

Intégration

I Intégrale des fonctions en escalier	2
Subdivision	
Fonctions en escalier	
Intégrale des fonctions en escalier	
Propriétés de l'intégrale	
Cas particulier des fonctions réelles	
II Intégrale des fonctions continues par morceaux	6
Fonctions continues par morceaux	
Aparté (continuité uniforme) (HP)	
Définition de l'intégrale!	
Propriétés de l'intégrale	
Cas particulier des fonctions réelles	
Symétrie, translation, périodicité	
Fonctions à valeurs complexes	
III Sommes de Riemann	13
IV Intégration et dérivation	14
Existence d'une primitive pour une fonction continue	
Intégration par parties	
Changement de variable	
V Formules de Taylor globales.	16
Formule de Taylor avec reste intégral	
Inégalité de Taylor-Lagrange	



On fixe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.

On considère le segment $[a, b]$, qui est non trivial (car $a \neq b$).

I. Intégrale des fonctions en escalier

Subdivision

1

Définition.

- Une *subdivision* du segment $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (x_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ telle que $a = x_0 < \dots < x_n = b$.
Les x_k s'appellent les points de la subdivision.
- Le *support* de la subdivision σ , noté $\text{supp}(\sigma)$, est l'ensemble des valeurs prises par la suite, à savoir $\text{supp}(\sigma) = \{x_k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$.
- Le *pas* de la subdivision σ est l'écart maximal entre deux points consécutifs de la subdivision, à savoir $\max_{0 \leq k < n} (x_{k+1} - x_k)$.

- **Subdivision régulière.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite finie $\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une subdivision de $[a, b]$.
Elle est dite *régulière* (la différence entre deux termes consécutifs est constante) et son pas est $\frac{b-a}{n}$.

- **Subdivision associée à une partie.**

Soit $X = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ une *partie* finie du segment $[a, b]$ contenant a et b .

Sans perte de généralités, on peut supposer que les ξ_i sont ordonnés.

On pourra dire que la *partie* X est une subdivision de $[a, b]$.

En toute rigueur, il faudrait parler de la *famille* $(\xi_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ plutôt que de la *partie* $\{\xi_k\}_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

2

Définition. Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

- On dit que σ' est *plus fine* que σ lorsque $\text{supp}(\sigma) \subset \text{supp}(\sigma')$.
- On appelle *union* de σ et σ' , notée $\sigma \vee \sigma'$, la subdivision de support $\text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\sigma')$.

3

preuve

Proposition. Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a, b]$.

Il existe une subdivision de $[a, b]$ plus fine que les subdivisions σ et σ' .



Fonctions en escalier

4

Définition. Une fonction f définie sur le *segment* $[a, b]$ est *en escalier* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ définie sur l'**ouvert** $]x_k, x_{k+1}[$ est constante.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à f .

- **Notation.** On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- **Dessin.** On voit qu'il n'y a aucune contrainte quant aux valeurs de f aux points x_k de la subdivision. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, voici un dessin :

5

Proposition (exemples).

- Une fonction définie sur un segment, constante sauf éventuellement en un nombre fini de points, est en escalier.
- Soit ξ un point de $[a, b]$. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\{\xi\}}$ (restreinte à $[a, b]$) est en escalier.
- La fonction partie entière (restreinte à $[a, b]$) est en escalier.
- La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ (restreinte à $[a, b]$) n'est **pas** en escalier.

- **Stabilité par restriction.** La restriction à un *segment* d'une fonction en escalier est encore en escalier.
- **Aspect borné.** Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs et est donc bornée. Que dire de la réciproque, c'est-à-dire une fonction bornée est-elle en escalier?

6

preuve

Lemme.

- Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier.
Soit σ une subdivision adaptée à f .
Alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f .
- Soit f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions en escalier.
Il existe une subdivision adaptée à f et g .

7

preuve

Proposition (opérations).

- **Linéarité.** Une combinaison linéaire de fonctions en escalier est en escalier.
- **Produit.** Le produit de deux fonctions en escalier est en escalier.
- **Module/valeur absolue.** Le module d'une fonction en escalier est en escalier.

- **Structure.** L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

Intégrale des fonctions en escalier

Définition. Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ adaptée à f , on pose

$$S_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

où ξ_k est n'importe quel point de l'**ouvert** $]x_k, x_{k+1}[$.

On peut prendre $\xi_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

- **Remarque importante.**

Les valeurs prises par f aux points du support de σ n'interviennent pas dans le calcul de $S_\sigma(f)$.

- **Dessin.**

8

preuve

Lemme. Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Soit σ et σ' deux subdivisions adaptées à f .

Alors

$$S_\sigma(f) = S_{\sigma'}(f)$$

9

Définition.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier. Alors l'intégrale de f est :

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(\xi_k)$$

où $\begin{cases} \sigma = (x_0, \dots, x_n) \text{ est n'importe quelle subdivision adaptée à } f \\ \xi_k \text{ n'importe quel point de }]x_k, x_{k+1}[\end{cases}$

- **Exemple important.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

Si f est constante égale à C sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $\int_{[a,b]} f = C(b-a)$.

Si f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors $\int_{[a,b]} f = 0$.

- **Exemple.** Soit f la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ (qui n'est pas un segment!).

On a vu précédemment que $f|_{[1,\pi]}$ est une fonction en escalier.

Comme on vient de définir l'intégrale d'une fonction en escalier, on peut se demander ce que vaut l'intégrale de $f|_{[1,\pi]}$. Alors, vous pariez sur quoi?



Propriétés de l'intégrale

10

preuve

Proposition (inégalité triangulaire). Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors $|f| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et on a $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

11

preuve

Proposition (linéarité). Soit $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et on a

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g$$

12

Question. Montrer que l'application $\Phi: \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle.

$$f \mapsto \int_{[a,b]} f$$

Quel est le rang de Φ ?

