Probabilités sur un univers fini

exercices

26exo-ProbaUniversFini.pdf, 28 avril 2024, 15:11

Généralités

101 Avec les probas totales

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. On pose $\alpha = \mathbb{P}(A \cap B)$, $\beta = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$, $\gamma = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ et $\delta = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$.
   Montrer que
   $$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \ = \ \alpha\delta - \beta\gamma$$
2. En déduire que $\left|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right| \leqslant \xi(1-\xi)$ où ξ est à déterminer en fonction des données.
3. Montrer que
   $$\left|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

102 Une inégalité

Montrer que, pour toute famille finie $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$, on a :

$$\mathbb{P}\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big) \ \geqslant \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \ - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

103 L'exo de la Piston 3

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ où $n \geqslant 3$.
On choisit au hasard une permutation dans $\mathcal{S}_n$.
Déterminer la probabilité que 3 soit un point fixe.

104 Détermination d'une mesure de probabilité

On lance un dé à six faces, truqué. On suppose que la probabilité d'obtenir $k \in [\![1, 6]\!]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

105 Bleu-Blanc-Rouge

Une urne contient b boules bleues, w boules blanches et r boules rouges.
On note $N = b + w + r$ et on suppose que b, w et r sont supérieurs à 3.

1. On tire simultanément trois boules dans l'urne.
   Déterminer la probabilité de l'événement E : « obtenir 3 boules de la même couleur ».
2. Même question avec un tirage successif et sans remise.
3. Même question avec un tirage successif et avec remise.

106 Jeu de cartes

D'un jeu de 52 cartes, 5 cartes sont distribuées à un joueur.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : « le joueur a exactement trois $\diamondsuit$ ».
2. Déterminer la probabilité de l'événement B : « le joueur a au moins une paire ».

107 Loto

Les numéros du loto sont compris dans $[\![1, 49]\!]$. On tire au hasard 6 numéros.
Déterminer la probabilité des événements :

— A_4 : « obtenir exactement 4 bons numéros »

— E : « obtenir au moins 4 bons numéros ».

108 Paradoxe des anniversaires

Sachant qu'une année comporte toujours 365 jours, quelle est la probabilité qu'au moins deux Pistons 3 aient leur anniversaire le même jour ?

109 Tirages (strictement) croissants

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

1. On tire successivement **sans** remise p boules. Déterminer la probabilité de l'événement A : « obtenir des numéros en ordre (strictement) croissant ».
2. On tire successivement **avec** remise p boules. Déterminer la probabilité de l'événement B : « obtenir des numéros en ordre strictement croissant ».
3. On tire successivement **avec** remise p boules. Déterminer la probabilité de l'événement C : « obtenir des numéros en ordre croissant ».

110 Mélange d'un jeu de cartes

On mélange un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité que cartes rouges et noires alternent dans tout le jeu ?
2. Quelle est la probabilité que deux rois ne soient jamais côte à côte ?

111 File d'attente

On considère $n \geqslant 2$ personnes dont A et B.
Elles s'alignent au hasard dans une file.
Soit $r \in [\![0, n-2]\!]$. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement r personnes entre A et B ?

112 Rangement de n boules dans n urnes

On considère n boules numérotées et n urnes numérotées.
On lance simultanément toutes les boules dans les urnes.
Déterminer la probabilité des événements suivants :

— A : « chaque urne possède une boule »

— B : « 2 boules occupent une même urne, et les autres boules occupent $n-2$ urnes distinctes »

113 Avec des têtes

On considère un jeu de carte réduit aux quatre As, rois, dames, valets (16 cartes).
On demande à n personnes de tirer chacune leur tour une carte au hasard et de la remettre dans le jeu.
Déterminer la probabilité des événements suivants :

— E : « les personnes ont toutes tiré des cartes différentes »

— F : « 2 personnes ont choisi la même carte, et les $n-2$ autres personnes des cartes toutes différentes »

114 Urne multicolore

Une urne contient N boules de s couleurs :

— K_1 boules de la couleur 1

— K_2 boules de la couleur 2

— $\vdots$

— K_s boules de la couleur s

On tire n boules de manière simultanée. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement :

— k_1 boules de la couleur 1

— k_2 boules de la couleur 2

— $\vdots$

— k_s boules de la couleur s

Nota Bene : on a les relations $K_1 + \cdots + K_s = N$ et $k_1 + \cdots + k_s = n$.

