Espace euclidien

exercices

28exo-Euclidien.pdf, 24 mai 2024, 21:25

101 Produit scalaire ?

Pour $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\varphi(X, X') = 2xx' + 2yy' + xy' + x'y \quad \text{et} \quad \psi(X, X') = 2xx' - 2yy' + xy' + x'y.$$

1. Vérifier que φ et ψ sont des formes bilinéaires symétriques.
2. φ et ψ sont-ils des produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$?

102 Produit scalaire chez les polynômes (1)

Soit $n \geqslant 2$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \longmapsto & -\displaystyle\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x \end{array}$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E. Expliciter la norme euclidienne associée.

103 Produit scalaire chez les polynômes (2)

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts.
Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Vérifier qu'on définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E.
3. Déterminer la distance de $Q \in E$ au sous-espace $H = \left\{P \in E \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.

104 Matrices

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Montrer que $\langle \mid \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^\perp$.

105 Orthogonal et opérations

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E. Montrer que :

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad \text{et} \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

106 Gram-Schmidt

Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

107 Un résultat important

Soit E un espace préhilbertien.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E vérifiant $E = F \oplus G$.
Montrer que $G = F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.
Proposer également une preuve lorsque l'espace E est euclidien (c'est-à-dire de dimension finie).

Avec Cauchy-Schwarz

108 **Astucieux**

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leqslant 1$. Démontrer que $(x+y+z)^2 \leqslant \frac{17}{10}$.

109 **Méga classique**

Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Étudier le cas d'égalité.
On suppose en outre que $x_k > 0$ pour tout k. Démontrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$$

110 **Classique**

Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\right)^2 \leqslant \frac{n^2(n+1)}{2}$$

111 **Pas complètement évident**

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ strictement positive sur $[0,1]$.
Montrer

$$\int_0^1 \frac{1}{f(t)} \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}$$

112 **Délicat**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in [a,b]$, on a

$$f^2(t) \leqslant (t-a) \int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u.$$

2. En déduire que

$$\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u$$

113 **La routine**

Soit $E = \mathcal{C}\left([a,b], \mathbb{R}_+^*\right)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs strictement positives.
Déterminer

$$\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Petits calculs

114

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère $F = \text{Vect}\Big((1,0,2),(1,-1,0)\Big)$.
Le vecteur $(2,2,0)$ est-il dans $F^\perp$?
Déterminer $F^\perp$.

115

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique.
On considère le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$G = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z+t = 0 \text{ et } x+2y+3z+t = 0\Big\}.$$

Déterminer un système d'équations de $G^\perp$.

116

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x-y+z-t = 0. \end{cases}$$

Déterminer une base de F.
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

117

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère l'endomorphisme f canoniquement associé à $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$.
Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ à déterminer.

118

On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.
On considère le vecteur v et le sous-espace vectoriel F

$$v = (2,2,2) \qquad F = \Big\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 0\Big\}$$

1. Déterminer le projeté orthogonal de v sur F.
2. Déterminer la distance de v à F.

119

On souhaite déterminer

$$m = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi \Big(x - (a\cos x + b\sin x)\Big)^2 \mathrm{d}x.$$

1. Justifier que m existe.
2. On note $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$.
   (a) Justifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.
   (b) Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x$.
   (c) On note $\text{id} : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Quel est le lien entre id, F et m ?
3. Déterminer le projeté orthogonal de id sur F.
4. En déduire la valeur de m.

Plus abstrait

120 Pas de supplémentaire orthogonal

On considère $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f \mid g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

121 Caractérisation de l'orthogonalité

Soit E un espace vectoriel préhilbertien et x, y deux vecteurs de E.
Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

122 Projecteur orthogonal

Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux.

123 À propos d'unicité dans Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien réel.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E et deux familles orthonormées $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ de E telles que :

$$\begin{cases} \forall p \in [\![1, n]\!], & \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_p) = \mathrm{Vect}\,(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}\,(g_1, \ldots, g_p) \\ \forall p \in [\![1, n]\!], & \langle e_p \mid f_p \rangle > 0 \quad \text{et} \quad \langle e_p \mid g_p \rangle > 0. \end{cases}$$

Montrer que les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales.

