Représentation matricielle des applications linéaires

exercices

101 Matrice d'une famille de matrices

Écrire dans la base canonique $(E_{ij})_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice de la famille $(E_{ij}+I)_{i,j}$.

L'énoncé est volontairement vague.

102 Un nilpotent chez les polynômes

Soit $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image de M, ainsi qu'une base du noyau.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.
3. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_3[X] \\ P & \longmapsto & -3XP(X) + X^2P'(X) \end{array}$
   Montrer que f est un endomorphisme de E.
   Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.
   Sans aucun calcul, déterminer une base de l'image et du noyau de f.

103 Une symétrie chez les polynômes

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. On considère l'endomorphisme $\varphi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & P(1-X) \end{array}$.

1. Avec un théorème de cours, montrer sans effort que $E = \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que φ induit un endomorphisme φ_n sur $E_n = \mathbb{K}_n[X]$.
3. Écrire la matrice M_n de φ_n dans la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$.

Désormais, on enlève les « indices n », donc on note φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}_n[X]$.
On note M la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$.
Enfin, on prend $\boxed{n = 2}$.

4. Déterminer $\operatorname{rg}(\varphi - \mathrm{id}_E)$.
   En déduire, sans calcul ou presque, $\dim\Big(\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)\Big)$ et $\dim\Big(\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)\Big)$.
5. Sans effort, montrer que M est semblable à $M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
6. Expliciter une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M'$.
   Et enfin, expliciter la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$.
   Quelle relation matricielle relie les matrices M' et M ?

Recommencer l'exercice pour $n = 3$.

104 L'effet « Vache qui rit »

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme suivant (que l'on notera f)

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Déterminer $f(E_{21})$ où $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. Donner la matrice de l'endomorphisme f dans la base $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$.
3. Même question dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
4. Déterminer le rang de l'endomorphisme f. Bonus : l'exprimer en fonction de A.

105 Autour de la trace

1. Montrer que $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP)$.
2. Expliquer comment on peut définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie.
3. Soit E dimension finie et p un projecteur de E. Montrer que $\operatorname{tr}(p) = \operatorname{rg}(p)$.

Matrices particulières et similitude

106 **Formes spéciales de matrices**

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et on calcule $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Déterminer quelles propriétés de f traduisent le fait que M présente les formes suivantes (quand une matrice est présentée « par blocs »), il sera toujours sous-entendu que le premier « paquet » de lignes (resp. de colonnes) est composé de r lignes (resp. colonnes).

(i) $M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

(ii) $M = I_n$

(iii) $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

(iv) $\mathrm{rg}\, M = r$

(v) $M = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{array}\right)$

(vi) $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$

(vii) $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$

(viii) $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$.

107 **Matrice de projecteur**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = A$.

Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que A est semblable à J_r où r est à préciser en fonction de A.

108 **Symétrie**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = I$.

Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on note $D_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que A est semblable à D_r où r est à préciser en fonction de A.

109 **Commutant d'une matrice nilpotente d'indice maximal**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.

1. Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que la famille $\left(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0\right)$ soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que A est semblable à

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Notons $\mathscr{C}(B)$ l'ensemble (sev de...) des matrices qui commutent avec une matrice B.
Montrer que $\mathscr{C}(\widetilde{A}) = \mathrm{Vect}(I, \widetilde{A}, \dots, \widetilde{A}^{n-1})$ et en déduire une base de $\mathscr{C}(A)$.

Interpréter/Traduire avec des matrices !

110 La matrice de Vandermonde

Soit α, β, γ trois scalaires *distincts* et :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

Montrer sans aucun calcul que V est inversible.

Interpréter V comme la matrice dans les bases canoniques d'une certaine application linéaire $\varphi : \mathbb{K}_2[X] \to \mathbb{K}^3$

Énoncer un résultat général en remplaçant 3 par n.

111 La formule d'inversion de Pascal

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de scalaires. On suppose que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

1. Trouver une matrice $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} M$$

   On fera un dessin de M. Que vaut le coefficient $m_{i,j}$ de M pour $i, j \in [\![0, n]\!]$.
2. Sans aucun calcul, montrer que M est inversible et déterminer son inverse (on pourra faire intervenir un bon endomorphisme).
3. Déduire des questions précédentes une expression de a_n en fonction des b_k.

112 Le retour

Voici un exercice déjà traité dans le chapitre Polynômes :

> *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ que l'on explicitera avec ses coefficients tel que $P_n - P_n' = X^n$.*

Expliquer comment traiter cet exercice avec le chapitre actuel.

113 Pot pourri

1. Soit $D : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$ l'opérateur de dérivation.

   Écrire la matrice M de D dans la base canonique.
   Sans calcul, montrer que $M^{n+1} = 0$.
2. Considérons l'endomorphisme $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array}$.

   Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

Rang d'une matrice

114 **Déjà vu**

Déterminer la dimension des espaces vectoriels suivants :

(i) $\text{Vect}\Big((1,2,3,4),(5,6,7,8),(9,10,11,12),(13,14,15,16)\Big)$

(ii) $\Big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0 \;\text{ et }\; y+3z+3t=0\Big\}$

(iii) $\text{Vect}\Big(X^2+X+1,\ X^2+2X+4,\ X^2+3X+9\Big)$

115 **De tête**

Déterminer sans calcul le noyau et l'image des applications linéaires canoniquement associées aux matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad\text{et}\quad \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}.$$

116 **Rang de la matrice de Vandermonde**

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{K}$.
Soit

$$V=\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

Déterminer le rang de V.

On pourra fournir deux preuves différentes. Une en s'aidant de l'exercice 119, l'autre de l'exercice 110.

117 **Rang et trace**

Montrer que deux matrices semblables ont même rang et même trace.

118 **En soustrayant une homothétie, ...**

Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables.
Montrer que pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, les matrices $A-\lambda I$ et $B-\lambda I$ ont même rang.