Recommencer l'exercice dans le cas d'un tirage successif avec remise.

115 Pile-Face

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois une pièce de monnaie équilibrée.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir n FACE sans avoir obtenu n PILE auparavant ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir n FACE sans avoir obtenu $n+1$ PILE auparavant ?

116 Pile-Face (bis)

On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p avec $p \in \,]0,1[$ et on pose $q = 1 - p$.

1. Déterminer la probabilité de l'événement A : « obtenir au moins une fois pile »
2. Déterminer la probabilité de l'événement B : « au cours de ces n lancers, face n'est jamais suivi de pile ».

117 Record !

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.
On vide l'urne et on note $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ la liste des numéros tirés.
Pour $2 \leqslant i \leqslant n$, on dit qu'il y a record à l'instant i si $u_i > \max(u_1, \dots, u_{i-1})$.
On convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.

1. Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Calculer la probabilité qu'il y ait record à l'instant i.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 1 record.
   Même question avec 2 records, puis n records.

118 Formule du crible de Poincaré, preuve par récurrence

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\mathcal{H}_n : \quad \text{« } \forall\, (A_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n, \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \text{ »}$$

119 Problème des chapeaux (Pierre Rémond de Montmort, 1708)

Lors d'une soirée, n personnes laissent leur chapeau au vestiaire.
En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard.
En utilisant la formule du crible de Poincaré, déterminer la probabilité p_n qu'aucune personne ne reprenne son propre chapeau à la sortie.
Montrer que la limite de p_n vaut environ $0,36787944117$.

Probabilités conditionnelles

120 **Avec remise de la couleur tirée**

Une urne contient initialement une boule blanche et une rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne :
après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute une boule de la couleur qui vient d'être tirée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on note $A_{n,k}$ l'événement « on a tiré k boules blanches lors des n^{ers} tirages ».

1. Déterminer, pour tout k, la probabilité de $A_{1,k}$.
2. Déterminer, pour tout k, la probabilité de $A_{2,k}$.
3. Soit n fixé.
   Émettre une conjecture concernant la probabilité de $A_{n,k}$.
4. Prouver votre conjecture par récurrence sur n.

121 **Deux enfants**

PDG a deux enfants. Hum... je crois qu'il en a plus !

1. L'ainée est une fille. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles ?
2. L'un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

122 **Téléphone arabe**

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Des individus $A_0, A_1, \dots, A_n$ se transmettent un message sous la forme de « oui » ou « non ».
Chaque individu A_k transmet le message reçu à A_{k+1}, de façon fidèle avec une probabilité p et en changeant le message avec une probabilité $1-p$.
Tous les individus se comportent de manière indépendante.
On note p_k la probabilité pour que le message reçu par A_k soit le message initial donné par A_0.

1. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la famille $(p_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.
2. En déduire la valeur de p_n et sa limite lorsque n tend vers l'infini.

123 **Trésor au château de Versailles**

Le château contient N coffres.
Le roi Louis XIV a mis, avec probabilité p, le trésor dans un des coffres, tiré au sort, et avec probabilité $1-p$, il l'a confié à son conseiller, Jean-Baptiste Colbert.
Un passant a ouvert les $N-1$ premiers coffres, sans succès.
Quelle est la probabilité pour qu'il trouve le trésor dans le dernier coffre ?

Indépendance

124 **Calculs**

On considère $\Omega = [\![1,6]\!]$ muni de la probabilité uniforme. Soit A, B, C les événements :

$$A = \{2,4,6\} \qquad B = \{1,2\} \qquad C = \{1,4\}$$

1. Les événements A, B sont-ils indépendants ?
2. Même question avec A et C.
3. Même question avec A et $B \cup C$.
4. Même question avec A et $B \cap C$.

