Analyse asymptotique

exercices

22exo-AnalyseAsymptotique.pdf, 21 mars 2024, 18:40

101 De tête

1. Est-ce que $\frac{1}{x}$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$?
2. Donner le $\mathrm{DL}_n(3)$ de $\frac{1}{x}$.

102 Parité et développement limité

Une fonction paire telle que $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$ vérifie-t-elle $f(x) = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$?

103 Deux développements limités

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(1+x)^{1/x}$.
2. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

104 Sans calcul !

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$. *Sans calcul*, déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

105 Un classique

Soit $a, b > 0$. Déterminer le $\mathrm{DL}_1(0)$ puis un équivalent de $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.

106 Intégration d'un développement limité

Soit $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{\sqrt{3}+x}{1+x\sqrt{3}}$.
En commençant par calculer f', déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

107 Développement limité d'une fonction réciproque (1)

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \operatorname{ch} x \end{array}$

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et le déterminer.
3. Montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme :

$$f^{-1}(x) = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5),$$

avec $c_1, c_3, c_5 \in \mathbb{R}$. Puis déterminer les c_i.

108 Développement limité d'une fonction réciproque (2) et (3)

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x e^{x^2} \end{array}$
   (a) Montrer que f est une bijection.
   (b) Montrer que sa réciproque f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme
   $$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5).$$
   (c) En utilisant l'égalité $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, déterminer a, b et c.
2. Suivre le même schéma pour obtenir un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la réciproque de $2x + \sin x$.

109 La fonction tangente

Montrer que la fonction tan admet un développement limité à tout ordre en 0.
On pose :

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^{2n+2})$$

Calculer a_n en fonction de $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

110 IPP ?

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t$. Montrer que : $\quad I_n = 1 - \dfrac{\ln 2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

111 Astucieux

Donner le $\mathrm{DL}_{12}(0)$ de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!}\right)$.

112 Ajustement de paramètres

1. Peut-on trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \sin x + b\, x \cos x = x + \underset{x\to 0}{\mathrm{O}}(x^5)$?
2. Parmi les fonctions $(f_{a,b})_{a,b\in\mathbb{R}}$ définies par $f_{a,b} : x \mapsto \sin x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$, y en a-t-il une qui soit négligeable (en 0) devant toutes les autres ?
3. Peut-on trouver deux réels a et b tels qu'il existe une constante C vérifiant

$$\frac{1}{x} + \frac{a}{\ln(1+x)} + \frac{b}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} Cx \text{ ?}$$

113 Étude locale

Étudier au voisinage de 0 la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{Arcsin} x}$.
(Est-elle prolongeable par continuité ? le prolongement est-il dérivable ? que dire de la position relative du graphe et de sa tangente ?)

114 Asymptotes

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}. \end{array}$

Étudier les asymptotes du graphe de f, et la position relative du graphe et de ses asymptotes.

115 Étudier f en 0 et en $\pm\infty$ où ...

... où $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1 + x^2}{x}$.

116 Retour chez les polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

1. Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = C\overline{C}$.
3. En déduire qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

117 Ça se corse

1. Déterminer un équivalent de $x^{\sin x} - (\sin x)^x$ au voisinage de 0.
2. Déterminer un équivalent de $\mathrm{sh}(\sin x) - \sin(\mathrm{sh}\, x)$ au voisinage de 0.

Développements asymptotiques

118 Une suite implicite (1)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$, notée x_n.
2. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et la déterminer. Puis Donner un équivalent de x_n.
3. Montrer que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.
4. Question très difficile. Déterminer un développement asymptotique à 4 termes.

119 Une suite implicite (2)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\mathrm{e}^x + x = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée x_n.
2. Déterminer la limite puis un équivalent de x_n.
3. Donner un développement asymptotique à 3 termes de x_n.

120 Une suite implicite (3)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel $x_n \in \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x_n = x_n$.
2. Montrer qu'il existe a, b, c et $d \in \mathbb{R}$ tels que

$$x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.)

121 Une suite récurrente

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

Montrer que $u_n = n - \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

122 Approximations de e

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang, par exemple en étudiant le quotient de deux termes successifs.
3. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de u_n.
4. Retrouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.

Faire ses gammes

123 Calcul de développements limités

(i) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\mathrm{e}^x \sqrt[3]{1+x}$
(ii) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sin(x)\ln(1+x)$
(iii) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+\sin x}$
(iv) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(\mathrm{e}^x-1)\sin x$
(v) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$
(vi) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\mathrm{e}^{\cos x}-(1+x)^{\frac{1}{x}}$
(vii) $\mathrm{DL}_8(0)$ de $(\sin x)^4$
(viii) $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\tan x$
(ix) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{2x+1}$
(x) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(\cos x)^{1/x}$
(xi) $\mathrm{DL}_{100}(2)$ de x^4
(xii) $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\sqrt{x}$
(xiii) $\mathrm{DL}_2(1)$ de $\frac{1}{1+x}$
(xiv) $\mathrm{DL}_3(1)$ de e^x
(xv) $\mathrm{DL}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $\sin(x)\cos(3x)$
(xvi) $\mathrm{DL}_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\sqrt{\tan x}$
(xvii) $\mathrm{DL}_3(1)$ de $\frac{x\ln x}{x^2-1}$