Que dire de $\text{Ker } \Phi$?

13

preuve

Proposition (Relation de Chasles).

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in]a, b[$.

Alors les fonctions $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont en escalier et $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f|_{[a,c]} + \int_{[c,b]} f|_{[c,b]}$.

Cas particulier des fonctions réelles

14

preuve

Proposition (Positivité et croissance).

Soit $f, g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions en escaliers à valeurs réelles.

— **Positivité.** Si $f \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.

— **Croissance.** Si $f \leq g$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.

- **Dessin et interprétation.** Pour une fonction en escalier f réelle *positive*, l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ représente la somme des aires des rectangles délimités par sa courbe représentative.

C'est donc l'aire de la portion du plan contenue entre l'axe Ox et la courbe représentative de f .

Pour une fonction réelle non nécessairement positive, il en est de même, mais les portions situées en dessous de l'axe Ox sont comptées négativement. On parle de l'*aire algébrique*.

Objectif à venir

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$.

Nous allons définir l'intégrale de f , pourvu que f soit « raisonnable » (nous allons voir ce que l'on met derrière cet adjectif).

Bien sûr, pour une fonction à valeurs réelles **positives**, cette intégrale mesurera l'aire de la portion du plan contenue entre l'axe Ox et la courbe $\mathcal{C}_f$.

Pour une fonction réelle non nécessairement positive, il s'agira de l'aire algébrique.



II. Intégrale des fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux

15

Définition. Une fonction f définie sur le segment $[a, b]$ est *continue par morceaux* lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle **ouvert** $]x_k, x_{k+1}[$,

- est continue et
- est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Une telle subdivision est dite *adaptée* à f .

• **Reformulation.** Les deux conditions s'énoncent également :

- la restriction $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ est continue et
- la restriction $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ admet des limites finies en x_k et x_{k+1} .

• **Notation.** On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

• **Dessin.** Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

• **Exemple.** Toute fonction en escalier est CPM.

Évidemment, toute fonction continue est CPM.

• **Exemple/Contre-exemple.**

$$f: [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• **Stabilité par restriction.** La restriction d'une fonction CPM est encore CPM.

• **Aspect borné.** Une fonction CPM est bornée.

Que dire de la réciproque ?

16

Lemme.

- Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction CPM.
Soit σ une subdivision adaptée à f .
Alors toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f .
- Soit f et $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions CPM.
Il existe une subdivision adaptée à f et g .

17

preuve

Proposition (opérations).

- **Linéarité.** Une combinaison linéaire de fonctions CPM est CPM.
- **Produit.** Le produit de deux fonctions CPM est CPM.
- **Module/valeur absolue.** Le module d'une fonction CPM est CPM.

• **Structure.**

L'ensemble $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.



Aparté (continuité uniforme) (HP)

Nous allons introduire une notion bien pratique sur $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

18

Définition. Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ **bornée**, on pose : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$.

C'est la **norme infinie** de f .

Cette définition a bien du sens, car f est supposée bornée.

19

Proposition. La norme infinie vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ (homogénéité)
- $\forall f, g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (inégalité triangulaire)
- $\forall f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K}), \|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$ (séparation)

- **Rappel.** Une fonction CPM est bornée (mais n'atteint pas nécessairement ses bornes).
- **Objectif.** On va approximer une fonction CPM par des fonctions en escalier.

20

preuve

Proposition (Approximation uniforme).

Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}([a, b], \mathbb{K})$ une fonction continue par morceaux (donc définie sur un segment).

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

La preuve de ce théorème est hors programme. Mais nous allons essayer d'en esquisser les grandes lignes. Nous allons avoir besoin d'une nouvelle notion, celle « d'uniforme continuité ».

- **Définition (hors programme).** Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

— On dit que f est *continue* sur I lorsque f est continue en tout point a de I , c'est-à-dire lorsque

$$\forall a \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

— On dit que f est *uniformément continue* sur I lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in I, |x - x'| \leq \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

- **Explication.** La différence entre la continuité et la continuité uniforme est l'ordre des quantificateurs. Grosso modo, les deux notions reposent sur le fait que si l'on veut un contrôle ε -précis en sortie, il faut un contrôle δ -précis en entrée.

Pour la continuité, le δ dépend à la fois de ε mais aussi du point a où l'on affirme la continuité :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a \in I, \exists \delta_a > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Il est possible par exemple que le contrôle demandé en entrée soit de plus en plus exigeant au fur et à mesure que l'on se rapproche d'un point problématique ou de l'infini.

Les fonctions uniformément continues sont précisément celles pour lesquelles, à ε fixé, un seul δ convient pour tous les points $a \in I$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall a \in I, \forall x \in I, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

- **Exemple.** La fonction $f : [3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, car grosso modo, à ε fixé,

le δ_a correspondant à un $a \in [3, +\infty[$ devient de plus en plus minuscule à mesure que a augmente, et aucun $\delta > 0$ ne conviendra pour tous les $a \in [3, +\infty[$.

- **Autre exemple.** La fonction $x \mapsto \sin(x^2)$ est continue et bornée, mais n'est pas uniformément continue sur $[3, +\infty[$. La preuve est délicate.

Indication : considérer deux suites (x_n) et (x'_n) telles que $|x_n - x'_n| \rightarrow 0$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| \not\rightarrow 0$.

Indication bis : montrer que $x_n = \sqrt{n\pi}$ et $x'_n = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ conviennent.

- **Exercice (faisable par un élève de PCSI).** Montrer qu'une fonction K -lipschitzienne est uniformément continue.

Et on peut déduire (avec l'inégalité des accroissements finis) qu'une fonction dérivable à dérivée bornée est uniformément continue.

- **Théorème de Heine (hors programme).**

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Définition de l'intégrale!