124 Matrice de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$. On pose $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j \rangle.$$

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre si et seulement si G est inversible.
2. On suppose que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et on note $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ par l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   On pose $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}}$.
   Montrer que P est triangulaire supérieure et que $G = P^\top P$.
3. En déduire que $0 < \det(G) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|e_i\|^2$.

125 Famille libre telle que...

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E.
On suppose que :

$$\forall x \in E, \ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E.
2. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille orthonormée.

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on pourra considérer un vecteur unitaire appartenant à $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p)^\perp$, après en avoir justifié l'existence.

126 Vecteurs unitaires tels que...

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs unitaires de E.
On suppose que :

$$\forall\, x \in E,\ \|x\|^2 \ = \ \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E.

127 Pas trop de vecteurs tels que...

Soit E un espace euclidien.
Soit $e_1, \dots, e_p \in E$ tels que :

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \langle e_i \mid e_j \rangle < 0.$$

En raisonnant par récurrence sur la dimension de E, montrer que $p \leqslant \dim E + 1$.

On pourra raisonner considérer une projection orthogonale sur un hyperplan bien choisi.

128 Similitude

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$.
On dit que f est une similitude de rapport λ lorsque pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Question préliminaire : soient $u, v \in E$ tels que $u + v \perp u - v$. Démontrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Démontrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si,
$$\forall\, x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$$
3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non-nulle et conserve l'orthogonalité :
$$\forall\, x, y \in E, \quad x \perp y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \perp f(y)$$
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Réciproquement, on suppose que f est non-nulle et préserve l'orthogonalité.
   Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
   Démontrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Conclure.

129 Vers la Spé

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère le produit scalaire canonique $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$.

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\langle A \mid B \rangle$ à l'aide des coefficients de A et B.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $||A|| = \sqrt{\langle A \mid A \rangle}$. Exprimer $||A||^2$ à l'aide des coefficients de A.
3. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À l'aide de la question précédente et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, montrer que la norme est sous-multiplicative : $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$.

Espace euclidien

corrigés

1. — L'application φ est linéaire à gauche :

   Soit $X_1, X_2, X' \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
   On a $\varphi(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, X') = \alpha_1 \varphi(X_1, X') + \alpha_2 \varphi(X_2, X')$.

   — L'application φ est symétrique car $\varphi(X, X') = \varphi(X', X)$.

   — Ainsi, φ est bilinéaire.

   Bilan. L'application φ est une forme bilinéaire symétrique.
   - De même, ψ est une forme bilinéaire symétrique.

2. On rappelle qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

   — L'application φ est positive.

   Soit $X \in \mathbb{R}^2$. On a $\varphi(X, X) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 2\big(x + \frac{1}{2}y\big)^2 + \frac{3}{2}y^2 \geqslant 0$.

   — L'application φ est définie.

   Soit $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(X, X) = 0$.
   Alors $(x + \frac{1}{2}y)^2 = 0$ et $\frac{3}{2}y^2 = 0$.
   Donc $y = 0$, puis $x = 0$.
   D'où $X = 0$.

   Bilan. L'application φ est un produit scalaire.
   - En revanche, ψ n'est pas un produit scalaire car elle n'est pas positive.

   En effet, pour $X = (0, 1)$, on a $\psi(X, X) = -2$.

1. — $0 \in E$.
   — Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   On a : $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(\lambda P + \mu Q)(0) = (\lambda P + \mu Q)(1) = 0$
   donc $\lambda P + Q \in E$.

   Ainsi, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   Remarque. On peut aussi élever le débat en remarquant que $E = \operatorname{Ker} \psi_0 \cap \operatorname{Ker} \psi_1$ où $\psi_k : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(k) \end{array}$ est une forme linéaire. Donc $\operatorname{Ker} \psi_k$ est un espace vectoriel.

   Et une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel.