124 Calcul d'équivalents

(i) $\lfloor x \rfloor$ (en $+\infty$)
(ii) $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x}$ (en 0 et en $+\infty$)
(iii) $\ln(1+x^2)-\sin(x^2)+2\cos^2(x)$ (en $+\infty$)
(iv) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}}$ (en 1)
(v) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x}$ (en 0 et en $+\infty$)
(vi) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}-\operatorname{Arctan} x$ (en $-\infty$)
(vii) $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (en $+\infty$)
(viii) $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ (en π)
(ix) $\dfrac{\sqrt{x}^3+2}{\sqrt[3]{x}^2+3}$ (en $+\infty$)
(x) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ (en $+\infty$)
(xi) $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1$ (en $+\infty$)
(xii) $\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x-1)}$ (en $+\infty$)
(xiii) $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ (en $+\infty$)
(xiv) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$ (en 0)
(xv) $\tan x-\sin x$ (en 0)
(xvi) $\ln(1+\sin x)$ (en 0)
(xvii) $\ln(\ln(1+x))$ (en 0)
(xviii) $\ln(\cos x)$ (en $\pi/2$)

125 Calcul d'équivalents de suites

(i) $\dfrac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1}$
(ii) $\dfrac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1}$
(iii) $\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)$
(iv) $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
(v) $\sin\left(\sin\dfrac{\pi}{n^2}\right)$
(vi) $\dfrac{n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\tan\dfrac{\pi}{n}}$
(vii) $\ln(n+2)-\ln(n+1)$
(viii) $(2n+\ln n^2)\mathrm{e}^{-(n+1)}$
(ix) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$
(x) $\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$
(xi) $\dfrac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3-2n^2}$
(xii) $\dfrac{n!+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$
(xiii) $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}$
(xiv) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
(xv) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n-1)}$

126 Calcul de limites

(i) $\dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x-x}$ (en 0)
(ii) $\dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$ (en 1)
(iii) $\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^3 x}$ (en 0) ;
(iv) $\dfrac{x-\operatorname{Arctan} x}{\sin^3 x}$ (en 0)
(v) $(\cos x)^{\ln|x|}$ (en 0)
(vi) $\dfrac{x^3+7x^2-8}{x^4+x^3-2}$ (en 1)

Analyse asymptotique

corrigés

102

Non, comme le montre l'exemple de $f : x \mapsto 1 + x^2 + x^2\,|x|$. En revanche, c'est le cas quand la fonction admet un $\mathrm{DL}_3(0)$ (ce qui contient le cas où f est trois fois dérivable), comme l'affirme le cours.

103

1. $\mathrm{e}\left[1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right]$.
2. On a

$$\sqrt{1+\varepsilon}=1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+\frac{1}{16}\varepsilon^3+\mathrm{o}(\varepsilon^3)$$

$$\text{donc}\qquad \sqrt{1+\sqrt{1+x}}=\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{8}x-\frac{5}{128}x^2+\frac{21}{1024}x^3+\mathrm{o}(x^3)\right].$$

$DL_1(0)$ de $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ $= \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)$

La fonction n'est pas définie en 0.

On ne peut pas invoquer TY pour dire qu'un DL existe.

En revanche $x \longmapsto \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$ est défini sur $\mathbb{R}$ tout entier et donc admet un $DL(0)$ à tout ordre

Soit $x \in \mathbb{R}$ (au voisinage de 0 suffit).

On a :

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \ln(1+h(x)) \quad \text{où } h(x) = \frac{a^x+b^x}{2} - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Avant de continuer les calculs, essayons de prévoir les ordres des DL.

Comme on veut un $DL_{\underline{\underline{1}}}$ et que l'on voit de la division par x, on veut donc un DL_2 de $\ln(1+h(x))$.

Peut-on donner un équivalent ou un ordre de grandeur de $h(x)$? Par exemple, si on avait $h(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$ un DL_1 du logarithme suffirait.

Ici, on a en fait $h(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^1)$, donc il faut écrire un $DL_{\underline{\underline{2}}}$ du logarithme.

Justification + tard dans le DL de $h(x)$

<u>Reprenons</u>. Pour x au voisinage de 0, on a :

$$\ln(1+h(x)) = h(x) - \frac{1}{2}h(x)^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(h(x)^2\right)$$

- Reste à déterminer un DL_2 de $h(x)$.

