Représentation matricielle des applications linéaires

24c-RepresentationMatricielle.pdf, 24 mars 2024, 21:24

Le plus souvent dans ce chapitre, nous travaillerons avec des espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire ayant une base avec un nombre fini de vecteurs.
On ne verra donc pas souvent $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Cela dit, on pourra voir passer des sous-espaces vectoriels de dimension finie de ces espaces.
On verra par exemple très souvent apparaître $\mathbb{K}_n[X]$.

I. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Matrice d'un vecteur

1 **Définition (matrice d'un vecteur dans une base).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E, disons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit $v \in E$ que l'on écrit de manière unique sur la base $\mathscr{B}$; disons $v = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k e_k = \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_n e_n$.

Alors la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice *colonne* de taille n suivante :

Remarques.

- Il ne faut pas avoir peur de « border » la matrice colonne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$
  - à droite, par les vecteurs de la base $\mathscr{B}$
  - en haut, par le vecteur v
- Dans la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$, il y a des **scalaires**, c'est-à-dire des éléments de $\mathbb{K}$.
- Cela n'a aucun sens de parler de ~~LA matrice de v.~~ Il faut préciser la base choisie (qui n'est pas unique !). Bref, apprenez la locution suivante « la-matrice-de-v-dans-la-base-$\mathscr{B}$ ».

Exemples.

- On pose $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$. On considère $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Alors $P =$ ....
- On pose $\mathscr{B} = (X^2, 1, X)$. On considère $P \in \mathbb{K}_2[X]$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$. Alors $P =$ ....
- Considérons $\mathbb{K}^2$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}_{\text{cano}}$.
  Soit $\mathscr{C} = \big((1,2), (0,1)\big)$. Cette famille est une base de $\mathbb{K}^2$ (WHY ?).
  Soit $v = (5,4) \in \mathbb{K}^2$.
  Alors
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(v) = \qquad\qquad\qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(v) =$$

- Dans $\mathbb{K}_2[X]$, considérons $P = aX^2 + bX + c$ et $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.
Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.
D'une part,

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) = \ldots\ldots$ $\quad\quad$ $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \ldots\ldots$ $\quad\quad$ d'où $\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \ldots\ldots$

D'autre part, comme $P + Q = (a+\alpha)X^2 + (b+\beta)X + (c+\gamma)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P+Q) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

2 **Proposition (la moulinette $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'une base $\mathscr{B}$.

(i) Soit $v, v' \in E$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda v + \lambda' v') \;=\; \lambda \,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \;+\; \lambda' \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v')$$

(ii) L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} : & E & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & v & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \end{array}$$

est un isomorphisme.

- **Remarque.**
Le point (i) dit que l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ du point (ii) est une application linéaire.

Le point (ii) est une manière pompeuse de dire que, dans un espace de dimension n, la donnée de n scalaires déterminent de manière unique un vecteur, *à condition d'avoir fixé une base.*

Matrice d'une famille de vecteurs

3 **Définition (matrice d'une famille dans une base).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie équipé d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
Soit $\mathscr{F} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de E.
La matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \;=$$

Autrement dit, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p)$ est la matrice colonne $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_j)$.

- **Précisément.**
Si on écrit chaque v_j sur $\mathscr{B}$ (de manière unique !), disons $v_j = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

Exemples.

- Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$ muni de la base canonique $\mathscr{B}_{\text{cano}} = (1, X, X^2, X^3)$.
Soit la famille $\mathscr{F} = \left((X+1)^3,\ X+1\right)$.
On a

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(\mathscr{F}) = \ldots\ldots$$

Soit la famille $\mathscr{B} = \left(1,\ X+1,\ (X+1)^2,\ (X+1)^3\right)$.
On a

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(\mathscr{B}) = \ldots\ldots$$

4 **Proposition (matrice colonne d'une combinaison linéaire de p vecteurs).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie équipé d'une base $\mathscr{B}$.
Soit $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.
On a

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) \;=\; \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p) \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$$

Visuellement

- **Rappel.**
Pour comprendre cette proposition, il faut se rappeler comment interpréter en colonnes le produit matriciel AX, où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.
Si on pose $X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$, alors AX est la colonne $\lambda_1 \text{Col}_1(A) + \cdots + \lambda_p \text{Col}_p(A)$.

- **Preuve.**
On pose $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p)$. On a

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) \overset{\text{WHY}}{=} \lambda_1 \underbrace{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1)}_{\text{Col}_1(A)} + \cdots + \lambda_p \text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_p) \overset{\text{WHY}}{=} \underbrace{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_p)}_{A} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{bmatrix}$$

5 **Proposition (caractérisation matricielle de l'aspect « base »).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n équipé d'une base $\mathscr{B}$.
Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E de cardinal n.
Alors la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est carrée, et :

$$\mathscr{F} \text{ base de } E \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ est inversible}$$

- **Preuve.** Notons $n = \dim E$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n) \text{ base de } E &\iff \forall\, y \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ y = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \\
&\iff \forall\, y \in E,\ \exists!\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) \\
&\qquad\qquad \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \\
&\iff \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \\
&\iff \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})X \\
&\overset{\text{WHY}}{\iff} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) \text{ est inversible}
\end{aligned}$$

6 **Question.** Montrer que la famille $\mathscr{F} = \Big((X-1)^2,\ (X-1)(X-2),\ (X-2)^2\Big)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

II. Matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme

Définitions et exemples

7 **Définition (matrice d'une app. linéaire dans une base).**
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

La matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ est la matrice de la famille des images par f des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ dans la base $\mathscr{B}_F$. Elle est notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$.