2. — L'application φ est une forme bilinéaire, par linéarité de l'intégrale et linéarité de la dérivation.
   — Soit $P, Q \in E$.
   Une intégration par parties fournit :

$$\varphi(P, Q) \;=\; -\int_0^1 P(x)Q''(x)\mathrm{d}x = -\underbrace{\Big[(x)Q'(x)\Big]_0^1}_{=0} + \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 P'(x)Q'(x)\mathrm{d}x$$

   L'expression étant symétrique, on a $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$ donc φ est symétrique.

   — Soit $P \in E$. On a $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_0^1 P'(x)^2 \mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
   Donc φ est positive.
   — Soit $P \in E$ tel que $\varphi(P, P) = 0$.
   Alors $\displaystyle\int_0^1 P'(x)^2 \mathrm{d}x = 0$.
   La fonction $x \mapsto P'(x)^2$ est continue, positive sur $[0, 1]$ et d'intégrale nulle ; c'est donc la fonction nulle.
   Ainsi, la fonction P est constante sur l'intervalle $[0, 1]$.
   Or, $P(0) = 0$ donc la fonction P est nulle sur $[0, 1]$.
   Ainsi, le polynôme P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.
   Ainsi, φ est définie.

   En conclusion, φ est un produit scalaire.
   De plus, la norme euclidienne associée à ce produit scalaire est :

$$\|P\| \;=\; \left(\int_0^1 P'(x)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

103

1.
2.
3. On applique la formule du cours en remarquant que $H = \mathrm{Vect}(X^0)^\perp$.
   On a l'inclusion $H \subset \mathrm{Vect}(X^0)^\perp$ (WHY ?) et l'égalité des dimensions (WHY ?).
   On a donc d'après le cours,
   $$\mathrm{d}(Q,H) = \frac{|\langle Q, X^0\rangle|}{\|X^0\|}$$
   On calcule les deux termes qui interviennent
   $$\|X^0\|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^0 a_k^0 = n+1 \qquad \text{d'où } \|X^0\| = \sqrt{n+1}$$
   et
   $$\langle Q, X^0\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) a_k^0$$
   D'où
   $$\mathrm{d}(Q,H) = \frac{\left|\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\right|}{\sqrt{n+1}}$$

104

1. Fait en classe.
   Remontrons la symétrie :
$$\begin{aligned}\langle A \mid B\rangle &= \operatorname{tr}(A^\top B) \\ &= \operatorname{tr}((A^\top B)^\top) \quad \text{car } \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(M^\top) \\ &= \operatorname{tr}(B^\top A) \quad \text{propriétés de la transposée} \\ &= \langle B \mid A\rangle\end{aligned}$$

2. Montrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.
   Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   On a
$$\langle A \mid S\rangle \;=\; \operatorname{tr}(A^\top S) \;\stackrel{\star}{=}\; \operatorname{tr}(-AS^\top) \;=\; -\operatorname{tr}(S^\top A) \;=\; -\langle S \mid A\rangle$$
   où l'égalité $\star$ est justifiée par le fait que $A^\top = -A$ et $S^\top = S$.
   L'avant dernière égalité provient du fait que la trace est « cyclique ».
   On a donc montré que $\langle A \mid S\rangle = -\langle S \mid A\rangle$.

3. La question précédente montre que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp$.
   Comme on est en dimension finie, on a
$$\dim \left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp \;=\; \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$$
   Par ailleurs, on a
$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \;=\; \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$$
   Ainsi, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\left(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\right)^\perp$ ont même dimension.
   Par inclusion et égalité des dimensions, ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

— Montrons $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Puisque $F \subset F+G$ et $G \subset F+G$, on a $(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp}$ et $(F+G)^{\perp} \subset G^{\perp}$ donc :

$$(F+G)^{\perp} \subset F^{\perp} \cap G^{\perp}.$$

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
Montrons que x est orthogonal à tout vecteur de $F+G$.
Soit $z \in F+G$ que l'on écrit $z = z_F + z_G$ avec $(z_F, z_G) \in F \times G$.
Par linéarité à droite du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} \langle x \mid z \rangle &= \underbrace{\langle x \mid z_F \rangle}_{=0} + \langle x \mid z_G \rangle && \text{car } x \in F^{\perp} \text{ et } z_F \in F \\ &= 0 && \text{Idem pour l'autre terme} \end{aligned}$$

Donc $x \in (F+G)^{\perp}$.