On a $h(x) = \dfrac{a^x+b^x}{2} - 1$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x\ln a} + e^{x\ln b}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \ln a . x + \frac{1}{2}(\ln a)^2 x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$+ 1 + \ln b . x + \frac{1}{2}(\ln b)^2 x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\Big)$$
$$- 1$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\ln a + \ln b}{2}\right)}_{\ln\sqrt{ab}} x + \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4} x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

- Revenons à $\ln(1+h(x))$.

$$\ln(1+h(x)) = \ln\sqrt{ab}\, x + \frac{(\ln a)^2+(\ln b)^2}{4}x^2$$
$$- \frac{1}{2}\left(\left(\ln\sqrt{ab}\right)^2 x^2\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

$$\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right) = \alpha x + \beta x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

$$\alpha = \ln \sqrt{ab}$$

$$\beta = \frac{(\ln a)^2 + (\ln b)^2}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\left(\ln(ab)\right)^2$$

$$= \quad \cdots \quad - \frac{1}{8}\left((\ln a)^2 + 2\ln a \ln b + (\ln b)^2\right)$$

$$= \frac{(\ln a)^2 - 2\ln a \ln b + (\ln b)^2}{8} \qquad (\text{WHY})$$

$$= \frac{(\ln a - \ln b)^2}{8} = \frac{1}{8}\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

- Divisons par x :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) = \alpha + \beta x + \underset{x \to 0}{o}(x)$$

- Appliquons l'exponentielle à cette égalité.

$$\exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right) = \exp\left(\alpha + \beta x + \underset{x \to 0}{o}(x)\right)$$

$$= e^{\alpha} e^{\beta x + o(x)}$$

$$= \underbrace{e^{\alpha}}_{\sqrt{ab}}\left(1 + \beta x + o(x)\right) \quad \text{WHY}$$

BILAN : le $DL_1(0)$ de $\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ est

$$\sqrt{ab} + \frac{1}{8}\sqrt{ab}\,\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2 x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

106

On a $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\sqrt{3}x+x^2}$ dont un $\mathrm{DL}_3(0)$ est

$$f'(x) \;=\; -\frac{1}{2}\Big(1-\sqrt{3}x+2x^2-\sqrt{3}x^3+\mathrm{o}(x^3)\Big)$$

Comme $f(0) = \operatorname{Arctan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, on obtient par primitivation le $\mathrm{DL}_4(0)$:

$$f(x) \;=\; \frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{3}x^2}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{\sqrt{3}x^4}{8}+\mathrm{o}(x^4).$$

$$f(x) = x\,\mathrm{ch}(x) = x\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \underset{0}{o}(x^5).$$

On a $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$ donc en composant les développements limités, on a

$$f^{-1}(f(x)) = c_1 f(x) + c_3 f(x)^3 + c_5 f(x)^5 + \underset{0}{o}(f(x)^5).$$

Or, d'après la question 2., $f(x)^2 = x^2 + x^4 + \underset{0}{o}(x^5)$, $f(x)^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^5 + \underset{0}{o}(x^5)$ et $f(x)^5 = x^5 + \underset{0}{o}(x^5)$. On obtient finalement que

$$f^{-1}(f(x)) = c_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5\right) + c_3\left(x^3 + \frac{3}{2}x^5\right) + c_5 x^5 + \underset{0}{o}(x^5),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = c_1 x + \left(\frac{c_1}{2} + c_3\right)x^3 + \left(\frac{c_1}{24} + \frac{3}{2}c_3 + c_5\right)x^5 + \underset{0}{o}(x^5)}.$$

Puisque $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et par unicité du développement limité de $f^{-1} \circ f$, on déduit de la question précédente que

$$c_1 = 1, \quad \frac{c_1}{2} + c_3 = 0, \quad \frac{c_1}{24} + \frac{3}{2}c_3 + c_5 = 0.$$

Ainsi,

$$\underline{c_1 = 1, \quad c_3 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad c_5 = \frac{17}{24},}$$

donc

$$\boxed{f^{-1}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{24}x^5 + \underset{0}{o}(x^5)}.$$

1. (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par opérations, donc dérivable (et donc continue).
La dérivée de f est $(2x^2+1)e^{x^2}$, qui est strictement positive, donc f est strictement croissante.
Par ailleurs, on voit directement que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$.
Le théorème de la bijection monotone entraîne alors que f est une bijection.

(b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bijective. Par ailleurs, sa dérivée est partout > 0, donc elle ne s'annule pas. Le critère de dérivabilité des fonctions réciproques (dans sa version $\mathcal{C}^\infty$) entraîne alors que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
La fonction f^{-1} est *a fortiori* de classe $\mathcal{C}^5$. D'après le théorème de Taylor-Young, elle admet un $\mathrm{DL}_5(0)$: on peut trouver $a_0, a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

Par ailleurs, la fonction f est impaire, donc f^{-1} aussi.
On en déduit $a_0 = a_2 = a_4 = 0$, et, en posant $a = a_1$, $b = a_3$ et $c = a_5$, on obtient le développement limité voulu.

(c) Commençons par calculer un $\mathrm{DL}_5(0)$ de f.
On a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) \qquad \text{car} \begin{cases} e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \\ x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \qquad x\,e^{x^2} = x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5).$$

On en déduit un $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\mathrm{id}_\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(f(x)) \\ &= f^{-1}\left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)\right) \\ &= a\left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)\right) + b\left(x + x^3 + o(x^3)\right)^3 + c(x + o(x))^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\text{car} \begin{cases} f^{-1}(u) = au + bu^3 + cu^5 + \underset{u\to 0}{o}(u^5) \\ x + o(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ (x+o(x))^5 = O(x^5) \end{cases}$$

Développons les deux puissances.