- **Reformulation 1.** En notant $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \; = \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(e_1), \ldots, f(e_p)\Big)$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_j)\big)$.

- **Reformulation 2.** En notant $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_n)$, on a visuellement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \; =$$

Si on pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad f(e_j) \; = \; \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i$$

8 **Exemples.**

- Soit $a, b \in \mathbb{K}$.
Considérons l'application linéaire (WHY ?)
$\Theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ P & \longmapsto & \big(P(a), P(b)\big) \end{array}$
Écrire la matrice de Θ dans les bases canoniques de $E = \mathbb{K}_2[X]$ et $F = \mathbb{K}^2$, notées $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

- Soit $a \in \mathbb{K}$.
Considérons l'application linéaire (WHY ?)
$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(a), P'(a), P''(a)\big) \end{array}$
Écrire la matrice de Ψ dans les bases canoniques.

9 **Autres exemples.**

- Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 7x+8y+9z) \end{array}$

  Notons $\mathscr{B}_E$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et $\mathscr{B}_F$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$.
  Donner la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

- Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

  On note $f_A : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est A.
  Décrire l'application f_A.

10 preuve

Proposition (image d'un vecteur par une application linéaire).
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in E$.

On a la relation
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(v)\big) \; = \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \; \times \; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(v)$$

- C'est une égalité du type « matrice colonne = matrice rectangulaire × matrice colonne »

11 **Définition (matrice d'un endo dans une base).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, équipé d'une base $\mathscr{B}$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice de la famille des images par f des vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}$. Elle est notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

- **Reformulation 1.** En notant $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big)$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_j)\big)$.

- **Reformulation 2.** En notant $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a visuellement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \;=$$

12 **Proposition (endos remarquables).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, équipé d'une base $\mathscr{B}$.

— On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) = \dots\dots$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & \lambda\, v \end{array}$, notée $\lambda\,\mathrm{id}_E$, est linéaire : c'est l'homothétie de rapport λ.

On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda\,\mathrm{id}_E) = \dots\dots\dots$

13 **Exemples.**

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, 3x + 4y) \end{array}$

Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \;=$$

Considérons la famille $\mathscr{C} = \big((1, 2), (0, 1)\big)$ qui est une base de $\mathbb{K}^2$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) \;=$$

- Plaçons-nous dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, muni de la base $\mathscr{B} = (1, \mathrm{i})$.
  Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $f_\theta : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z \end{array}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_\theta) =$$

- Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$
  Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
  On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) =$$

- Soit $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$
  Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{K}_3[X]$.
  On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(D) =$$

Trouver une base $\mathscr{C}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

14 **Question (base adaptée pour un projecteur).** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(p) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où r est à déterminer en fonction de p.

15 preuve **Un exemple important.**
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 5f + 6\,\text{id}_E = 0$.
Alors on peut démontrer (comment ?) que $E = \text{Ker}(f - 2\,\text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - 3\,\text{id}_E)$.

On suppose maintenant E de dimension finie.
Alors il existe une base $\mathscr{C}$ de E dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale de la forme

$$\text{Mat}_{\mathscr{C}}(f) =$$

En Spé, on dira que l'endomorphisme f est diagonalisable (car il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale).

16 **Exercice très difficile.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est du type $\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où r est à déterminer en fonction de f.

Premières propriétés

À l'aide de la proposition 10, on peut d'ores et déjà prouver cet énoncé, qui sera renforcé dans les prochaines pages.

17 **Proposition (caractérisation matricielle d'un isomorphisme).**
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
On a

$$f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{la matrice } \text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \text{ est inversible}$$

Une application linéaire est bijective ssi n'importe laquelle de ses matrices est inversible.

- **Preuve.** Par équivalences successives. On note $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.
  On a

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme} &\iff \text{l'image par } f \text{ de } \underbrace{\mathscr{B}_E}_{(f(e_1),\dots,f(e_n))} \text{ est une base de } F \\ &\overset{\text{WHY}}{\iff} \underbrace{\text{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)}_{\text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)} \text{ est inversible} \end{aligned}$$

- **Autre preuve.** Notons $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On a

$$\begin{aligned} f \text{ isomorphisme} &\iff \forall\, y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ y = f(x) \\ &\iff \forall\, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists!\, X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ Y = \text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\, X \\ &\iff \text{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \text{ inversible} \end{aligned}$$

18
preuve

Proposition (opérations).
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}_G$.

