α aussi, pourvu qu'elles soient bien définies.

- **Remarque.** La condition « pourvu qu'elles soient bien définies » s'exprime différemment suivant la valeur de l'exposant α.
De manière générale, en écrivant :

$$f(x)^\alpha = \exp\big(\alpha \ln f(x)\big) \quad \text{et} \quad g(x)^\alpha = \exp\big(\alpha \ln g(x)\big)$$

on constate que les fonctions f et g considérées doivent être à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Cependant, certaines valeurs de α permettent de considérer la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ sur un domaine plus grand que $\mathbb{R}_+^*$. Cela mène aux cas suivants :
  — si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors il suffit que les fonctions f et g soient à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
  — si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, alors il suffit que les fonctions f et g ne s'annulent pas ;
  — si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors il n'y a aucune condition sur les valeurs prises par f et g.
Par exemple, au voisinage de a, si $f \sim g$, alors
  — sans autre condition sur f et g, on a $f^4 \sim g^4$;
  — si f et g sont à valeurs positives, on a $\sqrt{f} \sim \sqrt{g}$;
  — si f et g sont à valeurs strictement positives, on a $f^\pi \sim g^\pi$.

- **Attention.** On ne peut pas élever à une puissance dépendant de x.

$$\begin{cases} f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \\ g \text{ strictement positive au voisinage de } a \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(x)^{\alpha_x} \underset{a}{\sim} g(x)^{\alpha_x}$$

On a $2^{\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} 1$, mais on ne peut pas élever à la puissance x, sinon on aurait $2 \underset{x \to +\infty}{\sim} 1$, ce qui est clairement faux.

Pas de composition à gauche

20 **Warning.** $\cancel{f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \implies \varphi\big(f(x)\big) \underset{x\to a}{\sim} \varphi\big(g(x)\big)}$

Par exemple, on peut très bien avoir $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ sans avoir $\exp(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \exp(g(x))$.
C'est par exemple le cas en $+\infty$ des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^2 + x$.

21 **Question.** Montrer que $\ln(\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$

Substitution

22 **Proposition (substitution = composition à droite).**
Soit φ définie au voisinage de a.
Soit f et g définies au voisinage de b.

— Si $\begin{cases} \varphi(t) \xrightarrow[t\to a]{} b \\ f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x) \end{cases}$ alors $f\big(\varphi(t)\big) \underset{t\to a}{\sim} g\big(\varphi(t)\big)$

— Si $\begin{cases} \varphi(t) \xrightarrow[t\to a]{} b \\ f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\big(g(x)\big) \end{cases}$ alors $f\big(\varphi(t)\big) \underset{t\to a}{=} \mathrm{o}\Big(g\big(\varphi(t)\big)\Big)$

— Idem avec O

- **Exemples.** On a (WHY ?)

$$\sin(2t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t \qquad \ln(\cos t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-1}{2}t^2 \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

23 **Question.** Déterminer la limite en $+\infty$ de $(1+\frac{1}{x})^x$.

Composition avec des suites

24 **Proposition (substitution = composition à droite).**
Soit f et g définies sur $\mathscr{D}_a$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathscr{D}_a$.

— Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \\ f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \end{cases}$ alors $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} g(u_n)$

— Idem avec o

— Idem avec O

- **Exemple.** On a

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ \ln(\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-1}{2}x^2 \quad \text{WHY?} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \ln\Big(\cos\frac{1}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2}\frac{1}{n^2}$$

Pas de somme

Il n'y a pas de résultat général pour une somme ou une différence d'équivalents : si, au voisinage d'un point a, deux fonctions f_1 et f_2 sont équivalentes à g_1 et g_2 respectivement, rien ne dit que la fonction $f_1 + f_2$ est équivalente à $g_1 + g_2$.
Cela se comprend aisément en pensant à la caractérisation à l'aide du quotient : on peut très bien avoir $\frac{f_1}{g_1} \to 1$ et $\frac{f_2}{g_2} \to 1$ sans pour autant avoir $\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} \to 1$.