— Quand on va développer $(x + x^3 + o(x^3))^3$, on va bien obtenir une incertitude en $o(x^5)$: en effet, pour obtenir le plus grand terme d'incertitude possible lors du développement de

$$(x + x^3 + o(x^3))^3 = (x + x^3 + o(x^3)) \times (x + x^3 + o(x^3)) \times (x + x^3 + o(x^3)),$$

on va « piocher » dans une des parenthèses un terme d'incertitude et, dans les deux autres, prendre le plus grand terme à notre disposition, à savoir x, pour un « total » de $x \times x \times o(x^3) = o(x^5)$. On va même obtenir ce terme trois fois, car il y a trois manières de choisir dans quelle parenthèse on pioche tel ou tel terme.
On obtient donc

$$(x + x^3 + o(x^3))^3 = x^3 + \underbrace{3x^5}_{3\times x^2 \times x^3} + o(x^5),$$

les autres termes étant soit des termes significatifs « phagocytés » par le terme d'incertitude (à savoir $3 \times x \times (x^3)^2$ et $(x^3)^3$), soit eux-mêmes des termes d'incertitude.

— Avec essentiellement le même raisonnement (plus simple ici, car il n'y a pratiquement que des termes d'incertitude), on obtient $(x + o(x))^5 = x^5 + o(x^5)$.

On peut alors reprendre le calcul (en regroupant tous les termes d'incertitude) : on a

$$\begin{aligned}
x &= a\left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)\right) + b\left(x + x^3 + o(x^3)\right)^3 + c(x + o(x))^5 + o(x^5) \\
&= a\left(x + x^3 + \frac{1}{2}x^5\right) + b\left(x^3 + 3x^5\right) + cx^5 + o(x^5) \\
&= \begin{pmatrix} ax + ax^3 + \frac{a}{2}x^5 \\ \quad + bx^3 + 3bx^5 \\ \quad\quad + \ cx^5 \end{pmatrix} + o(x^5) \\
&= ax + (a+b)x^3 + \left(\frac{a}{2} + 3b + c\right)x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité (et le fait évident que $x = x + o(x^5)$), on obtient les égalités

$$\begin{cases} a & = 1 \\ a + \ b & = 0 \\ \frac{a}{2} + 3b + c & = 0. \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution, à savoir $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

On obtient ainsi le $\mathrm{DL}_5(0)$: $f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$.

2. En procédant de la même façon, on obtient $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{486}x^3 + o(x^3)$.

111

On écrit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11}\frac{x^k}{k!} &= \mathrm{e}^x-\frac{x^{12}}{12!}+\mathrm{o}(x^{12})\\ &= \mathrm{e}^x\left(1-\frac{x^{12}}{12!}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{o}(x^{12})\mathrm{e}^{-x}\right)\end{aligned}$$

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{11}\frac{x^k}{k!}\right) = \ln(\mathrm{e}^x)+\ln\left(1-\frac{x^{12}}{12!}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{o}(x^{12})\mathrm{e}^{-x}\right)$$

Comme $\ln(1+t)\underset{t\to0}{\sim} t$, et $-\frac{x^{12}}{12!}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{o}(x^{12})\mathrm{e}^{-x}\to 0$

$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{x^{12}}{12!}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{o}(x^{12})\mathrm{e}^{-x}\right) &\sim -\frac{x^{12}}{12!}\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{o}(x^{12})\mathrm{e}^{-x}\\ &\sim -\frac{x^{12}}{12!}\mathrm{e}^{-x}\\ &\sim -\frac{x^{12}}{12!}\end{aligned}$$

112

1. Oui, prendre $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$.
   Pour cela, effectuer un DL(0) à un ordre bien choisi de $a \sin x + b\, x \cos x$.
2. On a
   $$f_{a,b}(x) = \left(-a + b - \frac{1}{6}\right) x^3 + \left(\frac{1}{120} + ab - b^2\right) x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$
   donc $f_{a,b}(x) = \mathrm{o}(x^5)$ si et seulement si $-a + b - \frac{1}{6} = ab - b^2 + \frac{1}{120} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a = -\frac{7}{60}$ et $b = \frac{1}{20}$.
   Cette fonction est donc négligeable devant toutes les autres.
3. On trouve le développement asymptotique
   $$(1 + a + b)\frac{1}{x} \ + \ \frac{a-b}{2} \ + \ \frac{b-a}{12} x \ + \ \mathrm{o}(x)$$
   qui est du type
   $$K\frac{1}{x} \ + \ K' \ + \ K''x \ + \ \mathrm{o}(x)$$
   Pour que la fonction soit $\underset{x \to 0}{\sim} Cx$, il faut et il suffit d'avoir $K = 0$, $K' = 0$ et $K'' \neq 0$.
   Comme $K' = \dfrac{1}{2}(a - b)$ et $K'' = \dfrac{-1}{12}(a - b)$, on ne peut pas avoir à la fois K' nul et K'' non nul.