(i) Soit $f, g \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$$

(ii) Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$$

(iii) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)^k$$

19
sol → 26

Question. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y - z, -x + 2y - z, -x + y) \end{array}$
Montrer que f est un projecteur.

20
preuve

Proposition (app. linéaire ↔ matrice rectangulaire)
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
Notons $p = \dim E$ et $n = \dim F$.
L'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

21

Proposition (endo ↔ matrice carrée).
Soit E un espace vectoriel de dimension finie équipé d'une base $\mathscr{B}$.
Notons $n = \dim E$.
L'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme.

- **Remarque.**
  Cette proposition est très importante, bien que relativement « abstraite ».
  Elle dit que « le monde vectoriel » peut être codé matriciellement et que « le monde matriciel » peut être codé vectoriellement, et ceci avec une parfaite correspondance (c'est-à-dire une correspondance bijective).
- **Traduction de l'injectivité de Φ.**

- **Traduction de la surjectivité de Φ.**

22 **Proposition (dimensions de $\mathscr{L}(\dots)$).**

- Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
  Alors l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est de dimension finie et
  $$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$$
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
  Alors l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E est de dimension finie et
  $$\dim \mathscr{L}(E) = (\dim E)^2$$
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
  Alors l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est de dimension finie et
  $$\dim \mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = \dim E$$

23 preuve **Proposition (caractérisation matricielle d'un isomorphisme (bis)).**
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie équipés respectivement d'une base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\text{l'application linéaire } f \text{ est un isomorphisme} \iff \text{la matrice } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \text{ est inversible}$$

Dans ce cas :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\right)^{-1}$$

24 **Proposition (caractérisation matricielle d'un automorphisme).**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, équipé d'une base $\mathscr{B}$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\text{l'endomorphisme } f \text{ est un automorphisme} \iff \text{la matrice } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est inversible}$$

Dans ce cas :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)^{-1}$$

25 **Question.** La matrice suivante est inversible, n'est-ce pas ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sans effort (c'est-à-dire sans calcul, sans pivot de Gauss), déterminer son inverse.

III. Changement de bases

Matrice de changement de base

26 **Définition (matrice de passage).**
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On appelle *matrice de passage* de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} =$$

On a $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

- **À méditer.** Dans $\mathbb{K}^n$, dans $\mathbb{K}_n[X]$ et dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, les vecteurs sont le plus souvent donnés par leur écriture dans la base canonique $\mathscr{B}_{\text{cano}}$.
  L'écriture d'une matrice de passage du type $P_{\mathscr{B}_{\text{cano}}\to\mathscr{B}'}$ se fait alors sans aucun calcul.

Exemples.

- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$.
  Notons $\mathscr{B}' = \big((1,2),(0,1)\big)$, qui est une base de $\mathbb{K}^2$.
  On a

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} =$$

- Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.
  Notons $\mathscr{B}' = \big(1, X-a, (X-a)^2\big)$ la base « de Taylor en a » où $a \in \mathbb{K}$.
  On a

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} =$$

27 preuve

Proposition (inverse d'une matrice de passage).
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
La matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et :

$$\left(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$$

28 preuve

Proposition.
Une matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de passage.
Autrement dit :

> *Soit* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
> *Alors* A *est la matrice de passage* $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ *pour certaines bases* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *d'un certain espace vectoriel* E.
> *Par exemple,* $E = \mathbb{K}^n$ *et* $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{cano}$.

29

Proposition (formule de changement de base pour un vecteur).
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $v \in E$.
Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(v)$.
Alors

$$X = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\,X'$$

ou encore

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\,X'$$

- **Attention.** La matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$
  - — donne les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$
  - — permet d'obtenir les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}$ à partir de ses coordonnées dans $\mathscr{B}'$ (et pas le contraire !)
- **Exemple.** Soit $v = (5,4) \in \mathbb{K}^2$.
  Donner les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}' = \big((1,2),(0,1)\big)$ de $\mathbb{K}^2$.

Changement de bases pour une application linéaire

30 preuve

Proposition (formule de changement de base pour une application linéaire).
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
Soit $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E, ainsi que $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}'_F$ deux bases de F.
Notons

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f), \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f), \qquad P = P_{\mathscr{B}_E \to \mathscr{B}'_E} \qquad \text{et} \qquad Q = P_{\mathscr{B}_F \to \mathscr{B}'_F}$$

Alors :

$$A' = Q^{-1} A P$$

- De manière explicite, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = (P_{\mathscr{B}_F \to \mathscr{B}'_F})^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times P_{\mathscr{B}_E \to \mathscr{B}'_E}$$

31 preuve

Proposition (formule de changement de base pour un endomorphisme).
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
Notons

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f), \qquad A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \qquad \text{et} \qquad P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$$

Alors :

$$A' = P^{-1} A P$$

- De manière explicite, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = (P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'})^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$$

32 sol → 28

Question. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y - z,\ -x + 2y - z,\ -x + y) \end{array}$

Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On a vu que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et que f est un projecteur.