125 **Formules**

Soit A, B, C trois événements mutuellement indépendants.
Montrer que $A \cup B$ et C sont indépendants.

Autres exos

126 **Racines d'un polynômes**

On jette 3 fois un dé à 6 faces, et on note a, b et c les résultats successifs obtenus.
On note $Q = aX^2 + bX + c$.
Déterminer la probabilité pour que :

— Q ait deux racines réelles distinctes ;

— Q ait une racine réelle double ;

— Q n'ait pas de racines réelles.

127 **Paradoxe du Chevalier de Méré**

1. On lance 4 fois un dé. Prenez-vous le pari d'obtenir (au moins) un trois ?
2. Lorsqu'on lance deux dés, il y a 6 fois plus d'issues que lorsqu'on ne lance qu'un dé.
   On se propose donc de répéter 6 fois l'expérience précédente : ainsi, on lance 24 fois (qui vaut 6×4) fois deux dés. Prenez-vous le pari d'obtenir (au moins) un double trois ?

128 **Newton-Pepys problem**

A-t-on plus de chances d'obtenir (au moins) un 3 en lançant 6 dés, (au moins) deux 3 en lançant 12 dés, ou (au moins) trois 3 en lançant 18 dés ?

129 **Let's make a deal**

Vous participez à un jeu où l'on vous propose trois portes au choix. L'une des portes cache une voiture à gagner, et chacune des deux autres une chèvre.
Vous choisissez une porte, mais sans l'ouvrir ! L'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre une autre porte, derrière laquelle se trouve une chèvre. Il vous donne maintenant le choix entre :
vous en tenir à votre choix initial, ou changer de porte. Qu'avez-vous intérêt à faire ?
C'est un problème auquel étaient confrontés les invités du jeu télévisé *Let's make a deal* de Monty Hall (animateur et producteur américain).

Probabilités sur un univers fini

corrigés

101

1. La famille $(A \cap B, A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, \overline{A} \cap \overline{B})$ est un système complet d'événements.
   On a donc $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$.
   D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(B, \overline{B})$, on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \alpha + \beta$.
   De même $\mathbb{P}(B) = \alpha + \gamma$.
   D'où
   $$\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \;=\; \alpha - (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma) \;=\; \alpha(1 - \alpha - \beta - \gamma) - \beta\gamma \;=\; \alpha\delta - \beta\gamma.$$

2. Raisonnons par disjonction de cas.
   — Cas $\alpha\delta \geqslant \beta\gamma$. On a alors :
   $$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| = \alpha\delta - \beta\gamma \leqslant \alpha\delta = \alpha(1 - \alpha - \beta - \gamma) \leqslant \alpha(1 - \alpha).$$
   Pour répondre à la question, il suffit de prendre $\xi = \alpha$.
   — Le cas $\alpha\delta \leqslant \beta\gamma$ se traite de la même façon en posant $\xi = \beta$.

3. La fonction $\xi \mapsto \xi(1 - \xi)$ définie sur $[0, 1]$ est majorée par $\frac{1}{4}$ (mieux elle atteint un maximum en $\frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$).
   On en déduit
   $$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leqslant \frac{1}{4}$$

On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ ou si l'on veut sur $n \in [\![2, +\infty[\![$.

$$\mathcal{H}_n : \quad « \, \forall \, (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n, \quad \mathbb{P}\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\big) \ \geqslant \ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) \ - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \, »$$

Si l'on voulait être plus rigoureux encore, on pourrait opter pour une récurrence finie sur $m \in [\![1, n]\!]$, car officiellement n est fixé. On noterait alors

$$\mathcal{P}_m : \quad « \, \mathbb{P}\big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m\big) \ \geqslant \ \sum_{k=1}^{m} \mathbb{P}(A_k) \ - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) \, »$$

Initialisation. On peut initialiser à $n = 1$ ou à $n = 2$.

— Pour $n = 1$, le membre droit est réduit à $\mathbb{P}(A_1)$. Comme le membre gauche vaut $\mathbb{P}(A_1)$, on a égalité. A fortiori, on a une inégalité, d'où $\mathcal{H}_1$.