21

preuve

Théorème (définition de l'intégrale). Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

- Il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f - \varphi_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Pour une telle suite de fonctions en escalier, la suite de scalaires $\left(\int_{[a, b]} \varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et la limite ne dépend pas du choix de (φ_n) .

On peut alors définir l'intégrale de f via

$$\int_{[a, b]} f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \varphi_n$$

où $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite de fonctions en escalier qui converge vers f au sens de la norme infinie.

22

Définition étendue. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Soit $c, d \in [a, b]$ non nécessairement ordonnés.

On pose

$$\int_c^d f = \begin{cases} \int_{[c, d]} f_{|[c, d]} & \text{si } c < d \\ -\int_{[d, c]} f_{|[d, c]} & \text{si } d < c \\ 0 & \text{si } c = d. \end{cases}$$

• **Remarque.**

Le réel $\int_c^d f$ se note aussi $\int_c^d f(t) dt$, notation dans laquelle la lettre t a le statut de variable muette.

23

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. La *valeur moyenne* de f est le nombre $\frac{1}{b-a} \int_{[a, b]} f$.

- **Autre définition.** La valeur moyenne est l'unique constante α qui vérifie $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} \alpha$.



Propriétés de l'intégrale

Les propriétés fondamentales de l'intégrale des fonctions en escalier s'étendent à l'intégrale des fonctions CPM par passage à la limite. Passons en revue toutes ces propriétés.

24 **Proposition (inégalité triangulaire).** Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors $|f| \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et on a $\left| \int_{[a, b]} f \right| \leq \int_{[a, b]} |f|$.

- **Attention.** Lorsque $c, d \in [a, b]$, la définition de $\int_c^d f$ conduit par disjonction de cas à l'inégalité :

$$\left| \int_c^d f \right| \leq \int_{\min(c, d)}^{\max(c, d)} |f|$$

25 **Proposition (linéarité).** Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

preuve

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et on a

$$\int_{[a, b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a, b]} f + \mu \int_{[a, b]} g.$$

- **Reformulation.** L'application $\Psi : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire non nulle.

$$f \mapsto \int_{[a, b]} f$$

Quel est le rang de Ψ ?

Que dire de $\text{Ker } \Psi$?

26 **Proposition (relation de Chasles).**

preuve

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

— Soit $c \in]a, b[$. Alors :

Alors les fonctions $f|_{[a, c]}$ et $f|_{[c, b]}$ sont CPM et on a $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f|_{[a, c]} + \int_{[c, b]} f|_{[c, b]}$.

— Soit $x, y, z \in [a, b]$. Alors :

$$\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f.$$

- **Remarque très importante.** Dans la relation de Chasles, les bornes sont quelconques (elles ne sont pas nécessairement ordonnées).

En revanche, dans l'inégalité triangulaire, les bornes sont ordonnées.

Cas particulier des fonctions réelles

27

preuve

Proposition (Positivité et croissance).

Soit $f, g \in \mathcal{C}\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues par morceaux à valeurs réelles.

- **Positivité.** Si $f \succcurlyeq 0$, alors $\int_{[a, b]} f \geq 0$.
- **Croissance.** Si $f \preccurlyeq g$, alors $\int_{[a, b]} f \leq \int_{[a, b]} g$.

• En français.

L'intégrale-dans-le-bon-sens d'une fonction réelle positive est un réel positif.

L'intégrale-dans-le-bon-sens conserve les inégalités.

• Attention.

Lorsque f est positive sur $[a, b]$ et

Si $f \succcurlyeq 0$ sur $[a, b]$ et si $c \geq d \in [a, b]$, alors $\int_c^d f \leq 0$.

On fera donc attention à l'ordre des bornes lors de l'utilisation de ces deux propriétés.

• Intégration VERSUS Dérivation.

De manière vague, la croissance dit que l'on peut « intégrer des inégalités ». Mais attention, il est crucial de s'assurer que les bornes de l'intégrale sont « dans le bon sens » avant d'intégrer une inégalité.

Il y a là une différence fondamentale entre l'intégration et la dérivation. Il est possible d'intégrer une inégalité mais jamais de la dériver.

On a $\forall t \in \mathbb{R}, \sin t \leq 1$ mais on n'a pas ~~$\forall t \in \mathbb{R}, \cos t \leq 0$~~

Il n'est pas non plus possible de « désintégrer » une inégalité.

On a (WHY?) $\int_{-1}^1 t \, dt \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{39} \, dt$ mais on n'a pas ~~$\forall t \in [-1, 1], t \leq \frac{1}{39}$~~

28

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}([a, b], \mathbb{K})$.

Alors f est bornée, donc $\|f\|_\infty$ existe et on a :

$$\left| \int_{[a, b]} f \right| \leq \|f\|_\infty (b - a).$$

De plus,

$$\forall c, d \in [a, b], \quad \left| \int_c^d f \right| \leq \|f\|_\infty |d - c|.$$



Théorème (critère de nullité d'une fonction continue). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{cases} f \text{ continue} \\ f \text{ positive} \\ \int_{[a,b]} f = 0 \end{cases} \implies f \text{ est nulle sur } [a, b]$$

Une fonction *continue*, positive, d'intégrale nulle est nulle (sur le segment d'intégration).

- **Attention.** Si l'on enlève l'hypothèse de continuité, le théorème est archi faux! Penser à l'indicatrice d'un point.

- **Corollaire (stricte positivité).**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*.

Si f est non nulle, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

- **Dans la pratique.** On a :

$$\begin{cases} f \text{ continue} \\ \forall t \in [a, b], f(t) \geq 0 \\ \exists t_0 \in [a, b], f(t_0) \neq 0 \end{cases} \implies \int_{[a,b]} f > 0$$

et

$$\begin{cases} f \text{ et } g \text{ continues} \\ \forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t) \\ \exists t_0 \in [a, b], f(t_0) < g(t_0) \end{cases} \implies \int_{[a,b]} f < \int_{[a,b]} g$$



30

preuve

Proposition (parité, imparité).

Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction CPM.

— Si la fonction f est paire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

— Si la fonction f est impaire, alors :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

31

preuve

Lemme (invariance par translation).

Soit $T \in \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Pour tout $a < b$, on a :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x+T) dx$$

32

Proposition (périodicité).

Soit $T > 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$ et T -périodique.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Fonctions à valeurs complexes

33

Proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction CPM. On a alors :

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \operatorname{Re} f + i \int_{[a,b]} \operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad \overline{\int_{[a,b]} f} = \int_{[a,b]} \overline{f}.$$



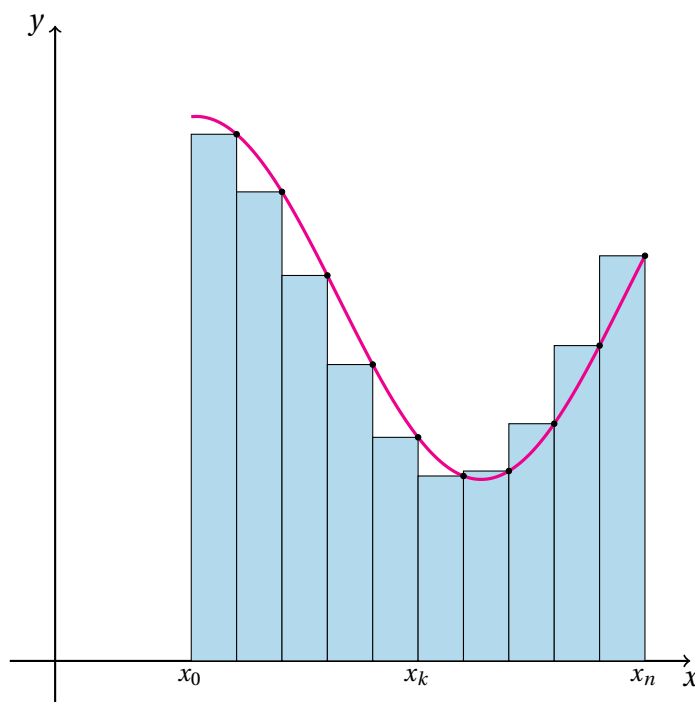
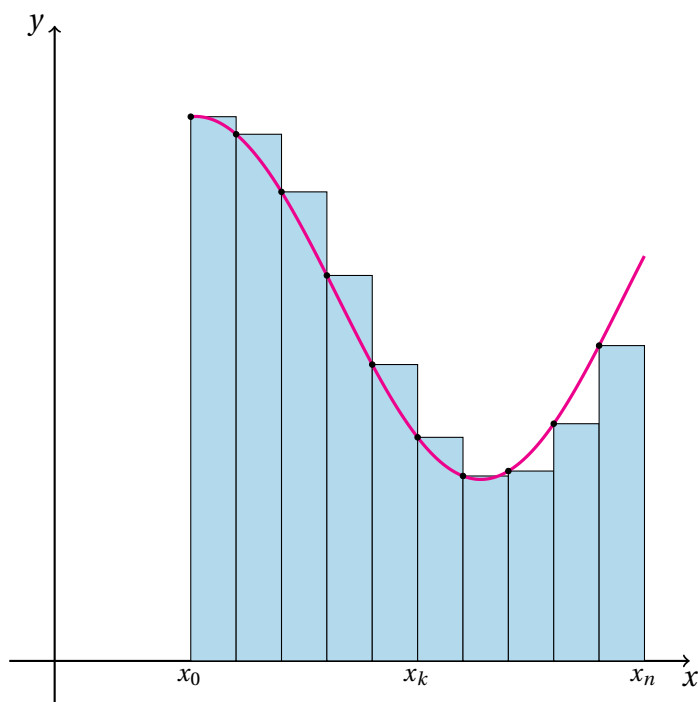
III. Sommes de Riemann

34

Définition. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Les sommes de Riemann (à gauche / à droite) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ associée à f sont :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$



35

Proposition (théorème des sommes de Riemann) Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Les suites $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_{[a, b]} f$.

- **Pour les yeux.** Pour f CPM sur $[a, b]$, on a

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f \quad \text{et} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f$$

- **Précision.** Lorsque f est lipschitzienne, on peut montrer que l'erreur de la méthode des rectangles (méthode qui consiste à approcher l'intégrale par la somme de Riemann S_n ou S'_n) est en $O(\frac{1}{n})$, c'est-à-dire :

$$\left| \int_{[a, b]} f - S_n \right| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \left| \int_{[a, b]} f - S'_n \right| = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

- **Cas particulier** $[0, 1]$.

36

Question. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.



IV. Intégration et dérivation

Dans cette partie, I désigne un intervalle non trivial.

Existence d'une primitive pour une fonction continue

37

Théorème fondamental de l'Analyse. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue. Soit $a \in I$.

— La fonction $\Phi : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable sur I , et sa dérivée vaut f .
$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

Donc Φ est UNE primitive de f .

— De plus, on a $\Phi(a) = 0$.

Donc Φ est LA primitive de f qui s'annule en a .

• **Corollaire important.** Une fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

• **Pas de réciproque.**

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive mais n'est pas continue!
$$x \mapsto \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En effet, $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée f , donc est une primitive de f .
$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Une telle fonction f n'admet pas de limite en 0^+ (ni en 0^- d'ailleurs) donc n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$.

On a ici un exemple de fonction « primitivable », mais non continue par morceaux.