Alors il existe (WHY ?) une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{K}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Déterminer **une** telle base $\mathscr{C}$.

Déterminer la matrice de passage $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}}$. Vérifier la formule de changement de base.

IV. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition

Jusqu'à présent, on a vu qu'à une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$, on peut associer plein de matrices (autant que de choix de bases pour E et pour F).
Réciproquement, on aimerait savoir si, à une matrice précise A, on peut associer des applications linéaires. La réponse est évidemment oui !
Il y a *plein* d'applications linéaires ayant A pour matrices (autant que de choix pour E et pour F, puis de bases pour E et F).
Mais il y en a *une* (application linéaire) qui porte un nom.
Il s'agit de l'application linéaire dite « canoniquement associée à A ». C'est celle ayant pour espace de départ et d'arrivée des $\mathbb{K}^{\text{truc}}$.

33 **Définition.**

— Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice.
L'application linéaire $\varphi_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques est la matrice A est appelée *application-linéaire-canoniquement-associée-à-A*.

— Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.
L'endomorphisme $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est la matrice A est appelé *endomorphisme-canoniquement-associé-à-A*.

- **Exemple.** L'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ est

- **Dictionnaire « matrice ↔ appli. linéaire cano. asso. »**

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice et $\varphi_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée.

- Par définition, on a $\operatorname{Ker}\varphi_A = \{x \in \mathbb{K}^p \mid \varphi_A(x) = 0_{\mathbb{K}^n}\}$ et $\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\}$
Soit $x \in \mathbb{K}^p$ un p-uplet et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ la colonne de hauteur p associée i.e. $X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(x)$.
On a :
$$x \in \operatorname{Ker}\varphi_A \iff X \in \operatorname{Ker} A$$
Les espaces vectoriels $\operatorname{Ker}\varphi_A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont canoniquement isomorphes (via l'application $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano de }\mathbb{K}^p}}$).
- En notant $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, et $(E_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ celle de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a
$$\operatorname{Im}\varphi_A = \operatorname{Vect}\Big(\varphi_A(e_i)\Big)_{i\in[\![1,p]\!]} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\Big(AE_i\Big)_{i\in[\![1,p]\!]} = \operatorname{Vect}\Big(\operatorname{Col}_i(A)\Big)_{i\in[\![1,p]\!]}$$
Les espaces vectoriels $\operatorname{Im}\varphi_A$ et $\operatorname{Im} A$ sont canoniquement isomorphes (via l'application $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano de }\mathbb{K}^n}}$).
- Lorsque $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est carrée, on a l'équivalence :
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \overset{\text{WHY}}{\iff} \varphi_A \text{ automorphisme}$$

Ceci est dû à l'égalité $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_{\text{cano}}}(\varphi_A)$.

34 **Question.** En considérant l'endomorphisme canoniquement associé, donner sans calcul matriciel les puissances de $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Démonstration de deux "vieux" théorèmes

Nous sommes maintenant en mesure de donner les preuves de deux théorèmes donnés dans le chapitre « Matrices » du mois d'octobre.

35 **Théorème (caractérisation de l'inversibilité d'une matrice par les systèmes homogènes).**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On a

$$A \text{ est inversible} \iff \text{l'équation } AX = 0 \text{ possède une unique solution, à savoir la colonne nulle}$$

c'est-à-dire :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \Big[\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad \big(AX = 0 \implies X = 0\big)\Big]$$

Autrement dit, A est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

- **Preuve.** On va réaliser la matrice A comme la matrice d'un certain endomorphisme, de sorte à pouvoir appliquer les résultats connus sur les endomorphismes. On considère φ_A l'endomorphisme canoniquement associé à A.

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\overset{\text{WHY}}{\iff} \varphi_A \text{ endo bijectif} \\ &\overset{\text{WHY}}{\iff} \varphi_A \text{ endo injectif} \\ &\overset{\text{WHY}}{\iff} \operatorname{Ker} \varphi_A = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\ &\overset{\text{WHY}}{\iff} \operatorname{Ker} A = \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}\} \end{aligned}$$

36 **Théorème d'inversibilité unilatéral.**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$, alors A est inversible et on a $A^{-1} = B$ (on a alors $BA = I_n$).

- **Rappel du chapitre précédent (épisode 3 d'algèbre linéaire).**

  Proposition. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme avec E de dimension finie.
  Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) f est inversible (c'est-à-dire f est un automorphisme de E)
  (ii) f est inversible à gauche (c'est-à-dire il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$)
  (iii) f est inversible à droite (c'est-à-dire il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$)
  On a alors $g = f^{-1}$.

- **Preuve.**
  Considérons φ_A l'endomorphisme canoniquement associé à A.
  Idem pour φ_B.
  Comme $AB = I$, on a $\varphi_A \circ \varphi_B = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$.
  Donc φ_A est inversible à droite.
  Donc φ_A est un automorphisme et $\varphi_A^{-1} = \varphi_B$.
  Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = B$.

V. Rang d'une matrice

- **Rappel**

  — Soit E un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E. Qu'est-ce que $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_p)$?