— D'après la formule du crible de Poincaré, on a $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. D'où $\mathcal{H}_2$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (ou dans $n \in [\![2, +\infty[\![$ en fonction de l'initialisation) tel que $\mathcal{H}_n$.

Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$. Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \in \mathcal{P}(\Omega)^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \mathbb{P}\big((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}\big) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big)
\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ au premier terme et la sous-additivité au troisième, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) \ \geqslant \ \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap A_{n+1})$$

Le terme $\mathbb{P}(A_{n+1})$ peut se marier avec la première somme.

Quant à la dernière somme indexée par $i \in [\![1, n]\!]$, elle peut se marier avec la deuxième somme indexée sur $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et fournir une somme indexée par $1 \leqslant i < j \leqslant n + 1$.

D'où

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) \ \geqslant \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

103

Considérons $\Omega = \mathcal{S}_n$ que l'on munit de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$.
On note E l'événement « 3 est un point fixe ».
Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\operatorname{card} E}{\operatorname{card} \Omega}$.
Se donner une issue de E revient à

- choisir l'image de 3 (à savoir 3) : il y a 1 choix !
- choisir l'image des $n-1$ autres éléments de $[\![1, n]\!] \setminus \{3\}$: il y a $(n-1)!$ choix.

D'où $\operatorname{card} E = (n-1)!$ On peut aussi dire qu'un élément de E s'identifie à une permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!] \setminus \{3\}$ qui est de cardinal $n-1$, d'où $\operatorname{card} E = (n-1)!$
Ainsi,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

104

On pose $\Omega = [\![1, 6]\!]$.
Pour tout $k \in \Omega$, on note $p_k = \mathbb{P}(\{k\})$.
D'après l'hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall\, k \in \Omega, \quad p_k = Ck$$

On a

$$\sum_{k\in\Omega} p_k \;=\; C\sum_{k=1}^{6} k \;=\; C\frac{6\cdot 7}{2} \;=\; 21C$$

Or $\displaystyle\sum_{k\in\Omega} p_k = 1$. D'où $C = \dfrac{1}{21}$.

L'événement A « on obtient un numéro pair » est la partie $A = \{2, 4, 6\}$. D'où

$$\mathbb{P}(A) \;=\; p_2 + p_4 + p_6 \;=\; 2C + 4C + 6C = 12C \;=\; \frac{4}{7}$$

105

On note $\mathcal{U}$ l'urne contenant b boules bleues, w boules blanches et r boules rouges, qui est de cardinal $N = b + w + r$.

1. Le tirage est simultané.
   Considérons $\Omega = \Big\{\text{3-combinaisons de } \mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
   On a $\operatorname{card}\Omega = \binom{N}{3}$.
   On a
   $$E \;=\; B \sqcup W \sqcup R$$
   où B est l'événement « obtenir trois boules bleues », idem pour W avec la couleur blanc et R pour la couleur rouge.
   Par additivité de $\mathbb{P}$, on a
   $$\mathbb{P}(E) \;=\; \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(R)$$
   Déterminons la probabilité de B. Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\operatorname{card} B}{\operatorname{card}\Omega}$.
   Un élément de B s'identifie à une 3-combinaison de l'ensemble des b boules bleues, donc $\operatorname{card} B = \binom{b}{3}$. Ainsi, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{b}{3}}{\binom{N}{3}}$.
   On détermine de la même façon les deux autres probabilités.
   Bilan :
   $$\mathbb{P}(E) \;=\; \frac{\binom{b}{3} + \binom{w}{3} + \binom{r}{3}}{\binom{N}{3}}$$

2. Considérons $\Omega = \Big\{\text{3-arrangements de } \mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
   On a $\operatorname{card}\Omega = 3!\binom{N}{3}$.
   Comme précédemment, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(R)$.
   Un élément de B s'identifie à un 3-arrangement de l'ensemble des b boules bleues, donc $\operatorname{card} B = 3!\binom{b}{3}$. Ainsi, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{3!\binom{b}{3}}{3!\binom{N}{3}}$.
   Bilan :
   $$\mathbb{P}(E) \;=\; \frac{3!\binom{b}{3} + 3!\binom{w}{3} + 3!\binom{r}{3}}{3!\binom{N}{3}} \;=\; \frac{\binom{b}{3} + \binom{w}{3} + \binom{r}{3}}{\binom{N}{3}}$$