38

preuve

Proposition. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

On a

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad \text{où } F \text{ est UNE primitive de } f$$

39

Corollaire. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\forall a, b \in I, \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt.$$



Intégration par parties

40

Proposition. Soit $u, v : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\forall a, b \in I, \quad \int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Changement de variable

41

Proposition. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Soit $\varphi : J \rightarrow I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors :

$$\forall \alpha, \beta \in J, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)ds$$

- La fonction φ de l'énoncé n'a pas besoin d'être bijective (même si elle le sera souvent dans nos exemples). On lui demande juste d'être de classe $\mathcal{C}^1$.
- **De G à D.** C'est quand on reconnaît une forme $(f \circ \varphi)\varphi'$. C'est en général « bas de gamme », car on peut se passer de la formule.
- **De D à G.** Il vaut avoir une idée géniale : celle d'introduire une bonne fonction φ .

Puis :

- on remplace s par $\varphi(t)$
- on remplace ds par $\varphi'(t)dt$
- on adapte les bornes.



V. Formules de Taylor globales

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

42

Définition (polynôme de Taylor d'une fonction).

Soit $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

Soit $a \in I$ (un point en lequel f est définie).

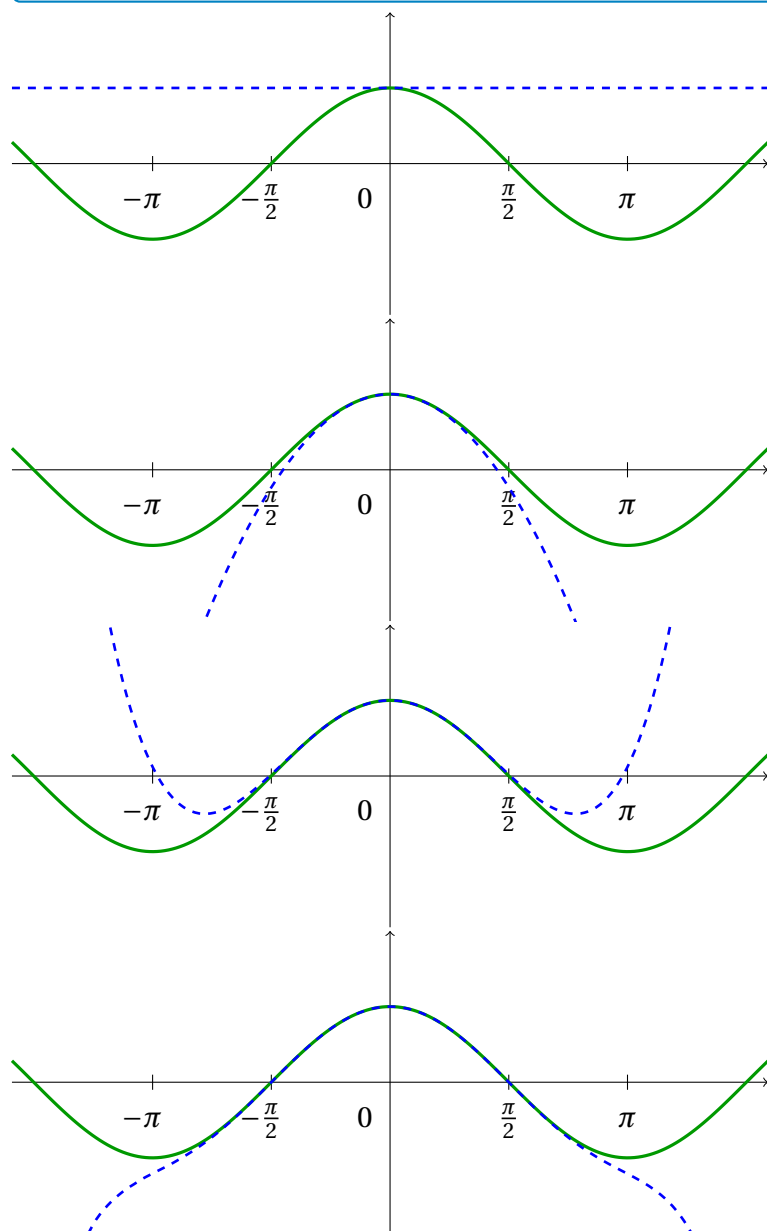
La fonction polynomiale, notée $\mathbb{T}_{n,a,f}$ (par Madame Tête), définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_{n,a,f} : x &\mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\end{aligned}$$

est appelée « fonction polynomiale de Taylor de f d'ordre n en a ».

En particulier,

$$\mathbb{T}_{0,a,f} : x \mapsto f(a) \quad \mathbb{T}_{1,a,f} : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) \quad \mathbb{T}_{2,a,f} : x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$



Formule de Taylor avec reste intégral

43

Un calcul. Pour $a, x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = \dots\dots\dots$$

44

Proposition (Formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.

— On a

$$\forall a, b \in I, \quad f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt$$

— Soit $a \in I$. On a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

• **Autre écriture.** On a

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \mathbb{T}_{n,a,f}(x) + \mathbb{R}_{n,a,f}(x) \quad \text{où} \quad \mathbb{R}_{n,a,f}(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

Ainsi, f est égale à une fonction polynomiale + une fonction qui se présente sous la forme d'une intégrale (la variable x est enfouie au sein de l'intégrale et est présente dans la borne du haut de l'intégrale).

• **Cas particulier lorsque $0 \in I$.**

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

• **Remarque sur les hypothèses.** Pour écrire la formule à l'ordre n , la fonction est supposée de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. La première partie $\mathbb{T}_{n,a,f}$ fait intervenir les dérivées $f^{(0)}, \dots, f^{(n)}$ évaluées en a .

La deuxième partie $\mathbb{R}_{n,a,f}$ fait intervenir la dérivée $f^{(n+1)}$.

• **À propos du reste.** Le reste intégral ne se calcule quasiment jamais! En revanche, on peut le majorer en module (inégalité triangulaire).

• **Moyen mnémotechnique pour le reste.**

— **Avec le petit calcul.** Il est censé vous aider à retenir le reste intégral (car on peut se dire dans sa tête « si $f^{(n+1)}$ est constante, alors le $\mathbb{R}$ doit fournir le terme suivant dans la partie régulière »).