  — Soit E, F deux espaces vectoriels avec F de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Qu'est-ce que $\mathrm{rg}(f)$?

- **Question.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. À votre avis, quel est le rang de la *matrice* A?

37 **Définition (rang d'une matrice).**
Le rang d'une matrice rectangulaire est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
Autrement dit, pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

$$\mathrm{rg}(A) \ = \ \mathrm{rg}\Big(\mathrm{Col}_1(A), \dots, \mathrm{Col}_p(A)\Big) \ = \ \dim \mathrm{Vect}\Big(\mathrm{Col}_1(A), \dots, \mathrm{Col}_p(A)\Big)$$

38 **Proposition.** Le rang d'une matrice est le rang de son application linéaire canoniquement associée.

Autrement dit :
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $\varphi_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ son application linéaire canoniquement associée.
Alors

$$\mathrm{rg}(A) \ = \ \mathrm{rg}(\varphi_A)$$

39 **Proposition.**
Le rang d'une application linéaire est le rang de n'importe laquelle de ses matrices.

Autrement dit :
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec E et F de dimension finie que l'on munit de base; disons $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
On a :

$$\mathrm{rg}(f) \ = \ \mathrm{rg}\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\big)$$

40 **Proposition.**

— **Inégalité facile.** Le rang d'une matrice est inférieur à son nombre de colonnes et son nombre de lignes.
Autrement dit, pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{rg}(A) \ \leqslant \ \min\big(p, \, n\big)$$

— **Une autre inégalité.** Soit A, B rectangulaires et multipliables. On a

$$\mathrm{rg}(AB) \ \leqslant \ \min\big(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big)$$

41 **Proposition (théorème du rang pour les matrices).**
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a

$$\text{nb-colonnes}(A) \ = \ \dim\big(\mathrm{Ker}\, A\big) + \mathrm{rg}(A)$$

- **Cas particulier, matrice carrée.**
Une matrice carrée est inversible si et seulement si son rang est maximal (donc égal à sa taille). WHY?
Autrement dit :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{rg}(A) = n$$

Conservation du rang

42 **Proposition (conservation du noyau et de l'image).**
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

— Si $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$.

— Si $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Ker}(PA) = \mathrm{Ker}(A)$.

En français :

— Multiplier une matrice rectangulaire à droite par une matrice inversible conserve son image.

— Multiplier une matrice rectangulaire à gauche par une matrice inversible conserve son noyau.

Conséquence :

— En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son image.

— En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son noyau.

- **Rappel.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

— Si f est un isomorphisme, alors $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.

— Si g est un isomorphisme, alors $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.

En français :

— Composer une application linéaire à droite par un isomorphisme conserve son image.

— Composer une application linéaire à gauche par un isomorphisme conserve son noyau.

43 **Proposition (conservation du rang).**
Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

— Si $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(AQ) = \mathrm{rg}(A)$.

— Si $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(PA) = \mathrm{rg}(A)$.

En français :

— Multiplier une matrice rectangulaire à droite par une matrice inversible conserve son rang.

— Multiplier une matrice rectangulaire à gauche par une matrice inversible conserve son rang.

Conséquence.

— En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son rang.

— En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice rectangulaire, on ne change pas son rang.

- **Rappel.** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

— Si f est un isomorphisme et si g est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini, et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, g$.

— Si g est un isomorphisme et si f est de rang fini, alors $g \circ f$ est de rang fini, et $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}\, f$.

En français :

— Composer une application linéaire à droite par un isomorphisme conserve son rang.

— Composer une application linéaire à gauche par un isomorphisme conserve son rang.

44 **Proposition (en retirant une colonne).**
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— On retire UNE colonne à A et on note $\widehat{A}$ la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathcal{M}_{n,p-1}(\mathbb{K})$. On a

$$\mathrm{rg}(\widehat{A}) = \begin{cases} \mathrm{rg}(A) & \text{si la colonne retirée est CL des autres} \\ \mathrm{rg}(A) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

— En particulier, si $\widehat{A}$ désigne n'importe quelle matrice issue de A privée de certaines de ses colonnes, on a

$$\mathrm{rg}(\widehat{A}) \leqslant \mathrm{rg}(A)$$

Calcul pratique du rang d'une matrice

45 **Proposition (Rang d'une matrice échelonnée).**
Le rang d'une matrice échelonnée est égal à son nombre de pivots.

- **Preuve par l'exemple.**
Traitons le cas des six matrices échelonnées (qui sont même échelonnées réduites) suivantes.

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a \\ 0 & \mathbf{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & e \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & a \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & b \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & c \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad A_6 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & a & 0 & b \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

46 preuve **Proposition.** Le rang d'une matrice rectangulaire est égal au nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite obtenue à la fin de l'algorithme du pivot de Gauss.

47 **Question.** Déterminer le rang de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$.