3. Considérons $\Omega = \Big\{\text{3-listes de } \mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
   On a $\operatorname{card}\Omega = N^3$.
   Comme précédemment, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(R)$.
   Un élément de B s'identifie à une 3-liste de l'ensemble des b boules bleues, donc $\operatorname{card} B = b^3$.
   Ainsi, $\mathbb{P}(B) = \dfrac{b^3}{N^3}$.
   Bilan :
   $$\mathbb{P}(E) \;=\; \frac{b^3 + w^3 + r^3}{N^3}$$

106

On note $\mathbb{JEU} = \left\{ \begin{array}{l} \text{As}^{\spadesuit}, \text{Roi}^{\spadesuit}, \text{Dame}^{\spadesuit}, \dots, 2^{\spadesuit} \\ \text{As}^{\heartsuit}, \text{Roi}^{\heartsuit}, \text{Dame}^{\heartsuit}, \dots, 2^{\heartsuit} \\ \text{As}^{\diamondsuit}, \text{Roi}^{\diamondsuit}, \text{Dame}^{\diamondsuit}, \dots, 2^{\diamondsuit} \\ \text{As}^{\clubsuit}, \text{Roi}^{\clubsuit}, \text{Dame}^{\clubsuit}, \dots, 2^{\clubsuit} \end{array} \right\}$.

On considère $\Omega = \left\{ \text{5-combinaisons de } \mathbb{JEU} \right\}$ muni de la probabilité uniforme, que l'on note $\mathbb{P}$.

1. Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$.

   Se donner une issue de A revient à

   — choisir 3 $\diamondsuit$: il y a $\binom{13}{3}$ choix ;

   — choisir les deux autres cartes dans le reste du jeu : il y a $\binom{52-13}{2}$ choix.

   D'où $\operatorname{card} A = \binom{13}{3}\binom{39}{2}$.

   D'où
   $$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} \;\approx\; 0{,}0815$$

2. Déterminons la probabilité de l'événement contraire $\overline{B}$.

   Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{\operatorname{card} \overline{B}}{\operatorname{card} \Omega}$.

   Se donner une issue de $\overline{B}$ revient à :

   — choisir les 5 hauteurs différentes : $\binom{13}{5}$ choix

   — Pour chacune de ces hauteurs, choix des couleurs : 4^5 choix

   D'où $\operatorname{card} \overline{B} = \binom{13}{5}4^5$.

   Ainsi,
   $$\mathbb{P}(B) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) \;=\; 1 - \frac{\binom{13}{5}4^5}{\binom{52}{5}} \;\approx\; 0{,}4929$$

107

On note $\mathcal{U}$ l'urne constitué des 49 jetons.
Le tirage est simultané.
Considérons $\Omega = \Big\{$6-combinaisons de $\mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
On a $\operatorname{card}\Omega = \binom{49}{6}$.

— Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(A_4) = \dfrac{\operatorname{card} A_4}{\operatorname{card}\Omega}$.
  Se donner une issue de A_4 revient à
  — choisir 4 numéros parmi les 6 bons numéros : il y a $\binom{6}{4}$ choix ;
  — choisir 2 autres numéros dans le reste de l'urne : il y a $\binom{49-6}{2}$ choix.

  D'où $\operatorname{card} A = \binom{6}{4}\binom{43}{2}$.
  D'où
$$\mathbb{P}(A) \;=\; \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \;\approx\; 0{,}0009686$$

— On a
$$E \;=\; A_4 \sqcup A_5 \sqcup A_6$$
  où A_i est l'événement « obtenir i bons numéros ».
  Par additivité de $\mathbb{P}$, on a
$$\mathbb{P}(E) \;=\; \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_5) + \mathbb{P}(A_6)$$

$$\mathbb{P}(E) \;=\; \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\binom{43}{1} + 1}{\binom{49}{6}} \;\approx\; 0.0009871$$