113

La fonction Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$, donc admet un DL(0) à tout ordre en vertu du théorème de Taylor-Young.
Déterminons ce développement limité à l'ordre 5 (attendre un peu pour comprendre l'ordre choisi).
Pour cela, utilisons la technique de primitivation.
Déterminons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$.
On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-t}} &= (1-t)^{-1/2} \\ &= 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-t) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}(-t)^2 + \mathrm{o}(t^2) \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{8}t^2 + \mathrm{o}(t^2) \end{aligned}$$

Comme $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$$

Par primitivation, on a

$$\operatorname{Arcsin} x = \underbrace{\operatorname{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^5)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{Arcsin} x - x}{x \operatorname{Arcsin} x} \\ &= \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \mathrm{o}(x^5)}{x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^6 + \mathrm{o}(x^6)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^3 + \mathrm{o}(x^3)}{1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + \mathrm{o}(x^4)} && \text{en simplifiant par } x^2 \\ &= \left(\tfrac{1}{6}x + \tfrac{3}{40}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 + \mathrm{o}\big(u(x)^2\big)\right) && \begin{cases} \text{avec } \ u(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \\ \text{donc } u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\ \dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2) \end{cases} \\ &= \left(\tfrac{1}{6}x + \tfrac{3}{40}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) \times \left(1 - u(x) + u(x)^2 + \mathrm{o}\big(u(x)^2\big)\right) && \begin{array}{l} \text{avec } u(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{40}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \\ \text{d'où } \begin{cases} u(x) \sim \frac{1}{6}x^2 \\ u(x)^2 = \frac{1}{36}x^4 + \mathrm{o}(x^4) \\ \text{et } u(x)^2 = \mathrm{O}(x^4) \end{cases} \end{array} \\ &= \left(\tfrac{1}{6}x + \tfrac{3}{40}x^3 + \mathrm{o}(x^3)\right) \times \left(1 - \left(\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{3}{40}x^4\right) + \tfrac{1}{36}x^4 + \mathrm{o}(x^4)\right) \\ &= \tfrac{1}{6}x + \tfrac{17}{360}x^3 + \mathrm{o}(x^3). \end{aligned}$$

Par troncature, on obtient le $\mathrm{DL}_0(0)$ de f, et on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 et le prolongement est :

$$\begin{aligned} \widetilde{f} : \ [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

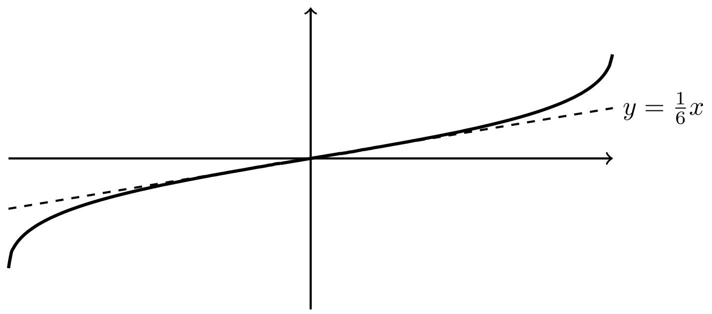
Alors $\widetilde{f}$ possède le $\mathrm{DL}_3(0)$:

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{6}x + \frac{17}{360}x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Ce développement limité (ou plutôt sa troncature à l'ordre 1) montre alors que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0, de dérivée $\frac{1}{6}$.
Par ailleurs,

$$\widetilde{f}(x) - \frac{1}{6}x \ \sim \ \frac{17}{360}x^3$$

Comme on connaît le signe de x^3 au voisinage de 0, on en déduit que le graphe de $\widetilde{f}$ est au-dessus de sa tangente au voisinage de 0^+ et en-dessous au voisinage de 0^-.


$y = \frac{1}{6}x$

— Déjà, on a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ (pas de forme indéterminée), donc le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Il n'y a pas grand chose d'autre à déterminer...

— Par ailleurs, on va effectuer un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$. Le graphe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $+\infty$ si et seulement si f admet le développement asymptotique

$$f(x) = ax + b + \underset{x\to+\infty}{o}(1).$$

Plus précisément, le « terme d'après » dans ce développement asymptotique (ou plutôt son signe) donnera la position du graphe de f par rapport à son asymptote.
On a, quand $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)e^{1/x} \\ &= (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad \text{car } \begin{cases} e^u = 1 + u + \underset{u\to 0}{o}(u) \\ 1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} x+1 \\ \quad +1 \end{pmatrix} + o(1) \\ &= x + 2 + o(1). \end{aligned}$$