Rang et sous-matrices

48 preuve **Proposition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de la forme suivante :

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad A = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad \text{où } \widetilde{A} \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K}).$$

Alors $\mathrm{rg}(A) = 1 + \mathrm{rg}(\widetilde{A})$.

Rang de la transposée

49 preuve

Proposition.

— Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.
Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$$

— Le rang d'une matrice est égal au rang de la famille de ses lignes.
Pour $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a
$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\big(\mathrm{Ligne}_1(A), \dots, \mathrm{Ligne}_n(A)\big)$$

50 preuve

Proposition (en retirant une colonne/ligne).
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— On retire UNE colonne à A et on note $\widehat{A}$ la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathscr{M}_{n,p-1}(\mathbb{K})$.
On a
$$\mathrm{rg}(A) - 1 \leqslant \mathrm{rg}(\widehat{A}) \leqslant \mathrm{rg}(A)$$
En particulier, si $\widehat{A}$ désigne n'importe quelle matrice issue de A privée de certaines de ses colonnes, on a
$$\mathrm{rg}(\widehat{A}) \leqslant \mathrm{rg}(A)$$

— On retire UNE ligne à A et on note A' la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathscr{M}_{n-1,p}(\mathbb{K})$.
On a
$$\mathrm{rg}(A) - 1 \leqslant \mathrm{rg}(A') \leqslant \mathrm{rg}(A)$$
En particulier, si A' désigne n'importe quelle matrice issue de A privée de certaines de ses lignes, on a
$$\mathrm{rg}(A') \leqslant \mathrm{rg}(A)$$

— Notons $\widetilde{A}$ une sous-matrice de A (c'est-à-dire obtenue en supprimant certaines lignes et/ou colonnes de A).
Alors
$$\mathrm{rg}(\widetilde{A}) \leqslant \mathrm{rg}(A)$$

VI. Matrices équivalentes et rang (HP)

Attention. Ce paragraphe étant officiellement hors-programme, il faut être capable de redémontrer tous les résultats.

51 **Définition.**
Soit $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$.
On note $J_r^{(n,p)}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ suivante :

$$J_r^{(n,p)} \;=$$

On a évidemment $\operatorname{rg} J_r^{(n,p)} = \ldots\ldots.$

- **Exemples.**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En général, il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille des matrices manipulées. On s'autorise alors à noter simplement J_r au lieu de $J_r^{(n,p)}$.

52 **Proposition.** Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
Il existe une base $\mathscr{B}_E$ de E et une base $\mathscr{B}_F$ de F telles que

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \;=\; J_r \qquad \text{où } r = \ldots$$

53 **Proposition.** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors il existe $(P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ$, où $r = \operatorname{rg}(A)$.

- **Remarque.**
On en déduit qu'il existe $(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tel que $J_r = \widetilde{P} A \widetilde{Q}$.

54 **Proposition (le retour).** Soit $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On a

$$A \text{ et } B \text{ ont même rang} \iff \text{il existe } (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ tel que } A = PBQ$$

55 **Proposition.**
Une matrice et sa transposée ont même rang.

VII. Matrices semblables

Les matrices sont **carrées**.

56 **Définition.**
Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.
On dit que A et B sont *semblables* lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

57 **Proposition.**
La relation « être semblable » est

- réflexive : « une matrice est semblable à elle-même »
- symétrique : « si $B = P^{-1}AP$, alors $A = Q^{-1}BQ$ avec $Q =$ ....
- transitive : « si $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$, alors $C =$ ....

- **Remarque importante.** Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.
Alors l'associativité du produit matriciel donne pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k = (PBP^{-1})^k = \underbrace{(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}_{k \text{ facteurs}} = PB\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_n}B\cdots B\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I_n}BP^{-1} = PB^kP^{-1}.$$

Si B^k est aisée à calculer (par exemple si elle est diagonale), cela offre un moyen efficace de calculer A^k.
Une récurrence permet d'établir rigoureusement $\forall\, k \in \mathbb{N},\ A^k = PB^kP^{-1}$.

58 **Proposition.**
Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, les matrices $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ sont également semblables.

59 **Question.** Montrer que deux matrices semblables ont même rang et même trace.

60 **Proposition.**

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, alors A et B sont semblables.
- Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables, alors il existe un endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{K}^n$ telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. On pose $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables, alors il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

- **À méditer.** C'est comme cela qu'il faut comprendre le fait que deux matrices sont semblables : elles représentent le même endomorphisme dans deux bases « différentes ».

61 **Question.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$. Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que A est semblable à J_r où r est à préciser en fonction de A.

62 **Question.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = I$. Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $D_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que A est semblable à D_r où r est à préciser en fonction de A.

Représentation matricielle des applications linéaires

preuve et éléments de correction

10

Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.
Écrivons $v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e_i$. Comme f est linéaire, on a alors $f(v) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f(e_i)$.