108

On pose $p = 43$ le cardinal de la classe de Piston 3.
On considère $\Omega \ = \ \Big\{p\text{-listes de } [\![1, 365]\!]\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
On a $\operatorname{card}\Omega = 365^p$
On va déterminer la probabilité que tous les élèves aient leur anniversaire à des jours différents.
Cet événement est $\Big\{p\text{-arrangement de } [\![1, 365]\!]\Big\}$.
Sa probabilité vaut :

$$\frac{365(365-1)\cdots(365-p+1)}{365^p}$$

que l'on peut écrire (pratique pour utiliser la calculatrice, mais pas très efficace : réfléchir à un petit programme Python)

$$\frac{p!\binom{365}{p}}{365^p}$$

La probabilité cherchée vaut (ici $p = 42$)

$$1 - \frac{p!\binom{365}{p}}{365^p} \ \approx \ 0{,}91$$

109

On note $\mathcal{U} = \{B_1, \dots, B_p\}$ l'urne des p boules numérotées.

1. Le tirage est successif sans remise.
   Considérons $\Omega = \Big\{p\text{-arrangements de } \mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
   Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$ où $\operatorname{card} \Omega = n(n-1)\cdots(n-p+1) = p!\binom{n}{p}$.
   Se donner une issue de A (c'est-à-dire un tirage croissant) revient à se donner une partie à p éléments de $\mathcal{U}$.
   Ainsi,
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{n}{p}}{p!\binom{n}{p}} = \frac{1}{p!}$$
2. Le tirage est successif avec remise.
   Considérons $\Omega = \Big\{p\text{-listes de } \mathcal{U}\Big\}$ muni de la probabilité uniforme.
   Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\operatorname{card} B}{\operatorname{card} \Omega}$ où $\operatorname{card} \Omega = n^p$.
   Se donner une issue de B (c'est-à-dire un tirage croissant) revient à se donner une partie à p éléments de $\mathcal{U}$.
   Ainsi,
   $$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{n}{p}}{n^p}$$
3. Cette question est difficile.
   On cherche le nombre de p-listes croissantes au sens large de $[\![1, n]\!]$.
   Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des p-listes strictement croissantes de $[\![1, n+p-1]\!]$ via
   $$(x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_p) \longmapsto (x_1 < x_2 + 1 < \cdots < x_p + (p-1))$$
   Je vous laisse comprendre que :
   $$\mathbb{P}(C) \;=\; \frac{\binom{n+p-1}{p}}{n^p}$$

111

On numérote de 1 à n les places dans la file.
Considérons $\Omega = \left\{ \text{2-arrangements de } [\![1, n]\!] \right\}$ muni de la probabilité uniforme.
Une issue ω est par exemple $(4, 2)$ et cela signifie que A est en $4^{\text{ème}}$ position et B en $2^{\text{ème}}$.
On a $\text{card}(\Omega) = n(n-1)$.
L'événement E_r : « il y a r personnes entre A et B » est réalisé si A et B (sans ordre) sont aux places $(k, k+r+1)$, avec $1 \leqslant k \leqslant n-r-1$.
On obtient $\text{card}(E_r) = 2(n-r-1)$, puis $\mathbb{P}(E_r) = \dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$.

Solution très légèrement différente.
On prend pour Ω l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de la probabilité uniforme.
On commence par traiter le cas où A vient avant B.
Et on dit que l'autre cas est analogue, d'où $\mathbb{P}(E_r) = 2 \times$ proba précédente.

Lorsque A est avant B, il y a $n-r-1$ places possibles pour A.
Ensuite B est fixé.
Puis, il y a $(n-2)!$ façons de placer les autres personnes.
D'où une proba de $\dfrac{(n-r-1)(n-2)!}{n!}$.
D'où

$$\mathbb{P}(E_r) \;=\; 2\frac{(n-r-1)(n-2)!}{n!}$$

On retrouve le résultat précédent.