119 **Sous-matrice inversible de taille maximale**

Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Montrer que le rang de A est la taille maximale des sous-matrices de A inversibles :

$$\text{rg}(A) \;=\; \max\Big\{t\in\mathbb{N}\mid \widetilde{A}\text{ sous-matrice de }A\text{ inversible de taille }t\Big\}$$

120 **Autour du rang 1**

1. Soit $K\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une colonne et $L\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ une ligne.
   On pose $A=KL$.
   Montrer que $\text{rg}\,A\leqslant 1$.
   Montrer que si A est de rang 1, alors K et L sont de rang 1.
   Montrer que si K et L sont de rang 1, alors A est de rang 1.
2. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.
   Montrer qu'il existe $(K,L)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ tel que $A=KL$.
   Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $A^2=\lambda A$, puis montrer que $\lambda=\text{tr}\,A$.

121 Again

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $AB = 0$ et $A + B$ est inversible.
Montrer que $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$.

122 Matrices par blocs

Soit M la matrice diagonale par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_s \end{bmatrix}.$$

où chaque A_i est carrée de taille t_i.
Déterminer le rang de M en fonction des $r_i = \mathrm{rg}(A_i)$.
Traiter le cas où toutes les matrices A_i sont égales à une matrice A carrée de taille n.

123 Rang d'un endomorphisme

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme suivant (que l'on notera f)

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

Déterminer le rang de l'endomorphisme f.

Vers la réduction des endomorphismes

124 On est en Piston 3

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.
   Il y en a combien ?
   Que vaut la somme (visuellement infinie !) :
   $$\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} \dim \mathrm{Ker}(A - \alpha I)$$
2. Donner une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ pour les λ précédents.
3. On note $\mathcal{C}$ la concaténation de toutes ces bases $\mathcal{B}_\lambda$. Que dire de $\mathcal{C}$?
4. Montrer que A est semblable à $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

125 Un endomorphisme diagonalisable

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. On a $A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Donner le rang des matrices $A - I$, $A - 2I$ et $A - 3I$.
   Puis donner une base de $\mathrm{Ker}(A - I)$, $\mathrm{Ker}(A - 2I)$ et $\mathrm{Ker}(A - 3I)$.
2. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \longmapsto & (X+2)P'(X) + P(X-1) \end{array}$
   Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ (que ne faut-il pas oublier dans cette vérification ?). Puis écrire sa matrice dans la base canonique.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Pour la culture (spé), on dit que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Attention, un endomorphisme quelconque n'est pas forcément diagonalisable.

126 Une matrice trigonalisable

1. Soit $T = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu \end{array}\right]$ où λ et μ sont distincts.
   On considère l'endomorphisme canoniquement associé à T que l'on note f.
   On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.
   Donner la dimension de $\operatorname{Ker}(f - \lambda\mathrm{id})$, $\operatorname{Ker}(f - \lambda\mathrm{id})^2$ et $\operatorname{Ker}(f - \mu\mathrm{id})$, ainsi qu'une base.
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$. Montrer que A est semblable à T où $\lambda = -1$ et $\mu = 2$.

127 Le lemme des noyaux (cas particulier)

Pour l'instant, E n'est pas supposé de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que $X^2U + (X-2)V = 1$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(f^2)$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$ sont en somme directe.
3. Ici, on suppose que $P = X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur de f.
   Montrer que
   $$E = \operatorname{Ker}(f^2) + \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$$
4. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$. Montrer que A est semblable à $T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$.

On pourra calculer $\operatorname{rg}(A^2)$ et $\operatorname{rg}(A - 2I)$.

128 Trigonalisation et racine carrée

Soit f l'endomorphisme de $E = \mathbb{K}^3$ dont la matrice dans la base canonique de E est :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Après calculs, on a

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

1. Rappeler les grandes lignes de la démonstration de l'égalité $E = \operatorname{Ker}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.
2. Montrer, sans vouloir l'exhiber, qu'il existe un vecteur v appartenant à $\operatorname{Ker}(f^2)$ mais n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} f$. Montrer que $(f(v), v)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f^2)$.
3. Montrer que A est semblable à $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
4. On veut montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = f$.
   On suppose pour cela qu'un tel endomorphisme existe.
   Établir que $\operatorname{Ker}(f^2)$ est stable par g, puis montrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de E telle que
   $$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(g) = \begin{bmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c'' \end{bmatrix}$$
   En utilisant la matrice de f dans cette même base $\mathcal{C}$, trouver une contradiction et conclure.

129 Étude matricielle de la lettre C

On considère la matrice $\mathbf{C} \in \mathcal{M}_7(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à C.

1. Donner le rang de φ, puis une base de $\operatorname{Ker} \varphi$.
2. Montrer que $W = \operatorname{Im} \varphi$ est stable par φ.
   Montrer que φ induit un endomorphisme sur $\operatorname{Im} \varphi$, que l'on notera $\widetilde{\varphi}$.
3. Écrire la matrice de $\widetilde{\varphi}$ dans la base canonique, que l'on notera $\widetilde{\mathbf{C}}$.
4. Montrer que $\widetilde{\mathbf{C}}$ est semblable à $\widetilde{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\mathbf{2}} \end{bmatrix}$.
5. On peut montrer que $X^4 - X^3 - 2X^2 + 2X$ est un polynôme annulateur de $\mathbf{C}$, donc de φ.
   En déduire que
   $$E \;=\; \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$$
6. Montrer que $\mathbf{C}$ est semblable à

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\mathbf{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

130 Un exo de khôlle amusant !

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} B$.
Montrer que A et B sont semblables.

131 Redécouverte du produit matriciel !

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Il est facile de montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
Considérons $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Par un argument matriciel, montrer explicitement que :

$$\forall j \in [\![1, q]\!],\ \operatorname{Col}_j(AB) \subset \operatorname{Vect}\big(\operatorname{Col}_1(A), \dots, \operatorname{Col}_p(A)\big)$$

En déduire que $\operatorname{Im}(AB) \subset \operatorname{Im} A$.