On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(v)\Big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f(e_i)\Big) \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(e_1), \dots, f(e_n)\Big) \times \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \overset{\text{WHY}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(v)$$

15

Prenons une base $\mathscr{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ (ça existe).
Prenons une base $\mathscr{B}_3$ de $\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$ (ça existe).
Comme ces deux noyaux sont supplémentaires dans E, la concaténation des bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ est une base de E, que l'on note $\mathscr{C}$.
Il est alors facile de vérifier que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$ est diagonale (WHY?).
Indication : écrire $\mathscr{B}_2 = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}_3 = (e'_1, \dots, e'_q)$. Notons que $p = \dim \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ et $q = \dim \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$.
Calculer $f(e_i)$ et $f(e'_j)$. Et écrire la matrice dans la base $\Big(e_1, \dots, e_p, e'_1, \dots, e'_q\Big)$.
Remarque. On peut également dire :
Considérons une base $\mathscr{C}$ de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$.

18

Nous allons utiliser à plusieurs reprises la définition 7.
Notons $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$. Rappelons que pour $h \in \mathscr{L}(E, F)$, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(h)$ est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(h(e_j)\big)$.

(i) Montrons l'égalité de matrices

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) + \mu\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)$$

en montrant l'égalité des colonnes.
Fixons $j \in [\![1, n]\!]$. Et montrons l'égalité

$$\mathrm{Col}_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(\lambda f + \mu g)\Big) = \mathrm{Col}_j\Big(\lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f) + \mu\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)\Big)$$

• Le membre gauche vaut d'après la définition 7 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big((\lambda f + \mu g)(e_j)\Big)$$

c'est-à-dire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(\lambda f(e_j) + \mu g(e_j)\Big)$, puis par opérations sur les colonnes de vecteurs (confer 4), vaut $\lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(e_j)\Big) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(g(e_j)\Big)$.

• Le membre droit vaut par opérations sur les matrices $\lambda \mathrm{Col}_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)\Big) + \mu \mathrm{Col}_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(g)\Big)$, donc vaut (d'après la définition 7) $\lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(e_j)\Big) + \mu \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(g(e_j)\Big)$.

(ii) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrons l'égalité de matrices

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f) \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$$

Fixons $j \in [\![1,n]\!]$. Et montrons l'égalité

$$\mathrm{Col}_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g\circ f)\Big) \;=\; \mathrm{Col}_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\Big)$$

• Le membre gauche vaut d'après la définition 7 :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}\Big((g\circ f)(e_j)\Big)$$

c'est-à-dire $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_G}\Big(g\big(f(e_j)\big)\Big)$, c'est-à-dire d'après 10, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_j)\big)$,

• Le membre droit $\mathrm{Col}_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\Big)$ vaut d'après le chapitre Matrices (rappel $\mathrm{Col}_j(AB) = A\mathrm{Col}_j(B)$),

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\times \mathrm{Col}_j\Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\Big)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(e_j)\big)$$

(iii) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^k) \;=\; \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\Big)^k$$

La preuve a lieu par récurrence sur k en utilisant (ii).

19

Calculons f^2 et vérifions si cet endomorphisme vaut f.
Pour cela, raisonnons matriciellement, c'est-à-dire, utilisons l'équivalence (qui provient du fait que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des endomorphismes et l'espace vectoriel des matrices carrées) :

$$f^2 = f \quad\iff\quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

On a

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Après calculs, on a $A^2 = A$, donc $f^2 = f$ donc f est un projecteur.

20

Montrons que l'application

$$\begin{array}{rccc}\Phi: & \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\\ & f & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\end{array}$$

est un isomorphisme.

— Montrons que Φ est une application linéaire.
Cela résulte de 18-i).

— Montrons que Φ est injective.
Soit $f \in \operatorname{Ker}\Phi$.
Alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ est la matrice nulle.
Donc

$$\forall\, j \in [\![1,\dim E]\!], \qquad f(e_j) \;=\; \sum_{i=1}^{\dim F} 0 e'_i$$

Donc f est l'application linéaire nulle.

— Montrons que Φ est surjective.
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Considérons l'unique application linéaire $f : E \to F$ vérifiant

$$\forall\, j \in [\![1,\dim E]\!], \qquad f(e_j) \;=\; \sum_{i=1}^{\dim F} a_{i,j} e'_i$$

Par construction, on a alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = A$, c'est-à-dire $\Phi(f) = A$.

23

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme.
Montrons que $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ est inversible et que $A^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1})$.

Comme f est un isomorphisme, il existe $g \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Appliquons l'opérateur Mat. On obtient (WHY?)

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \;=\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(\mathrm{id}_E) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) \;=\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_F}(\mathrm{id}_F)$$

d'où en posant $B = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g)$, on a

$$BA = I \qquad \text{et} \qquad AB = I$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = B$, ce qui se réécrit (car $g = f^{-1}$)

$$\left(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\right)^{-1} \;=\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(f^{-1})$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ est inversible.
Montrons que f est un isomorphisme.

Comme A est inversible, il existe B tel que

$$BA = I \qquad \text{et} \qquad AB = I$$

Posons $g \in \mathscr{L}(F,E)$ l'unique application linéaire telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) = B$ (licite d'après 20).
Les deux égalités se réécrivent :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \;=\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(\mathrm{id}_E) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) \;=\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_F}(\mathrm{id}_F)$$

On obtient (WHY?)