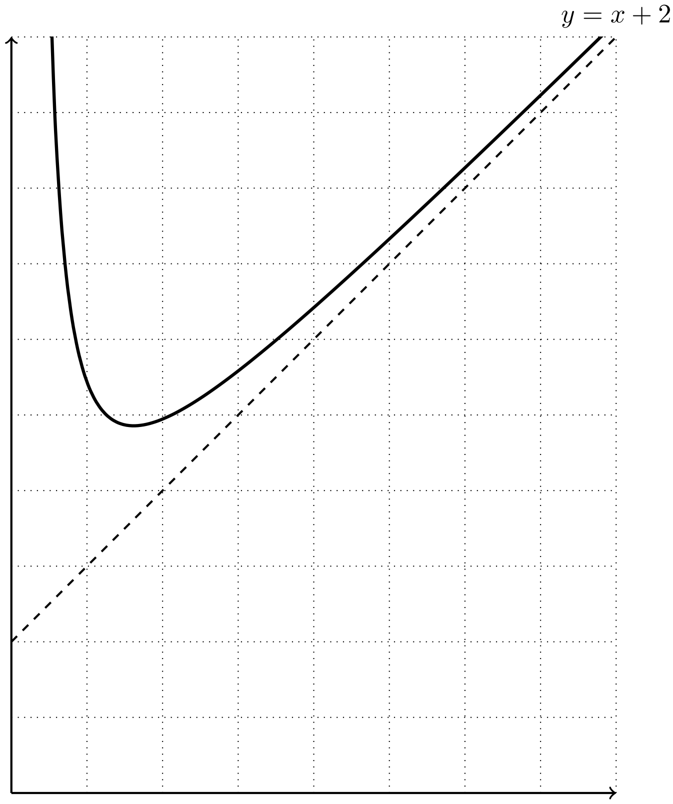
Cela montre que $y = x + 2$ est une asymptote oblique du graphe de f. Poussons le développement à un ordre de plus pour déterminer la position relative du graphe et de l'asymptote.
On a, quand $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)e^{1/x} \\ &= (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \qquad \text{car } \begin{cases} e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2) \\ 1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases} \\ &= \begin{pmatrix} x + 1 + \frac{1}{2x} \\ \quad +1 + \frac{1}{x} \end{pmatrix} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Cela démontre que

$$f(x) - (x+2) = \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}.$$

Comme deux fonctions équivalentes ont localement le même signe, on en déduit que la différence $f(x) - (x+2)$ est positive au voisinage de $+\infty$.
Ainsi, le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.


$y = x + 2$

1. • Comme P est non constant, P est de degré $n \geqslant 1$.
   Notons c son coefficient dominant. Alors $P(x) \underset{+\infty}{\sim} cx^n$
   Or $cx^n \xrightarrow[+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } c > 0 \\ -\infty & \text{si } c < 0 \end{cases}$
   L'hypothèse $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$ implique que P est positif au voisinage de $+\infty$, donc la limite en $+\infty$ vaut $+\infty$, donc $c > 0$.

   • Soit $a \in \mathbb{R}$ une racine de P. Notons m sa multiplicité.
   Ainsi, P s'écrit $(X-a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.
   On a donc $P(x) \underset{a}{\sim} \lambda(x-a)^m$ où $\lambda = Q(a)$.
   Supposons par l'absurde que m est impair.
   Alors $(x-a)^m$ change de signe au voisinage de a, donc $P(x)$ aussi (par partage de signe).
   Or $P(x)$ est positif pour x au voisinage de a.
   D'où la contradiction.
   Donc m est pair.

   Bilan. Les racines de P sont de multiplicité paire.
2. Considérons la décomposition en facteurs irréductibles de P :
$$P = c \prod_{i=1}^{s} (X - x_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^{t} R_j^{q_j}$$
   où les x_i sont les racines réelles de P (elles sont de multiplicité paire !),
   et les R_j sont des polynômes du second degré à discriminant négatif.
   Les racines de ces polynômes sont des nombres complexes conjugués $z_j, \overline{z_j}$.
   En particulier, on a
$$R_j = (X - z_j)\,\overline{(X - z_j)}.$$
   Posons donc
$$C = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^{s} (X - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{t} (X - z_j)^{q_j}.$$
   On a bien $P = C\overline{C}$.
3. Décomposons C en partie réelle et en partie imaginaire $C = A + \mathrm{i}B$ avec $A, B \in \mathbb{R}[X]$.
   D'après la question précédente, on a $P = C\overline{C} = A^2 + B^2$.

118

1.
2.
3. On écrit $x_n - n = -\ln(x_n)$ et on remplace x_n par l'égalité trouvée à la question précédente.