132 **Lemme des noyaux (cas général avec 2 noyaux)**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires distincts.

1. Soit $\delta \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que $X^p U + (X - \delta)^q V = 1$.
   Utiliser la formule de Bernoulli.
2. En déduire qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ deux polynômes tels que $(X-\alpha)^p U + (X-\beta)^q V = 1$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\Big((f - \alpha\,\mathrm{id})^p\Big)$ et $\mathrm{Ker}\Big((f - \beta\,\mathrm{id})^q\Big)$ sont en somme directe.
4. Ici, on suppose que $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est un polynôme annulateur de f.
   Montrer que
   $$E \;=\; \mathrm{Ker}\Big((f - \alpha\,\mathrm{id})^p\Big) \;\oplus\; \mathrm{Ker}\Big((f - \beta\,\mathrm{id})^q\Big)$$
5. Traiter la réciproque :
   Si $E = \mathrm{Ker}\Big((f - \alpha\,\mathrm{id})^p\Big) \oplus \mathrm{Ker}\Big((f - \beta\,\mathrm{id})^q\Big)$, alors $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est un polynôme annulateur de f.
6. Rappeler pourquoi, pour un endomorphisme φ, on a la chaîne d'inclusion :
   $$\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(\varphi^k)$$
   Quand la dimension de E est finie, on a vu lors d'un exercice de TD que cette chaîne de noyaux itérés stagne.
7. Ici, on suppose que E est de dimension finie, donc f admet un polynôme annulateur (rappeler la preuve).
   On suppose que ce polynôme annulateur précis admet deux racines distinctes α et β.
   On suppose que $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est le polynôme minimal de f.
   Essayer de comprendre pourquoi p et q sont les indices de stagnation :
   $$\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^p = \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^{p+1}$$
   $$\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id})^q = \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id})^{q+1}$$
   On rappelle que
   $$\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}\Big((f - \alpha\,\mathrm{id})^i\Big) \text{ et } \mathrm{Ker}\Big((f - \beta\,\mathrm{id})^j\Big) \text{ sont en somme directe}$$
8. Ici, on suppose que E est de dimension finie, donc f admet un polynôme annulateur (rappeler la preuve).
   Parmi ces polynômes, on peut également considérer *le* polynôme minimal de f (à votre avis, quelle est la définition de cette notion ?).
   On suppose que $(X-\alpha)^p(X-\beta)^q$ est le polynôme minimal de f.
   Essayer de comprendre pourquoi p et q sont les indices de stagnation :
   $$\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^p = \mathrm{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id})^{p+1}$$
   $$\{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id}) \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id})^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id})^q = \mathrm{Ker}(f - \beta\,\mathrm{id})^{q+1}$$
   On rappelle que
   $$\forall\, i, j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Ker}\Big((f - \alpha\,\mathrm{id})^i\Big) \text{ et } \mathrm{Ker}\Big((f - \beta\,\mathrm{id})^j\Big) \text{ sont en somme directe}$$

Représentation matricielle des applications linéaires

corrigés

1. On a
$$\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(\underbrace{C_1, C_2, C_3}_{\text{famille libre}}) \qquad \text{donc } \operatorname{rg}(M) = 3$$
D'après le théorème du rang, on a $\dim \operatorname{Ker} M = 1$.

De plus, $E_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ est dans $\operatorname{Ker} M$. Donc (E_4) est une famille libre de $\operatorname{Ker} M$.

Comme elle est de bon cardinal, c'est une base de $\operatorname{Ker} M$.

2. On a
$$M^2 = M \times M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
puis
$$M^3 = M \times M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
puis
$$M^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Pour $n \geqslant 4$, on a $M^n = M^{n-4} \times M^4 = M^{n-4} \times 0 = 0$.

3. • Linéarité : à vous.
• Montrons que l'image de f est incluse dans $\mathbb{K}_3[X]$.
Fixons $P \in \mathbb{K}_3[X]$, c'est-à-dire $\deg P \leqslant 3$ et examinons le degré de $f(P)$.
Il est clair que $\deg f(P) \leqslant 4$.
Reste à vérifier que le terme en X^4 de $f(P)$ est nul.
En notant a le coefficient en X^3 de P, le terme en X^4 de $f(P) = -3XP(X) + X^2P'(X)$ vaut
$$-3X \times (aX^3) + X^2 \times (3aX^2)$$
donc est nul.
• **Matrice dans la base canonique.** On a
$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(1) & = & -3X \\ f(X) & = & -2X^2 \\ f(X^2) & = & -X^3 \\ f(X^3) & = & 0 \end{array} \right. \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Une base de $\operatorname{Im}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f)\right)$ est la famille $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ donc

une base de $\operatorname{Im} f$ est la famille $(-3X, -2X^2, -X^3)$.

• Une base de $\operatorname{Ker}\left(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{cano}}}(f)\right)$ est la famille $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ donc

une base de $\operatorname{Ker} f$ est la famille (X^3).

Des précisions pour ceux qui veulent. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$ que l'on écrit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.
On a les équivalences suivantes :
$$P \in \operatorname{Ker} f \iff \begin{bmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \iff P \in \operatorname{Vect}(X^3)$$

1. L'endomorphisme φ est une symétrie (involution), c'est-à-dire vérifie $\varphi^2 = \mathrm{id}$.
(Pour la culture, $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est **un** polynôme annulateur de φ).
D'après le cours, on sait que l'on a

$$E = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$$

Pouvez-vous rappeler l'idée de la preuve ?

Il s'agit d'une Analyse-Synthèse. On note $F = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$.
On fixe un vecteur de E, ici on fixe $P \in E$.
Montrons qu'il existe un unique couple $(P_F, P_G) \in F \times G$ tel que $P = P_F + P_G$.

Analyse. On suppose qu'il existe $P_F, P_G \in E$ tels que $\begin{cases} P_F \in F \\ P_G \in G \\ P = P_F + P_G \end{cases}$.