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(g \circ f) \;=\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_E}(\mathrm{id}_E) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_F}(f \circ g) \;=\; \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_F}(\mathrm{id}_F)$$

D'où (WHY?)

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

27

Calculer le produit $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$ en interprétant la matrice de passage comme la matrice de l'application linéaire id_E dans des bonnes bases.

28

En effet, si l'on considère $\mathscr{B}'$ la famille dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A (i.e. la famille dont le $j^{\text{ème}}$ vecteur a pour coordonnées dans $\mathscr{B}$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A), alors $\mathscr{B}'$ est une base de E car A est inversible, et l'on a $A = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.

30

Il faut surtout retenir la preuve de cette proposition, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) \quad = \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}(\mathrm{id}_F)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}(\mathrm{id}_E)$$

accompagné du diagramme :

31

Il faut surtout retenir la preuve de cette proposition, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \;=\; \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_E)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$$

accompagné du diagramme :

32

Déterminer une base $\mathscr{B}_I$ de $\mathrm{Im}\, f$, puis une base $\mathscr{B}_K$ de $\mathrm{Ker}\, f$.

$$\mathrm{Im}\, f \;=\; \mathrm{Vect}\Big((0,-1,-1),(1,2,1),(-1,-1,0)\Big) \;=\; \mathrm{Vect}\Big((0,-1,-1),(1,2,1)\Big)$$

La dernière égalité étant due au fait que la somme des trois vecteurs est le vecteur nul, donc le troisième vecteur est l'opposé de la somme des deux premiers.

Remarque. Matriciellement, cette dernière phrase dit que $\mathrm{Col}_1+\mathrm{Col}_2+\mathrm{Col}_3 = 0$, donc $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

Ainsi $(1,1,1)$ est dans le noyau de f.

Déterminons une base de $\mathrm{Ker}\, f$.
Échelonnons A.

On trouve

$$A^{\text{éch}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f &\iff A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff A^{\text{éch}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
&\iff (x,y,z) \in \operatorname{Vect}\Big((1,1,1)\Big)
\end{aligned}$$

Posons $\mathscr{C} = \mathscr{B}_I \vee \mathscr{B}_K$.
Comme $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ (car f projecteur), on en déduit que $\mathscr{C}$ est une base.
Et on a

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

46

On a vu qu'en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, on ne change pas son rang.

48

Par définition d'une matrice échelonnée, on a :

$$A^{\text{éch}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & \star & \cdots & \star \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \widetilde{A}^{\text{éch}} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Comme $\text{nb-pivots}(A^{\text{éch}}) = 1 + \text{nb-pivots}(\widetilde{A}^{\text{éch}})$, on a $\operatorname{rg}(A^{\text{éch}}) = 1 + \operatorname{rg}(\widetilde{A}^{\text{éch}})$.
D'après la proposition 46, on en déduit $\operatorname{rg}(A) = 1 + \operatorname{rg}(\widetilde{A})$.

49

— Tout d'abord, on constate (c'est bien un constat!) que le théorème est vrai pour une matrice échelonnée. Autrement dit

$$\mathrm{rg}(A^{\text{éch}}) = \mathrm{rg}\left({A^{\text{éch}}}^\top\right)$$

Ensuite, on utilise que le rang est invariant par multiplication par une matrice inversible.
Par construction d'une matrice échelonnée, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $PA = A^{\text{éch}}$.
Donc ${A^{\text{éch}}}^\top = A^\top P^\top$.
On a

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{rg}(A) & = & \mathrm{rg}(PA) & \\ & = & \mathrm{rg}(A^{\text{éch}}) & \\ & = & \mathrm{rg}({A^{\text{éch}}}^\top) & \text{le constat} \\ & = & \mathrm{rg}(A^\top P^\top) & \\ & = & \mathrm{rg}(A^\top) & \text{car } P^\top \text{ est inversible} \end{array}$$

— On a

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{rg}(A) & = & \mathrm{rg}(A^\top) & \text{point précédent} \\ & = & \mathrm{rg}\big(\mathrm{Col}_1(A^\top),\dots,\mathrm{Col}_n(A^\top)\big) & \text{définition du rang} \\ & = & \mathrm{rg}\big(\mathrm{Ligne}_1(A),\dots,\mathrm{Ligne}_n(A)\big) & \end{array}$$

50

— Supposons que l'on retire la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.
On a

$$\mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_p) = \begin{cases} \mathrm{Vect}(C_1,\dots,\cancel{C_j},\dots,C_n) & \text{si } C_j \;\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{Vect}(C_j) \bigoplus \mathrm{Vect}(C_1,\dots,\cancel{C_j},\dots,C_n) & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où en prenant la dimension :

$$\mathrm{rg}(A) = \begin{cases} \mathrm{rg}(\widehat{A}) & \text{si } \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 + \mathrm{rg}(\widehat{A}) & \text{sinon} \end{cases}$$

—