— Dans le cas d'un tirage simultané, on choisit pour Ω l'ensemble des parties de cardinal n de l'ensemble des boules, que l'on munit de la probabilité uniforme.
On a $\operatorname{card}\Omega = \binom{N}{n}$.
La probabilité cherchée est :

$$\frac{\binom{K_1}{k_1}\binom{K_2}{k_2}\dots\binom{K_s}{k_s}}{\binom{N}{n}}.$$

— Dans le cas de tirages successifs avec remise, on choisit pour Ω l'ensemble des n-listes de l'urne, que l'on munit de la probabilité uniforme.
On a $\operatorname{card}\Omega = N^n$.
Se donner une issue réalisant l'événement revient à

- — choisir la place des k_1 boules de couleur 1 : il y a $\binom{n}{k_1}$ choix
- — puis choisir ces k_1 boules parmi les K_1 boules : il y a ${K_1}^{k_1}$ choix
- — choisir la place des k_2 boules de couleur 2 : il y a $\binom{n-k_1}{k_2}$ choix
- — puis choisir ces k_2 boules parmi les K_2 boules : il y a ${K_2}^{k_2}$ choix
- — $\vdots$
- — choisir la place des k_s boules de couleur s : il y a $\binom{n-k_1-\dots-k_{s-1}}{k_s}$ choix
- — puis choisir ces k_s boules parmi les K_s boules : il y a ${K_s}^{k_s}$ choix

Le cardinal de l'événement cherché est :

$$\binom{n}{k_1}K_1^{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}K_2^{k_2}\dots\binom{n-k_1-\dots-k_{s-1}}{k_s}K_s^{k_s} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_s!}K_1^{k_1}K_2^{k_2}\cdots K_s^{k_s}$$

car les termes se simplifient deux à deux.
La probabilité cherchée est donc :

$$\frac{\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_s!}K_1^{k_1}K_2^{k_2}\cdots K_s^{k_s}}{N^n}$$

1. Notons A l'évènement « obtenir au moins une fois pile » donc $\overline{A}$ est l'évènement « ne jamais avoir pile » ou encore « obtenir n FACE ».
   Les lancers étant indépendants, donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = q^n$ donc $\mathbb{P}(A) = 1 - q^n$.
2. Notons B l'évènement « face n'est jamais suivi de pile ».
   En notant P_k « avoir pile au k-ème lancer », on a :

$$B = \bigsqcup_{k=1}^{n} P_1 \cap \cdots \cap P_{k-1} \cap \overline{P_k} \cap \overline{P_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{P_n} \quad \sqcup \quad P_1 \cap \cdots \cap P_n$$

   Ces unions étant disjointes, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} q^{n-k+1} + p^n \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} p^{\ell} q^{n-\ell} + p^n \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} p^{\ell} q^{n-\ell} \\ &= \begin{cases} \dfrac{n+1}{2^n} & \text{si } p = q = \frac{1}{2} \\ \dfrac{q^{n+1} - p^{n+1}}{q-p} & \text{si } p \neq q. \end{cases} \end{aligned}$$

118

Initialisation. A vous.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}_n$. Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1} \in \mathcal{P}(\Omega)^{n+1}$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\Big) &= \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \cup A_{n+1}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\Big(\underbrace{\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \cap A_{n+1}}_{\bigcup_{j=1}^{n}(A_j\cap A_{n+1})}\Big) && \text{d'après la formule de Poincaré pour deux événements} \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \ + \ \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}) && \text{en appliquant deux fois } \mathcal{H}_n \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}(A_i) \quad + \quad (-1)^n\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}) && \text{en découpant les deux sommes} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}(A_i) \quad + \quad (-1)^n\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{k-1}\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{k-1}}\cap A_{n+1}) && \text{chgt d'indice} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\mathbb{P}(A_i) \quad + \quad (-1)^n\mathbb{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) && \text{en regroupant les deux sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n+1} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) && \text{en regroupant les termes}
\end{aligned}$$

121

Considérons $\Omega = \{(F, F); (F, G); (G, F); (G, G)\}$ muni de la probabilité uniforme.

1. Posons $A = \{(F, F); (F, G)\}$ et $B = \{(F, F)\}$. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{1}{2}$.
2. Posons $C = \{(G, F); (F, G); (G, G)\}$ et $D = \{(G, G)\}$. La probabilité cherchée est $\mathbb{P}_C(D) = \dfrac{1}{3}$.