En appliquant φ à la première égalité, on obtient la seconde, d'où :

$$\begin{cases} P(X) &= P_F(X) + P_G(X) \\ P(1-X) &= P_F(1-X) + P_G(1-X) \end{cases}$$

En tenant compte des appartenances ($P_F \in F$ et $P_G \in G$), la deuxième égalité s'écrit différemment, d'où :

$$\begin{cases} P(X) &= P_F(X) + P_G(X) \\ P(1-X) &= P_F(X) - P_G(X) \end{cases}$$

Par somme et différence, on obtient ;

$$\begin{cases} P_F = \dfrac{P(X) + P(1-X)}{2} \\ P_G = \dfrac{P(X) - P(1-X)}{2} \end{cases}$$

Synthèse. On pose P_F et P_G comme ci-dessus et on vérifie les trois points.

2. — L'application φ_n est linéaire, par héritage (car φ est un endomorphisme donc linéaire !).
   — Montrons que φ_n envoie $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}_n[X]$.
   Pour cela, prenons un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et montrons que $\varphi(P) \in \mathbb{K}_n[X]$.
   Comme φ_n est linéaire, il suffit de vérifier cette appartenance pour chaque polynôme de la base canonique.
   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Montrons que $\varphi_n(X^k) \in \mathbb{K}_n[X]$.
   On a $\varphi_n(X^k) = (1-X)^k$ qui est un polynôme de degré $\leqslant k$ (en fait de degré k exactement), donc est de degré $\leqslant n$.

3. D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_n(X^j) &= (1-X)^j \\ &= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} 1^{j-i}(-X)^i \\ &= \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} X^i \\ &= \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} X^i \quad + \quad \sum_{i=j+1}^{n} 0\, X^i \end{aligned}$$

Ainsi, en indexant les lignes (et colonnes) la matrice par $[\![0, n]\!]$ (comme Python d'ailleurs), on obtient

$$\forall\, i, j \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(M_n) = \begin{cases} (-1)^i \dbinom{j}{i} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire sans disjonction de cas grâce à la convention sur le coefficient binomial :

$$\forall\, i, j \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(M_n) = (-1)^i \binom{j}{i}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, avec une diagonale ayant des 1 et des -1, en alternance (précisément, le coefficient en haut à gauche vaut 1 et celui en bas à droite vaut $(-1)^n$).

Les signes $-$ se trouvent sur les lignes indexées par un entier impair (la première ligne étant indexée par 0)

Remarque. Si l'on veut indexer les lignes (et colonnes) par $[\![1, n+1]\!]$, on a

$$\forall\, k, \ell \in [\![1, n+1]\!], \quad \mathrm{coeff}_{k,\ell}(M_n) \;=\; (-1)^{k-1}\binom{\ell-1}{k-1}$$

4. Dans le cas où $n = 2$, la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ peut se déduire du cas général (en prenant donc $n = 2$). Cela va peut-être plus vite de la redéterminer à la main. On a

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(X) = 1 - X, \qquad \varphi(X^2) = 1 - 2X + X^2$$

donc la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ vaut

$$M \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E) = M - I \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Le rang de la matrice $M - I$ vaut 1 donc $\mathrm{rg}(\varphi - \mathrm{id}_E) = 1$.

D'après le théorème du rang, on a donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)\big) = 2$.

Puis avec la décomposition de $E = \mathbb{K}_2[X]$, on a $\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)\big) = 1$.

5. Pour montrer que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est semblable à M', on va montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Considérons une base $\mathcal{B}'$ de E adaptée à la décomposition

$$E \;=\; \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$$

Ainsi, grâce aux dimensions déterminées précédemment, $\mathcal{B}'$ est du type

$$\mathcal{B}' \;=\; \underbrace{(e'_1, e'_2)}_{\substack{\text{base de} \\ \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)}} \;\vee\; \underbrace{(e'_3)}_{\substack{\text{base de} \\ \mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)}}$$

D'où

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) \;=\; \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} \varphi(e'_1) & \varphi(e'_2) & \varphi(e'_3) \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array} \end{array}$$

Remarque. Ne pas oublier que les e'_i sont des polynômes ! On a montré leur existence, mais on ne les a pas encore explicités (par ailleurs, il n'y a pas unicité).

6. Explicitons une base de $\mathrm{Ker}(M - I)$ et de $\mathrm{Ker}(M + I)$.

On en déduira une base de $\mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$ et ceci « en réincarnant des colonnes en polynômes ! ».

On a

$$M \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M - I \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M + I \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(M - I) \qquad \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(M + I)$$

Pour des raisons de dimension,

$$\text{une base de } \mathrm{Ker}(M - I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{une base de } \mathrm{Ker}(M+I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}\right)$$

Donc

$$\text{une base de } \mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id}_E) \text{ est } \Big(1,\ X^2-X\Big)$$

$$\text{une base de } \mathrm{Ker}(\varphi+\mathrm{id}_E) \text{ est } \Big(-2X+1\Big)$$

Ainsi,

$$\text{une base de } E=\mathbb{K}_2[X] \text{ est } \mathcal{B}'=\Big(1,\ X^2-X,\ -2X+1\Big)$$

On peut « faire un peu de ménage » (prendre des coefficients dominants positifs par exemple), et on pose

$$\boxed{\mathcal{B}'=\Big(1,\ X^2-X,\ 2X-1\Big)}$$

D'après la formule de changement de bases pour un endomorphisme, on a

$$M'=\Omega^{-1}M\Omega \qquad \text{avec } \Omega=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$$

Avec notre base $\mathcal{B}'=\Big(1, X^2-X,\ 2X-1\Big)$, on a :

$$\Omega=P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \;=\; \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Pour le fun. On peut s'amuser à vérifier que la formule de changement de bases est vraie ! Un calcul matriciel montre que $\Omega M'=M\Omega$, donc c'est tout bon !