- Par exemple, prendre $f_1 = g_1 = f$ et $f_2 = -f$ et $g_2 = -f + g$ de sorte que $f_1 + f_2 = 0$ et $g_1 + g_2 = g$.
  Il reste à trouver f et g vérifiant ces hypothèses. Prenons $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^2$.
  Plaçons-nous au voisinage de 0. On a $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$. Mais $\xcancel{f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2}$.
- On a $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
  En tentant d'ajouter -1 aux deux termes de cet équivalent, on trouve $\cos x - 1 \sim 0$, ce qui est manifestement faux (rappelons qu'une fonction équivalente à la fonction nulle est identiquement nulle au voisinage du point considéré).

Trois situations classiques

Les trois exemples suivants illustrent, dans l'ordre, les trois situations classiques fréquemment rencontrées lors de la recherche d'un équivalent d'une somme de deux fonctions :

— *première situation* : l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre ;
— *deuxième situation* : les deux fonctions « apportent chacune une contribution dans l'équivalent final, sans se compenser » ; ce cas se traite en revenant à la définition ;
— *troisième situation* : les deux fonctions « se compensent » ; sans information supplémentaire, il n'est alors pas possible de conclure.

Dans les trois situations, on commence donc par chercher un équivalent des deux fonctions pour essayer de deviner le résultat et trouver la stratégie pour le prouver.

- **Première situation.** Cherchons un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin(x) + \operatorname{sh}(x^2)$.
  L'équivalent $\operatorname{sh} u \underset{u\to 0}{\sim} u$ donne par substitution $\operatorname{sh}(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$. On a donc :
  $$f(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\sim x} + \underbrace{\operatorname{sh}(x^2)}_{\sim x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{car } x^2 = \operatorname{o}(x)$$
- **Deuxième situation.** Cherchons un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin(5x) - \operatorname{sh}(2x)$.
  En 0, les quantités $\sin(5x)$ et $\operatorname{sh}(2x)$ sont respectivement équivalentes à $5x$ et $2x$. Cela peut laisser pressentir que f est équivalente en 0 à $5x - 2x$, c'est-à-dire $3x$. Cette intuition est correcte.
  Les équivalents $\sin(5x) \underset{x\to 0}{\sim} 5x$ et $\operatorname{sh}(2x) \underset{x\to 0}{\sim} 2x$ peuvent se réécrire :
  $$\sin(5x) = 5x + \underset{x\to 0}{\operatorname{o}}(x) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(2x) = 2x + \underset{x\to 0}{\operatorname{o}}(x)$$
  ce qui donne
  $$\sin(5x) - \operatorname{sh}(2x) = \Big(5x + \underset{x\to 0}{\operatorname{o}}(x)\Big) - \Big(2x + \underset{x\to 0}{\operatorname{o}}(x)\Big) = 3x + \underset{x\to 0}{\operatorname{o}}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$$
- **Troisième situation.** Intéressons-nous à un équivalent en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x) - \operatorname{sh}(2x)$.
  On sait que :
  $$\sin(2x) \sim 2x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh}(2x) \sim 2x.$$
  Dans ce cas, il ne faut surtout pas penser qu'un équivalent de f s'obtient en soustrayant ces deux équivalents : cela nous mènerait à dire que f est équivalente en 0 à la fonction nulle, ce qui est complètement faux.
  En fait, dans cette situation, on peut simplement conclure que $f(x) = \operatorname{o}(x)$ au voisinage de 0.
  Dans un tel cas, si l'on souhaite obtenir un équivalent de f, il faudra utiliser un outil plus puissant, comme la formule de Taylor-Young ou plus généralement un développement limité.

Relations de comparaison

preuve et éléments de correction

16

Comme $f \underset{a}{\sim} g$, on peut écrire $f = u \times g$ au voisinage de a, où u est une fonction tendant vers 1 en a.
La fonction u est alors à valeurs strictement positives au voisinage de a.