— **Cas particulier : prendre pour f une fonction polynomiale.**

D'après le chapitre Polynômes, on a

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$$

Ainsi, si f est polynomiale de degré $\leq n$, alors f est égale à $\mathbb{T}_{n,a,f}$!

On vérifie que l'on a bien dans ce cas $\mathbb{R}_{n,a,f} = 0$ (WHY?).

— **Cas particulier : prendre $n = 0$.**

Pour $f \in \mathcal{C}^1$, on a (WHY?) $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ que l'on peut interpréter comme

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) \frac{(b-t)^0}{0!} dt$$



45 Exemple. Écrire la formule pour la fonction $f : t \mapsto \ln(1 + t)$ au point $a = 0$ et à l'ordre n .

En quoi l'égalité remarquable suivante (à montrer) est-elle différente de la précédente?

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (-1)^m \frac{t^m}{1+t} dt$$



46

Proposition (Inégalité de Taylor-Lagrange).

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$.

— On a

$$(1) \quad \forall a, b \in I, \quad \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leq K \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, b]$. Par exemple, $K = \max_{t \in [a, b]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Nota Bene : $K = K_{n,a,b}$.

— Soit $a \in I$. On a

$$(2) \quad \forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, x]$. Par exemple, $K = \max_{t \in [a, x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Nota Bene : $K = K_{n,a,x}$.

• **Cas particulier $0 \in I$.**

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où K est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $\overset{\curvearrowright}{[0, x]}$. Par exemple, $K = \max_{t \in [0, x]} |f^{(n+1)}(t)|$. NB : $K = K_{n,x}$.

• **À retenir.** La formule (2) est du type :

$$\forall x \in I, \quad \left| f(x) - \mathbb{T}_{n,a,f}(x) \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{ou encore} \quad \forall x \in I, \quad \left| \mathbb{R}_{n,a,f}(x) \right| \leq K \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ainsi, l'écart entre f et sa fonction polynomiale de Taylor d'ordre n en a (c'est-à-dire le reste intégral d'ordre n en a) est majoré en valeur absolue par une certaine quantité dépendant de $f^{(n+1)}$, de a , de x , de n (en fait, de $n+1$).

• **Cas particulier.** L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n=0$ sur $[a, b]$, version (1), s'écrit :

$$\left| f(b) - \mathbb{T}_{0,a,f}(b) \right| \leq K \frac{|b-a|^{0+1}}{(0+1)!}$$

A quoi cette inégalité vous fait-elle penser ?

• **Cas d'une fonction à valeurs réelles.**

Soit $\boxed{a < b}$ dans I .

On a

$$m \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où m est un minorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a, b]$ et M est un majorant de $f^{(n+1)}$ sur $[a, b]$.

Par exemple, $m = \min_{t \in [a, b]} f^{(n+1)}(t)$ et $M = \max_{t \in [a, b]} f^{(n+1)}(t)$.

47

Question. Soit $x \in [0, 1]$. En appliquant la formule de Taylor reste intégral à une fonction bien choisie,

montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.



48 Question.

(i) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

(ii) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$$

(iii) Montrer que

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$



Intégration

preuve et éléments de correction

3

Prendre la subdivision $\sigma \vee \sigma'$.

6

• Soit σ' plus fine que $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$.

Commençons par le cas où σ et σ' diffèrent d'un point.

Considérons une subdivision σ' de $[a, b]$ telle que $\text{supp}(\sigma')$ contienne un point c de plus que $\text{supp}(\sigma)$.

Il existe $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $c \in]x_i, x_{i+1}[$ et on a :

$$\sigma' = (x_0, \dots, x_i, c, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x'_0, \dots, x'_{n+1}).$$

En distinguant les cas $\begin{cases} k \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket \\ k = i \\ k = i+1 \\ k \in \llbracket i+2, n \rrbracket \end{cases}$ on vérifie que la fonction $f|_{]x'_k, x'_{k+1}[}$ est constante.

Donc σ' est adaptée à f .

On démontre alors le résultat par récurrence sur $\text{card}(\text{supp}(\sigma')) - \text{card}(\text{supp}(\sigma))$.

• Soit σ une subdivision adaptée à f , et σ' une subdivision adaptée à g .

Alors la subdivision $\sigma \vee \sigma'$ est plus fine que σ donc est adaptée à f .

Idem pour g .

Ainsi, la subdivision $\sigma \vee \sigma'$ est adaptée à f et g .

7

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et g (il en existe au moins une, cf. le lemme).

Alors les fonctions f et g sont constantes sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

Donc il en est de même de $\lambda f + \mu g$, $f g$.

Donc $\lambda f + \mu g$ et $f g$ sont en escalier et σ en est une subdivision adaptée.

8

Notons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$, et α_i la valeur prise par f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

— **Étape 1. Cas où σ' est plus fine que σ avec 1 point de différence.**

Considérons d'abord le cas où σ' est obtenue, à partir de σ , par ajout d'un nouveau point ξ .

Ainsi, σ' est de la forme :

$$\sigma' = (x_0, \dots, x_i, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Par définition, on a alors :

$$S_{\sigma'}(f) = \sum_{k=0}^{i-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k + (\xi - x_i) \mu_i + (x_{i+1} - \xi) \mu_i + \sum_{k=i+1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \mu_k$$

En réunissant les deux termes centraux, il vient $S_{\sigma'}(f) = S_{\sigma}(f)$.

— **Étape 2. Cas où σ' est plus fine que σ .**

Par récurrence sur le nombre de points du support de σ' qui ne sont pas dans le support de σ , c'est-à-dire sur $d = |\text{supp}(\sigma')| - |\text{supp}(\sigma)|$.



— **Étape 3. Cas où σ' est quelconque.**

Posons $\sigma'' = \sigma \vee \sigma'$.