7. On a $\varphi(1)=1$, $\varphi(X)=1-X$, $\varphi(X^2)=1-2X+X^2$, $\varphi(X^3)=1-3X+3X^2-X^3$. Donc la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ vaut

$$M \;=\; \begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&3\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$M-I \;=\; \begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&-2&-2&-3\\0&0&0&3\\0&0&0&-2\end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad M+I \;=\; \begin{bmatrix}2&1&1&1\\0&0&-2&-3\\0&0&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

On arrive encore à lire à l'œil nu le rang de chacune de ces matrices, donc on doit pouvoir trouver une base du noyau également à l'œil nu.

Remarque. Si le rang ne se lit pas à l'œil nu, on peut échelonner la matrice ce qui ne change pas son rang et surtout, si l'on échelonne **en ligne**, on ne change pas le noyau ! Donc on pourra trouver rapidement une base du noyau.
A gauche, voilà les opérations élémentaires effectuées

$$L_2\leftarrow L_2+2L_1,\ \ L_2\leftarrow -L_2,\ \ L_3\leftarrow L_3-3L_2,\ \ L_4\leftarrow L_4+2L_2,\ \ L_1\leftarrow L_1-L_2$$

A droite, voilà les opérations élémentaires effectuées

$$L_2\leftarrow -L_2,\quad L_3\leftarrow L_3-L_2,\ \ L_1\leftarrow L_1-\tfrac{1}{2}L_2,\ \ L_1\leftarrow \tfrac{1}{2}L_1,\ \ L_2\leftarrow \tfrac{1}{2}L_2$$

Cela conduit aux deux matrices échelonnées (ayant chacune deux pivots, donc chacune de rang 2)

$$(M-I)^{\text{éch.}} \;=\; \begin{bmatrix}0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&\boxed{1}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad (M+I)^{\text{éch.}} \;=\; \begin{bmatrix}\boxed{1}&\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{4}\\0&0&\boxed{1}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Pour des raisons de dimension,

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(M-I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(M+I) \text{ est } \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \text{ ou encore } \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

Rappel. Pour une matrice rectangulaire A, on a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^{\text{éch}}$. En effet, effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible P, ainsi, $A^{\text{éch}} = PA$ pour une certaine matrice inversible P. Or $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(PA)$ car P est inversible.

Il s'agit maintenant de réincarner les colonnes en polynômes.
D'après l'étude matricielle,

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E) \text{ est } \Big(1,\ X^2 - X\Big)$$

$$\text{une base de } \operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E) \text{ est } \Big(2X-1,\ 4X^3 - 6X^2 + 1\Big)$$

Pour le fun. On peut s'amuser à faire une petite vérification.

— Les polynômes de $\operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id}_E)$ sont invariants par « X donne $1-X$ ». Il y a intérêt à ce que ce soit le cas pour les deux polynômes fournis.
  Le polynôme constant $1 = X^0$ a pour image par φ le polynôme $(1-X)^0$ qui vaut 1. Donc 1 est invariant par φ.
  Le polynôme $-X + X^2 = X(X-1)$ a pour image par φ le polynôme $(1-X)(1-X-1)$ qui vaut $-(1-X)X = X(X-1)$. Donc $-X+X^2$ est invariant par φ.

— Les polynômes de $\operatorname{Ker}(\varphi + \mathrm{id}_E)$ sont transformés en leur opposé en appliquant φ.
  Il y a intérêt à ce que ce soit le cas pour les deux polynômes fournis.
  Le polynôme $2X-1$ a pour image par φ le polynôme $2(1-X)-1$ qui vaut $-(2X-1)$. C'est bon !
  Le polynôme $1 - 6X^2 + 4X^3$ a pour image par φ le polynôme $1 - 6(1-X)^2 + 4(1-X)^3$ qui vaut $-1 + 6X^2 - 4X^3 = -(1 - 6X^2 + 4X^3)$. C'est bon !

(i) On a $M = 0_n$ si et seulement si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
En effet, dire que $M = 0_n$ revient à dire que $\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = 0_E$.
Il est clair que cette condition est vraie pour l'endomorphisme nul.
Réciproquement, si f vérifie cette condition, il coïncide avec l'endomorphisme nul sur la base $\mathscr{B}$, donc il lui est égal par prolongement des identités.

(ii) On a $M = I_n$ si et seulement si $f = \mathrm{id}_E$.
En effet, dire que $M = I_n$ revient à dire que $\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) = e_j$ donc $f = \mathrm{id}_E$.

(iii) On a $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si f est un automorphisme. (C'est une propriété du cours).

(iv) On a $\operatorname{rg} M = r$ si et seulement si $\operatorname{rg} f = r$. (C'est une propriété du cours).
Notons que cette question généralise les première et troisième questions. La première correspond au cas $r = 0$ et la troisième au cas $r = n$.

(v) Étant donné un vecteur $y \in E$, dire que les r premiers coefficients de sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$ sont nuls signifie que dans sa décomposition

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i,$$

les r premiers coefficients sont nuls $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.
C'est donc équivalent à l'appartenance $y \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$.
Ainsi, dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1, n]\!], f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$.
Puisque $\operatorname{Im} f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, cette condition est donc équivalente à l'inclusion

$$\operatorname{Im} f \subset \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$$

(vi) Dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1, r]\!], f(e_j) = 0_E$. Par stabilité par combinaison linéaire, c'est donc équivalent à l'inclusion

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r) \subset \operatorname{Ker} f.$$

(vii) En reprenant le raisonnement exposé au début de la question (v), on voit que dire que M est de la forme de l'énoncé signifie que $\forall j \in [\![1, r]\!], f(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$.
On voit facilement (par linéarité de f, et par stabilité par combinaison linéaire de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$) que cela est équivalent à la condition

$$\forall\, x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r),\ \ f(x) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$$

que l'on peut redire de manière plus concise sous la forme

$$f\,[\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)] \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r).$$

On dit alors naturellement que $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ est *stable par* f.