122

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, notons B_k l'événement « l'individu A_k a reçu le bon message ».
   On peut considérer que l'énoncé nous donne les informations suivantes :
   — $\mathbb{P}(B_0) = 1$;
   — $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(B_{k+1} \mid B_k) = p$;
   — $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(B_{k+1} \mid \overline{B}_k) = 1 - p$.
   On trouve alors une relation de récurrence immédiate sur $\mathbb{P}(B_k)$.
   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a, d'après la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_{k+1}) &= \mathbb{P}(B_{k+1} \mid B_k)\mathbb{P}(B_k) + \mathbb{P}(B_{k+1} \mid \overline{B}_k)\mathbb{P}(\overline{B}_k) \quad = p\mathbb{P}(B_k) + (1-p)(1 - \mathbb{P}(B_k)) \\ &= (2p-1)\mathbb{P}(B_k) + (1-p).\end{aligned}$$
   Bilan :
   $$\forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \quad p_{k+1} = (2p-1)p_k + (1-p)$$
2. La suite (p_k) est donc une suite arithmético-géométrique. D'où
   — **Cas** $p = 1$**.** Alors $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = 1$.
   En particulier, $p_n = 1$.
   Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.
   — **Cas** $p \in [0, 1[$**.** Alors $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $p_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^k$.
   En particulier, on a $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$.
     ⋆ Si $p \in]0, 1[$, alors $2p - 1 \in]-1, 1[$.
     Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.
     ⋆ Si $p = 0$, alors $p_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
     Donc la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1 + (-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Analyse du sujet. On admet qu'il existe un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et des événements B et $C_1, \dots, C_N$ tels que

- la famille $(C_1, \dots, C_N, B)$ soit un système complet d'événements
- quel que soit $i \in [\![1, N]\!]$, on a $\mathbb{P}(C_i) = \frac{p}{N}$
- $\mathbb{P}(B) = 1 - p$.

La question revient à déterminer :

$$\mathbb{P}(C_N \mid \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}).$$

Réponse. On a

$$\mathbb{P}(C_N \mid \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}) \;=\; \frac{\mathbb{P}(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}} \cap C_N)}{\mathbb{P}(\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}})}.$$

La famille $(C_1, \dots, C_N, B)$ est un système complet d'événements, donc l'intersection des complémentaires $\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}$ est simplement égale à $C_N \sqcup B$.
En particulier, $\overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}} \cap C_N = (C_N \sqcup B) \cap C_N = C_N$.
Le calcul se simplifie donc grandement :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_N \mid \overline{C_1} \cap \cdots \cap \overline{C_{N-1}}) &= \frac{\mathbb{P}(C_N)}{\mathbb{P}(C_N \sqcup B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(C_N)}{\mathbb{P}(C_N) + \mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\frac{p}{N}}{\frac{p}{N} + (1-p)} \\
&= \frac{p}{p + N(1-p)}.
\end{aligned}$$

129

Supposons, sans perte de généralité, que la voiture est derrière la porte 1, les chèvres derrière les portes 2 et 3.
Le jeu se déroule alors comme suit :

— Sans changement de porte :

  — le spectateur choisit la porte 1, donc l'animateur ouvre indifféremment l'une des deux autres portes, et le spectateur gagne.

  — le spectateur choisit la porte 2, donc l'animateur ouvre la porte 3, et le spectateur perd.

  — le spectateur choisit la porte 3, donc l'animateur ouvre la porte 2, et le spectateur perd.

— Avec changement de porte :

  — le spectateur choisit la porte 1, l'animateur ouvre indifféremment l'une des deux autres portes, le spectateur ouvre l'autre et perd.

  — le spectateur choisit la porte 2, donc l'animateur ouvre la porte 3, le spectateur ouvre la porte 1 et gagne.

  — le spectateur choisit la porte 3, donc l'animateur ouvre la porte 2, le spectateur ouvre la porte 1 et gagne.

Bilan des courses : s'il change de porte, il gagne 2 fois sur 3, sinon seulement 1 fois sur 3.
Il vaut donc mieux changer de porte !