Cette subdivision σ'' est plus fine que σ , donc l'étape 2 dit que $S_{\sigma''} = S_{\sigma}$.

Idem avec σ' .

D'où

$$S_{\sigma}(f) = S_{\sigma''}(f) \quad \text{et} \quad S_{\sigma'}(f) = S_{\sigma''}(f).$$

Ainsi, $S_{\sigma}(f) = S_{\sigma'}(f)$.

10

Idée. L'inégalité triangulaire pour une somme de réels ou de complexes donne $|S_{\sigma}(f)| \leq S_{\sigma}(|f|)$.

La fonction $|f|$ est en escalier et toute subdivision de $[a, b]$ adaptée à f est adaptée à $|f|$.

En considérant une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ adaptée à f et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, un point ξ_i de $]x_i, x_{i+1}[$, l'inégalité triangulaire pour une somme donne :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} f \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) |f(\xi_i)| \\ &= \int_{[a,b]} |f|. \end{aligned}$$

11

Introduire une subdivision adaptée à f et à g .

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et g (donc aussi à $\lambda f + \mu g$) et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, un point ξ_i de $]x_i, x_{i+1}[$. Alors :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) (\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) + \mu \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) g(\xi_i) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g. \end{aligned}$$

13

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, un point ξ_i de $]x_i, x_{i+1}[$.

Quitte à rajouter c au support de σ , on peut supposer que c fait partie de la subdivision. Disons $c = x_k$ où $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Alors $(x_0, \dots, x_k)$ et $(x_k, \dots, x_n)$ sont des subdivisions de $[a, c]$ et $[c, b]$ adaptées aux restrictions $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) + \sum_{i=k}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f. \end{aligned}$$



14

- Soit σ une subdivision adaptée à f . Si $f \geq 0$, l'inégalité $S_\sigma(f) \geq 0$ est immédiate.
- Puisque $g - f \geq 0$, par linéarité et positivité de l'intégrale $\int_{[a,b]} g - \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} (g - f)$ est positif ou nul.

17

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et g .

Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, les restrictions $f|_{]x_k, x_{k+1}[}$ et $g|_{]x_k, x_{k+1}[}$ sont continues et sont prolongeables par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.

Donc il en est de même de $(\lambda f + \mu g)|_{]x_k, x_{k+1}[}$ et $(fg)|_{]x_k, x_{k+1}[}$.

20

Cas des fonctions continues. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue et donc il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ dès que $|x - y| \leq \delta$.

Fixons un tel δ ainsi que $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{b-a}{n} \leq \delta$.

Notons $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Considérons φ la fonction en escalier sur $[a, b]$ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_k) & \text{si } x \in [a_k, a_{k+1}[\text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ f(b) & \text{si } x = b. \end{cases}$$

Montrons que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

— Pour $x = b$. Il est clair que $f(b) - \varphi(b) = 0$.

— Soit $x \in [a, b[$. Il existe k tel que $x \in [a_k, a_{k+1}[$, et puisque $|x - a_k| \leq \frac{b-a}{n} \leq \delta$:

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

La fonction φ répond donc au problème.

Cas des fonctions continues par morceaux. Considérons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f et, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

notons f_i la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$

et $\tilde{f}_i$ le prolongement par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$ de f_i .

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la première partie, il existe, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, une fonction $\varphi_i \in \mathcal{C}([x_i, x_{i+1}], \mathbb{K})$ telle que $|\tilde{f}_i - \varphi_i| \leq \varepsilon$.

Considérons la fonction φ définie sur $[a, b]$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]x_k, x_{k+1}[\text{ où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ f(x_k) & \text{si } x = x_k \text{ où } k \in \llbracket 0, n \rrbracket. \end{cases}$$

La fonction φ répond au problème.

21

- Pour $n \in \mathbb{N}$, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$, il existe d'après APPROX une fonction en escalier ϕ_n telle que $|f - \phi_n| \leq \frac{1}{n+1}$. La suite $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convient.



— Soit $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ telle que : $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Notons $\alpha_n = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \phi_n(x)|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— Montrons que la suite $\left(\int_{[a, b]} \phi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Tout d'abord, $|f|$ est bornée par une constante M .

Ainsi, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|\phi_n(x)| = |f(x) + (\phi_n(x) - f(x))| \leq |f(x)| + |\phi_n(x) - f(x)| \leq M + \alpha_n,$$

et donc, d'après les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\left| \int_{[a, b]} \phi_n \right| \leq \int_{[a, b]} |\phi_n| \leq (b-a)(M + \alpha_n).$$

On conclut en remarquant que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, étant convergente, est bornée.

— D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, il existe une application γ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite $\left(\int_{[a, b]} \phi_{\gamma(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

Notons L sa limite.

Par ailleurs, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$|\phi_n(x) - \phi_{\gamma(n)}(x)| \leq |\phi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \phi_{\gamma(n)}(x)| \leq \alpha_n + \alpha_{\gamma(n)},$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a, b]} \phi_n - \int_{[a, b]} \phi_{\gamma(n)} \right| &= \left| \int_{[a, b]} (\phi_n - \phi_{\gamma(n)}) \right| \\ &\leq \int_{[a, b]} |\phi_n - \phi_{\gamma(n)}| \leq (b-a)(\alpha_n + \alpha_{\gamma(n)}). \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et, par extraction, $\alpha_{\gamma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \phi_n = L$.

— Soit $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite de fonctions en escalier telle que :

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \psi_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Notons $\beta_n = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \psi_n(x)|$, pour $n \in \mathbb{N}$.