(viii) Exactement comme dans la question précédente, on voit que M est de la forme de l'énoncé si et seulement si les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_r)$ et $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ sont tous les deux stables sous f.
(En particulier, dans ce cas, E se décompose en somme directe de deux sous-espaces stables par f, ce qui est une propriété intéressante).

Le résultat

La matrice de Vandermonde V associée aux scalaires $x_0, \dots, x_n$ est de rang :

$$\operatorname{rg} V \;=\; \operatorname{card}\{x_0, \dots, x_n\}$$

Preuve « structurelle »

Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & \big(P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$$

Dans les bases canoniques, la matrice de φ est la matrice V.
D'après le cours, on a $\operatorname{rg} V = \operatorname{rg} \varphi$.
En vertu du théorème du rang, il s'agit de trouver la dimension de $\operatorname{Ker} \varphi$.
Cherchons une base de $\operatorname{Ker} \varphi$.
En notant r le cardinal de $\{x_0, \dots, x_n\}$ et en supposant (quitte à renuméroter) que $x_1, \dots, x_r$ sont distincts, on montre par double inclusion :

$$\operatorname{Ker} \varphi \;=\; \operatorname{Vect}(R_0, \dots, R_{n-r}) \quad \text{où } R_k = (X - x_1) \cdots (X - x_r) X^k$$

La famille $(R_0, \dots, R_{n-r})$ est libre (c'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degré).
Donc $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - r + 1$.
Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$, le théorème du rang donne $\operatorname{rg} \varphi = r$.

Preuve matricielle

Rappel de cours (résulte de la définition). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.
On retire UNE colonne à A et on note $\widehat{A}$ la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathcal{M}_{n,p-1}(\mathbb{K})$.
On a

$$\operatorname{rg}(\widehat{A}) \;=\; \begin{cases} \operatorname{rg}(A) & \text{si la colonne retirée est CL des autres} \\ \operatorname{rg}(A) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappel de cours (théorème profond). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.
On a $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$.

Conséquence (non triviale). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.
On retire UNE ligne à A et on note A' la matrice obtenue, qui appartient donc à $\mathcal{M}_{n-1,p}(\mathbb{K})$.
On a

$$\operatorname{rg}(A') \;=\; \begin{cases} \operatorname{rg}(A) & \text{si la ligne retirée est CL des autres} \\ \operatorname{rg}(A) - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En itérant un nombre fini de fois cet énoncé, on a :

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ rectangulaire.
Si A possède des lignes identiques, on peut les enlever sans changer son rang (bien sûr le format de la matrice change !).

Retour à l'exercice.
Notons $r = \operatorname{card}\{x_0, \dots, x_n\}$ et montrons que $\operatorname{rg} V = r$.
Quitte à renuméroter, on peut supposer que $x_0, \dots, x_{r-1}$ sont distincts.
Avec le corollaire précédent, le rang de V (qui est une matrice carrée de taille $n+1$) est le même que le rang de V', qui est la matrice rectangulaire :

$$V' = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{r-1} & x_{r-1}^2 & \cdots & x_{r-1}^n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{r,n+1}(\mathbb{K})$$

Montrons que $\operatorname{rg}(V') = r$.

— Le rang de la matrice V' est majoré par le minimum de ses tailles, donc $\mathrm{rg}(V') \leqslant r$.

— Montrons que la famille formée par les r premières colonnes de V' est libre ce qui montrera que $\mathrm{rg}(V') \geqslant r$.

Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{r-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k \mathrm{Col}_k(V') = 0_{\mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{K})}$.

Cette égalité de colonnes de taille r se réécrit :

$$V'' \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{où } V'' \text{ est carrée de taille } r \text{ et est telle que } \mathrm{Col}_j(V'') = \mathrm{Col}_j(V')$$

Autrement dit, la matrice V'' est la matrice carrée de taille r suivante :

$$V'' = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{r-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{r-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{r-1} & x_{r-1}^2 & \cdots & x_{r-1}^{r-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$$

C'est la matrice de Vandermonde associée aux scalaires **distincts** $x_0, \ldots, x_{r-1}$.
D'après l'exercice 110, on sait qu'une telle matrice est inversible (il faut savoir redonner l'argument rapidement).
L'inversibilité de V'' fournit la nullité de tous les λ_k.
D'où la liberté des r premières colonnes de V'.

Bilan. On a montré que $\mathrm{rg}(V') = r$.

Résumons. On a $\begin{cases} \mathrm{rg}\, V = \mathrm{rg}\, V' \\ \mathrm{rg}\, V' = r \end{cases}$, d'où $\mathrm{rg}\, V = r$.

119

Notons $T = \left\{t \in \mathbb{N} \mid \widetilde{A} \text{ sous-matrice de } A \text{ inversible de taille } t\right\}$.

— La partie T est non vide (c'est un peu subtil, mais $0 \in T$: la matrice vide est inversible ; si on ne veut pas considérer le vide, on peut distinguer des cas en fonction de la nullité ou non de la matrice A et constater que si A est non nulle, elle a au moins un coefficient non nul, et que la petite matrice carrée de taille 1 réduite à cet élément est inversible).

— Par ailleurs, la partie T est majorée par $\min(n, p)$.

Bilan. En tant que partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, la partie T admet un maximum.

Montrons maintenant que $\max T = \mathrm{rg}(A)$.

— Montrons que $\max T \leqslant \mathrm{rg}(A)$.
Pour cela, montrons que $\mathrm{rg}\, A$ est un majorant de T, c'est-à-dire $\forall\, t \in T,\ t \leqslant \mathrm{rg}(A)$.
Soit $t \in T$. Alors il existe $\widetilde{A}$ sous-matrice de A inversible de taille t.
On peut aller très vite en invoquant un théorème de cours.
On a toujours pour une sous-matrice $\widetilde{A}$ de A l'inégalité :

$$\mathrm{rg}(\widetilde{A}) \leqslant \mathrm{rg}(A)$$

Comme ici $\widetilde{A}$ est inversible de taille t, son rang vaut t, d'où $t \leqslant \mathrm{rg}(A)$.