- $\boxed{\textbf{DA à 1 terme}}$ Montrons que $u_n \sim n$.
  - — Une récurrence immédiate donne $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
  - — De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{u_{n-1} + (n-1)^2} \geqslant n-1$, donc $u_n \to +\infty$ par théorème de minoration.
  - — Par récurrence (à faire), on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant n$.
  - — Ainsi $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n-1 \leqslant u_n \leqslant n.$
    Les membres extrêmes sont équivalents à n, donc par théorème des Gendarmes, on a $u_n \sim n$.
- $\boxed{\textbf{DA à 2 termes}}$ Montrons que $u_n = n - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$
  - — **Première façon de calculer.** Montrons que $u_n = n - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$
    ou encore que
    $$u_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$
    ou encore que
    $$u_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$
    c'est-à-dire
    $$u_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$
    On a :
    $$\begin{aligned}
    u_{n+1} &= \sqrt{u_n + n^2} \\
    &= n\sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} \\
    &= n\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} && \text{en reprenant le DA à 1 terme de } u_n \text{ et en le divisant par } n^2 \\
    &= n\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \mathrm{o}\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim\frac{1}{n}}\Big)\right] && \text{car } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathrm{o}(x) \\
    &= n\left(1 + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
    &= n + \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)
    \end{aligned}$$
  - — **Deuxième façon (astucieuse — mais efficace —) de calculer.**
    Montrons que $u_n = n - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$
    ou encore que
    $$u_{n+1} = (n+1) - \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$
    ou encore que
    $$u_{n+1} - n = \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$$
    ou encore que
    $$u_{n+1} - n \sim \frac{1}{2}$$
    Calculons $u_{n+1} - n$.
    On a
    $$u_{n+1} - n = \sqrt{u_n + n^2} - n = n\left(\sqrt{1 + \frac{u_n}{n^2}} - 1\right)$$
    Comme $\dfrac{u_n}{n^2} \to 0$, on a donc en utilisant que $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{2}x$:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-n &\sim n\times\frac{1}{2}\frac{u_n}{n^2} \\ &\sim \frac{1}{2}\frac{u_n}{n} \\ &\sim \frac{1}{2} && \text{car } u_n\sim n \end{aligned}$$

D'où $u_{n+1}-n=\dfrac{1}{2}+\mathrm{o}(1)$, ce qui était l'objectif à atteindre dans cette façon de présenter les calculs.

Bilan. On obtient le DA_2

$$u_n=n-\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)$$

- $\boxed{\textbf{DA à 3 termes}}$ Montrons que $u_n=n-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{8n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ou encore que

$$u_{n+1} = (n+1)-\frac{1}{2}-\frac{3}{8(n+1)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

ou encore que

$$u_{n+1} = (n+1)-\frac{1}{2}-\frac{3}{8n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

c'est-à-dire

$$u_{n+1} = n+\frac{1}{2}-\frac{3}{8n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{u_n+n^2} \\ &= n\sqrt{1+\frac{u_n}{n^2}} \\ &= n\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} && \text{en reprenant le DA à 2 termes de } u_n \text{ et en le divisant par } n^2 \\ &= n\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) && \text{car } \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}(x^2) \\ &= n\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{3}{8n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n+\frac{1}{2}-\frac{3}{8n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'où $u_n=n-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{8n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

122

1. On a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$. On a par ailleurs

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\times\frac{1}{n} = 1,$$

donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

2. On obtient par le calcul que $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$. Cela démontre que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 0$ à partir d'un certain rang, et donc que $(u_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang.

123

(i) $e^x \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + \frac{23}{81}x^3 + o(x^3)$

(ii) $\sin(x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

(iii) $\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$

(iv) $(e^x - 1)\sin x = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$

(v) $\dfrac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$

(vi) $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}x - \frac{23}{24}ex^2 + o(x^2)$

(vii) $(\sin x)^4 = x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + o(x^8)$

(viii) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$

(ix) $\dfrac{xe^{-x}}{2x+1} = x - 3x^2 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{79}{6}x^4 + o(x^4)$

(x) $(\cos x)^{1/x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$

(xi) $(2+h)^4 = 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4 + o(h^{100})$

(xii) $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$

(xiii) $\frac{1}{1+(1+h)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$

(xiv) $\exp(1+h) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3 + o(h^3)$

(xv) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\cos\left(3\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}h + \frac{5\sqrt{3}}{2}h^2 + o(h^2)$

(xvi) $\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)} = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o(h^3)$

(xvii) $\frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + o(h^3)$

(i) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$

(ii) $\frac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{2}{x}$ et $\frac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{2}$

(iii) $\ln(1+x^2) - \sin(x^2) + 2\cos^2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x$

(iv) $\frac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{x-1}$

(v) $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

(vi) $1 + e^{e^{e^x}} - \operatorname{Arctan} x \underset{x\to-\infty}{\sim} 1 + e + \frac{\pi}{2}$

(vii) $\sqrt{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^{-1/4}}{\sqrt{2}}$

(viii) $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to\pi}{\sim} \frac{\pi - x}{\sqrt{\pi}}$

(ix) $\frac{\sqrt{x}^3+2}{\sqrt[3]{x}^2+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{5/6}$

(x) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

(xi) $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln x}$

(xii) Pour tout $x > e$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{\ln(x-1)} &= \sqrt{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} - \sqrt{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)} \\
&= \sqrt{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - \sqrt{\ln x + \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} \\
&= \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right).
\end{aligned}$$