En remarquant que, pour tout $x \in [a, b]$, on a pour tout entier n :

$$|\phi_n(x) - \psi_n(x)| \leq |\phi_n(x) - f(x)| + |f(x) - \psi_n(x)| \leq \alpha_n + \beta_n$$

on obtient :

$$\left| \int_{[a, b]} \phi_n - \int_{[a, b]} \psi_n \right| \leq \int_{[a, b]} |\phi_n - \psi_n| \leq (b-a)(\alpha_n + \beta_n),$$

et donc $\int_{[a, b]} \phi_n - \int_{[a, b]} \psi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi $\left(\int_{[a, b]} \phi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\int_{[a, b]} \psi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ont même limite.



25

Idée. Par passage à la limite à partir de fonctions en escalier.

En prenant $\epsilon = \frac{1}{n+1}$, on introduit deux suites de fonctions en escalier $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $|f - \phi_n| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|g - \psi_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Toutes les fonctions $\lambda\phi_n + \mu\psi_n$ sont en escalier.

De plus, pour tout $x \in [a, b]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$|(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)(x) - (\lambda f + \mu g)(x)| \leq |\lambda| |\phi_n(x) - f(x)| + |\mu| |\psi_n(x) - g(x)| \leq \frac{|\lambda| + |\mu|}{n+1},$$

et par conséquent :

$$0 \leq \sup_{x \in [a, b]} |(\lambda f + \mu g - \lambda\phi_n - \mu\psi_n)(x)| \leq \frac{|\lambda| + |\mu|}{n+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite de fonctions en escalier $(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses pour $\lambda f + \mu g$ donc :

$$\begin{aligned} \int_{[a, b]} (\lambda f + \mu g) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} (\lambda\phi_n + \mu\psi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lambda \int_{[a, b]} \phi_n + \mu \int_{[a, b]} \psi_n \right) && \text{par linéarité de l'intégrale sur } \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \\ &= \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \phi_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} \psi_n && \text{par linéarité de la limite} \\ &= \lambda \int_{[a, b]} f + \mu \int_{[a, b]} g. \end{aligned}$$

26

Le cas où x, y, z ne sont pas distincts est facile.

Traitons le cas où ils sont tous distincts.

27

Utiliser l'inégalité triangulaire!

29

Raisonnement par l'absurde : supposer que f n'est pas la fonction nulle.

Alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$ (car f est positive).

Par continuité de f , il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall t \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad \frac{f(x_0)}{2} \leq f(t)$$

$$\text{Posons } \varphi : t \mapsto \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{si } t \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors φ est en escalier, et on a $\varphi \leq f$.

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\underbrace{\int_{[a, b]} \varphi}_{\lambda \frac{f(x_0)}{2}} \leq \int_{[a, b]} f$$



où λ est la longueur de l'intervalle non trivial $[a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Comme $\lambda \frac{f(x_0)}{2} > 0$, on a

$$0 < \int_{[a,b]} f$$

30

• Étape 1.

Pour toute $g \in CM([0, a], \mathbb{K})$, notons $\tilde{g}$ la fonction définie sur $[-a, 0]$ par

$$\forall x \in [-a, 0], \quad \tilde{g}(x) = f(-x)$$

Si $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ est une subdivision adaptée à g , il est clair que la fonction $\tilde{g}$ est continue par morceaux sur $[-a, 0]$ et que $\tilde{\sigma} = (-x_n, \dots, -x_0)$ en est une subdivision adaptée.

Montrons pour commencer que $\int_{[0,a]} g = \int_{[-a,0]} \tilde{g}$.

Cas d'une fonction en escalier Soit $\varphi \in Esc([0, a], \mathbb{K})$.

Considérons $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ .

Soit i ; notons c_i la valeur de la fonction φ sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Alors la fonction $\tilde{\varphi}$ est constante égale à c_i sur $] -x_i, -x_{i-1}[$.

Ainsi, $\tilde{\varphi}$ est en escalier sur $[-a, 0]$ de subdivision adaptée $\tilde{\sigma} = (-x_n, \dots, -x_0)$.

On a alors :

$$\int_{[0,a]} \varphi = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) c_i = \sum_{i=1}^n (-x_{i-1} - (-x_i)) c_i = \int_{[-a,0]} \tilde{\varphi}.$$

Cas général Soit $g \in CM([0, a], \mathbb{K})$.

Considérons (φ_n) une suite de fonctions en escalier sur $[0, a]$ telle que $\|g - \varphi_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $\|\tilde{g} - \tilde{\varphi}_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le cas précédent, on a $\int_{[0,a]} \varphi_n = \int_{[-a,0]} \tilde{\varphi}_n$.

Par passage à la limite, $\int_{[0,a]} g = \int_{[-a,0]} \tilde{g}$.

• Étape 2

Soit $f \in CM([-a, a], \mathbb{K})$.

1. Si f est paire, on a donc :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx$$

Avec Chasles, on en déduit :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx.$$

2. Si f est impaire, alors :

$$\int_0^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(-x) dx = - \int_{-a}^0 f(x) dx$$

ce qui donne :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



Cas où la fonction f est continue L'application $x \mapsto f(x - T)$ est continue sur $[a + T, b + T]$. Dans ces conditions, puisque $s \mapsto s + T$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le formule de changement de variable, et donc :

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x - T) dx = \int_a^b f(s) ds$$

Cas où la fonction f est continue par morceaux Soit $(u_0, \dots, u_n)$ une subdivision du segment $[a, b]$ adaptée à f . Il est clair que l'application $g : x \mapsto f(x - T)$ est continue par morceaux sur $[a + T, b + T]$ et que $(u_0 + T, \dots, u_n + T)$ est une subdivision de $[a + T, b + T]$ adaptée à g . D'après la relation de Chasles et le cas précédent :

$$\begin{aligned} \int_{a+T}^{b+T} f(x - T) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k+T}^{u_{k+1}+T} f(x - T) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt - F(x) + F(a)$ est dérivable, de dérivée nulle et nulle en a .

Donc c'est la fonction nulle et en particulier, pour $x = b$, on a donc $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