On peut reprouver le théorème de cours.
On cherche à montrer que le rang de A est au moins égal à t, c'est-à-dire $t \leqslant \mathrm{rg}(A)$. Pour cela, il suffit d'exhiber t colonnes de A qui forment une famille libre.
Quitte à renuméroter les lignes et les colonnes, supposons que $\widetilde{A}$ se situe « en haut à gauche » de A.
Notons C_i les colonnes de A qui sont de taille n et $\widetilde{C_i}$ les colonnes de $\widetilde{A}$ qui sont de taille t.
Montrons que la famille $(C_1, \ldots, C_t)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est libre.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{t} \lambda_k C_k = 0$.
En ne retenant que les t premières lignes, on obtient une égalité de $\mathcal{M}_{t,1}(\mathbb{K})$ et c'est exactement $\displaystyle\sum_{k=1}^{t} \lambda_k \widetilde{C_k} = 0$.
Cela s'écrit aussi $\widetilde{C} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$
Comme $\widetilde{C}$ est supposée inversible, on en déduit que les λ_k sont nuls.

— Montrons que $\mathrm{rg}(A) \in T$.
On va montrer qu'il existe une sous-matrice de A inversible de taille $\mathrm{rg}(A)$.
Notons $r = \mathrm{rg}(A)$ pour alléger.
Par définition du rang, on peut trouver r colonnes de A qui forment une famille libre.
Notons $\widehat{A}$ la matrice rectangulaire obtenue à partir de ces r colonnes.
Comme ces r colonnes forment toujours une famille libre (on n'a rien fait dessus !), la matrice $\widehat{A}$ est de rang r.
Utilisons maintenant le fait que le rang d'une matrice est aussi le rang de ses vecteurs lignes.
On peut donc trouver r lignes de $\widehat{A}$ qui forment une famille libre.
Notons $\widetilde{A}$ la matrice ainsi obtenue, qui est donc carrée de taille r, et est issue de $\widehat{A}$ (qui elle-même est issue de A).

Résumons. Après ces deux extractions (ligne et colonne), on a obtenu une sous-matrice $\widetilde{A}$ de A *carrée* de taille r et qui est de rang r. Ainsi, $\widetilde{A}$ est inversible.
On a donc montré que $r \in T$.

1. • D'après le cours, on a :

$$\mathrm{rg}(\underbrace{KL}_{=A}) \leqslant \min(\mathrm{rg}\,K, \mathrm{rg}\,L)$$

Ici K est une colonne donc $\mathrm{rg}\,K \leqslant 1$

L est une ligne donc $\mathrm{rg}\,L \leqslant 1$.

D'où $\mathrm{rg}\,A \leqslant 1$

• Sq $\mathrm{rg}\,A = 1$

Mq K et L sont de rang 1.

- Mq d'abord $\mathrm{rg}\,K = 1$

Par l'absurde : Sq $\mathrm{rg}\,K \neq 1$

Comme $\mathrm{rg}\,K \leqslant 1$, on a donc $\mathrm{rg}\,K = 0$

Ainsi K est la colonne nulle.

Donc A est la matrice nulle donc $\mathrm{rg}\,A = 0$

ce qui contredit $\mathrm{rg}\,A = 1$.

- On fait le même raisonnement avec la ligne L.

OU BIEN :

On remarque que $A^T = L^T K^T$

On aplique le point précédent à la colonne L^T et la matrice A^T en exploitant le fait que le rang est invariant par transposition.

• Sq K et L de rang 1.
Mq $\operatorname{rg} A = 1$.

* Utilisons la définition du rang d'une matrice :

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Vect}\left(\operatorname{Col}_1 A, \dots, \operatorname{Col}_n A\right)$$

* Exploitons la définition de A.
Faisons un dessin :

$$A = KL$$

$$= \begin{bmatrix} \\ K \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_1 & \dots & \ell_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} \ell_1 K & \quad & \ell_n K \end{array}\right]$$

Ainsi $Col_j A = l_j K$

D'où $\text{Vect}(Col_1 A, \dots, Col_n A) = \text{Vect}(l_1 K, \dots, l_n K)$

Comme L est de rang 1, il existe au moins un indice i tq $l_i \neq 0$.

(Bien comprendre cela, c'est le point clé de la preuve)

Donc $\text{Vect}(l_1 K, \dots, l_n K) = \text{Vect}(K)$

Comme K est de rang 1, $\dim \text{Vect}(K) = 1$

Ainsi $\dim \text{Vect}(Col_1 A, \dots, Col_n A) = 1$

D'où $\text{rg} A = 1$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

Mq $\exists K, L$ .....

Comme A est de rang 1,
l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A est de dimension 1, donc possède une base de cardinal 1.

Il existe donc une colonne non nulle K tq

$$\mathrm{Vect}\left(\mathrm{Col}_1 A, \dots, \mathrm{Col}_n A\right) = \mathrm{Vect}(K)$$

Ainsi il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tq $\begin{cases} \mathrm{Col}_1 A = \lambda_1 K \\ \vdots \\ \mathrm{Col}_n A = \lambda_n K \end{cases}$

On a donc $A = \left[\begin{array}{c:c:c} \lambda_1 K & \cdots & \lambda_n K \end{array}\right]$

Posons $L = [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_n] \in M_{1,n}(\mathbb{K})$.

Par construction, on a alors $A = KL$.

<u>Bonus</u> La colonne K peut être prise parmi les colonnes de A car
" de toute famille génératrice, on peut extraire une base". (th de la base <u>extraite</u>)

- Mq $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $A^2 = \lambda A$ puis que $\lambda = \operatorname{tr} A$.

Comme A est de rang 1, on peut trouver K, L colonne, ligne tq $A = KL$.

Ainsi $A^2 = (KL)(KL)$

$= K(LK)L$

$= K[\lambda]L$ $\quad$ $LK \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ est une matrice carrée de taille 1

$= \lambda KL$

$= \lambda A$.