Cette expression peut paraître horrible, mais on a en fait appliqué à fond l'idée de factoriser par les termes prépondérants, et on se retrouve maintenant dans une position idéale pour utiliser des DL de $u \mapsto \ln(1+u)$ ou $u \mapsto \sqrt{1+u}$.
Or, quand $x \to +\infty$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{car } \begin{cases} \ln(1+u) = 1 + u + \underset{u\to 0}{o}(u) \\ \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \frac{1}{x\,\ln x} + o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} &= \sqrt{1+\frac{1}{x\,\ln x} + o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x\,\ln x} + o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right) \quad \text{car } \begin{cases} \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{o}(u) \\ \frac{1}{x\,\ln x} + o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \frac{1}{x\,\ln x} + o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right) = O\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right). \end{cases}
\end{aligned}$$

Exactement de la même façon,

$$\sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x\,\ln x} + o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right).$$

On en déduit

$$\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}-\sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = \frac{1}{x\,\ln x}+o\left(\frac{1}{x\,\ln x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x\,\ln x}.$$

Ainsi, d'après les propriétés multiplicatives de l'équivalence,

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln(1-x)} &= \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}-\sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln x}\times\frac{1}{x\,\ln x}\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.\end{aligned}$$

(xiii) $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln x$

(xiv) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

(xv) $\tan x-\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^3$

(xvi) $\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(xvii) $\ln(\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln x$

(xviii) $\ln(\cos x) \underset{x\to\pi/2}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

(i) $\frac{3n^4-2n^2+1}{2n^3+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2}n$

(ii) $\frac{\ln n+n+1}{3n^2+2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$

(iii) $\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

(iv) $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

(v) $\sin\sin\frac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$

(vi) $\frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{\pi}$

(vii) $\ln(n+2)-\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

(viii) $(2n+\ln n^2)e^{-(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2ne^{-(n+1)}$

(ix) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\frac{\ln n}{n}$

(x) $\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$

(xi) $\frac{n^3-\sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3-2n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{n}{2}$

(xii) $\frac{n!+e^n}{2^n+3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}$

(xiii) $\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$

(xiv) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(xv) $\sqrt{\ln(n+1)-\ln(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

(i) Le dénominateur est $\frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc $\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$. Le numérateur est $-\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$, donc $\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2$. On a donc

$$\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\tan x - x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{3}{2x}.$$

En particulier, cette fonction diverge en 0 (sa valeur absolue tend vers $+\infty$).

(ii) On a $\tan h \underset{h\to 0}{\sim} h$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\ln\left(2(1+h)^2-1\right) &= \ln(1+4h+2h^2) \\
&= (4h+2h^2) + \underset{h\to 0}{o}\left(4h+2h^2\right) \qquad \text{car } 4h+2h^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0 \\
&= 4h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\
&\underset{h\to 0}{\sim} 4h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc} \qquad & \frac{\ln(2(1+h)^2-1)}{\tan((1+h)-1)} \underset{h\to 0}{\sim} 4 \\
\text{donc} \qquad & \frac{\ln(2(1+h)^2-1)}{\tan((1+h)-1)} \xrightarrow[h\to 0]{} 4 \\
\text{donc} \qquad & \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)} \xrightarrow[x\to 1]{} 4.
\end{aligned}$$

(iii) On a $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} = \frac{\sin^3 x - x^3}{x^3 \sin^3 x}$.
On a déjà $x^3 \sin^3 x \underset{x\to 0}{\sim} x^6$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sin^3 x - x^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^3 - x^3 \\
&= x^3\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^3 - x^3 \\
&= x^3\left(1 - 3\frac{x^2}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - x^3 \quad \text{car } -\frac{x^2}{6} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ et } (1+h)^3 = 1+3h+\underset{h\to 0}{o}(h) \\
&= -\frac{1}{2}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5) \\
&\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^5.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

En particulier, cette fonction diverge en 0 (sa valeur absolue tend vers $+\infty$).

(iv) On a

$$\begin{aligned}
x - \operatorname{Arctan} x &= x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \qquad & \sin^3 x \underset{x\to 0}{\sim} x^3 \\
\text{donc} \qquad & \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3} \\
\text{donc} \qquad & \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{\sin^3 x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(v) On a $(\cos x)^{\ln|x|} = \exp(\ln|x| \ln\cos x)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln(1 + (\cos x - 1)) \\
&= (\cos x - 1) + \underset{x\to 0}{o}(\cos x - 1) && \text{car} \quad \cos x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \\
&= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2). && \text{car} \quad \cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Par croissance comparée, on a

$$\ln|x|\ \ln\cos x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\ln|x|\ x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, on a

$$(\cos x)^{\ln|x|} = \exp(\ln|x| \ln\cos x) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp(0) = 1.$$

(vi) On a

$$\begin{aligned}
(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8 &= \left(1 + 3h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) + 7\left(1 + 2h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) - 8 \\
&= 17h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\
&\underset{h\to 0}{\sim} 17h \\
\text{et} \quad (1+h)^4 + (1+h)^3 - 2 &= \left(1 + 4h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) + \left(1 + 3h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) - 2 \\
&= 7h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\
&\underset{h\to 0}{\sim} 7h.
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi,} \quad \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} \underset{h\to 0}{\sim} \frac{7}{17}$$

$$\text{donc} \quad \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{7}{17}.$$

In fine,

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{7}{17}.$$