λ est donc l'unique coeff de LK càd $LK = [\lambda]$
Donc $\lambda = \operatorname{tr}(LK)$.

Or $\operatorname{tr}(LK) = \operatorname{tr}(KL)$ (cours)

D'où $\lambda = \operatorname{tr} A$.

1. • On ne change pas le caractère inversible d'une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes.

On a donc les équivalences :

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \text{ non inversible}$$

$$\Updownarrow \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \text{ non inversible}$$

$$\Updownarrow \quad L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda) L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2+3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \text{ non inversible}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \times (-\lambda^2+3\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -\lambda(\lambda-3)(3-\lambda) = 0$$

BILAN $A-\lambda I$ non inversible $\iff \lambda \in \{0, 3\}$

- Il y a 2 scalaires λ tels que la matrice $A-\lambda I$ de taille 3 soit non inversible.

  En fait, on peut dire qu'il y a 3 scalaires λ mais comptés avec multiplicité.

- Calculons $\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} \dim \operatorname{Ker}(A - \alpha I)$

Cette somme porte sur $\mathbb{K}$ qui est un ensemble infini.
Donc cette somme n'est pour l'instant pas bien définie.
Disons que sans justification, cela n'a aucun sens de parler de cette somme.

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ tq $A - \alpha I$ est inversible,
alors $\operatorname{Ker}(A - \alpha I) = \{0\}$ donc sa dimension est nulle.
Ainsi :

$$\text{somme} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ A - \lambda I \notin GL_n(\mathbb{K})}} \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$$

Cette fois-ci, la somme porte sur les $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $A - \lambda I$ est non inversible. Et il y a un nombre fini de tels λ.
Pour de tels λ, déterminons $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.
Pour cela, on peut déterminer une base de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ ou bien, utiliser le théorème du rang.

- Pour $\lambda = 0$, on a $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Cette matrice est de rang 2, donc son noyau est de dimension 1.
Pour info, une base du noyau est $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

- Pour $\lambda = 3$, on a $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Cette matrice est de rang 1, donc son noyau est de dimension 2.
Pour info, une base du noyau est $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

<u>BILAN</u>. La somme cherchée vaut $1 + 2 = 3$.

> Pour notre matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, on a :
>
> $$\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} \dim \operatorname{Ker}(A - \alpha I) = 3.$$

2. Déjà fait dans 1.

3. Comme il n'y a pas unicité des bases, on n'a pas forcément la même réponse et ce n'est pas grave.

Une base de Ker A est $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$

Une base de Ker $(A - 3I)$ est $\mathcal{B}_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

La concaténation $\mathcal{C} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_3$ est la famille :

$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Pour l'instant, cette famille est quelconque.
On peut juste dire qu'elle est de cardinal 3 (autant que la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$).

On voit (presque à l'œil nu) que cette famille est libre. En effet soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tq $\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0$
Alors

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale donc est inversible.

Donc $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

Ainsi, la famille $\mathcal{C}$ est libre.

BILAN $\begin{cases} \mathcal{C} \text{ est une famille libre de } M_{3,1}(\mathbb{K}) \text{ de cardinal } 3 \\ \dim M_{3,1}(\mathbb{K}) = 3 \end{cases}$

Donc $\mathcal{C}$ est une base de $M_{3,1}(\mathbb{K})$.

4. On peut fournir une réponse purement matricielle en mq il existe $P \in GL_3(\mathbb{K})$ tq $D = P^{-1}AP$.

Mais la solution parait un peu magique !

Posons $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⚠ à l'ordre des colonnes

Cette matrice est inversible (WHY ?)

On a (faites le calcul) : $PD = AP$ où $D = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$.

Donc A et D sont semblables.

On peut fournir la même solution mais rédigée avec des endomorphismes.

Considérons $f : K^3 \longrightarrow K^3$ l'endo cano associé à A.

Notons $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$.

Notons (encore) $\mathcal{C}$ la base de $\mathbb{K}^3$ suivante:

WHY

$$\mathcal{C} = \Big(\underbrace{(0,0,1)}_{u}, \underbrace{(1,-1,0)}_{v}, \underbrace{(1,1,0)}_{w} \Big)$$

On a

$$\begin{cases} f(u) = 3u & \text{car } A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \text{car } \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-3I) \\ f(v) = 3v & \text{car} \ldots \\ f(w) = 0 & \text{car} \ldots \end{cases}$$

$$\text{Donc } \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(u) & f(v) & f(w) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

Posons $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_{cano} \to \mathcal{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{cano}}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} & \mathcal{C} & \\ & & \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_{cano}}$

Par la formule de chg^t de bases, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = P^{-1} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{cano}}(f) \, P$$

càd $\quad D = P^{-1} A P$

130

Posé par YG.
Je propose de remarquer que $A^2 = 0$ (car $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Ker} A$).
D'après le théorème du rang et l'hypothèse, on a $n = r + r$ où $r = \operatorname{rg}(A)$.
Soit f_A l'ALCA à A.
On prend une base de l'image $(e_1, \dots, e_r)$ (c'est-à-dire du noyau ici !).
On invente des antécédents e'_i aux e_i.
La famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e'_1, \dots, e'_r)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (libre — à montrer — et de bon cardinal) et dans cette base…
Idem pour B.

131

Soit j fixé. On a $\mathrm{Col}_j(AB)=\sum_{i=1}^{p}\mathrm{Col}_i(A)b_{ij}$.

Prouvons-le.
On a $\mathrm{Col}_j(AB)=A\mathrm{Col}_j(B)$ (cette formule est « bas de gamme »).
En écrivant A par blocs avec ses colonnes $A_1,\dots,A_p$, on a

$$\mathrm{Col}_j(AB)=A\mathrm{Col}_j(B)=\begin{bmatrix}A_1 & \cdots & A_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1,j}\\ \vdots\\ b_{p,j}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{p}A_ib_{i,j}$$