On a donc montré

$$F^{\perp} \cap G^{\perp} \subset (F+G)^{\perp}.$$

— Montrons $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.
Le premier point montre que pour tout couple de sous-espaces vectoriels $(\widetilde{F}, \widetilde{G})$:

$$(\widetilde{F} + \widetilde{G})^{\perp} = \widetilde{F}^{\perp} \cap \widetilde{G}^{\perp}$$

D'où

$$\widetilde{F} + \widetilde{G} = \left(\widetilde{F}^{\perp} \cap \widetilde{G}^{\perp}\right)^{\perp}$$

On applique cela à $\widetilde{F} = F^{\perp}$ et $\widetilde{G} = G^{\perp}$.
Comme E est de dimension finie, on a $\widetilde{F}^{\perp} = (F^{\perp})^{\perp} = F$ et de même, $\widetilde{G}^{\perp} = G$.
On obtient $F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$.

107

Montrons que $G = F^\perp$ par double inclusion.

— On a $G \subset F^\perp$, car F et G sont orthogonaux.

— Montrons l'autre inclusion.
Soit $x \in F^\perp$.
A fortiori $x \in E$ donc il existe $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$.

Idée. On veut montrer que $x \in G$, autrement dit, on veut montrer que $a = 0$, ce qui revient à montrer que $\langle a \mid a \rangle = 0$ (par caractère défini du produit scalaire).

On a $x = a + b$.
En « effectuant le produit scalaire par a » (autrement dit, en appliquant $\langle \bullet \mid a \rangle$), on a

$$\langle x \mid a \rangle \; = \; \langle a \mid a \rangle + \langle b \mid a \rangle$$

Comme $x \in F^\perp$, on a $\langle x \mid a \rangle = 0$.
Comme F et G sont orthogonaux, on a $\langle b \mid a \rangle = 0$.
D'où $\langle a \mid a \rangle = 0$, d'où $a = 0$.
Ainsi, $x \in G$.

Bilan. On a donc montré $F^\perp = G$.

Comme F et G jouent des rôles symétriques, on obtient $G^\perp = F$.
En utilisant le fait que $G = F^\perp$, cela se réécrit $(F^\perp)^\perp = F$.

Lorsque E est un espace euclidien. On peut alors utiliser l'opérateur « dimension ».
On a $G \subset F^\perp$ (car F et G sont orthogonaux).
Comme E est de dimension finie, on a $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.
Comme $E = F \oplus G$ avec E de dimension finie, on a $\dim G = \dim E - \dim F$.
D'où $\dim F^\perp = \dim G$.
On conclut par inclusion et égalité des dimensions.

108

Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.
D'une part, l'hypothèse $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leqslant 1$ se reformule $\|w\|^2 \leqslant 1$ où $w = (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$.
D'autre part, on réalise la somme $x + y + z$ comme un produit scalaire :

$$x + y + z \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}x \;+\; 1 \times y \;+\; \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}z \;=\; \langle v \mid w \rangle$$

où $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{5}})$ et $w = (\sqrt{2}x, y, \sqrt{5}z)$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle v \mid w \rangle^2 \;\leqslant\; \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Comme $\|v\|^2 = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right) = \dfrac{17}{10}$ et $\|w\|^2 \leqslant 1$, on a :

$$(x + y + z)^2 \;\leqslant\; \frac{17}{10}.$$

1. Fixons $t \in [a, b]$ une fois pour toutes.
   Considérons le produit scalaire (je vous laisse vérifier que c'est bien une forme bilinéaire symétrique définie positive) :
   $$\langle g \mid h \rangle \;=\; \int_a^t gh$$
   Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ et s'annule en a, on a par le théorème fondamental de l'Analyse :
   $$f(t) \;=\; \int_a^t f'(u)\mathrm{d}u \;=\; \int_a^t 1 \times f'(u)\mathrm{d}u.$$
   Ainsi, t étant toujours fixé, le réel $f(t)$ se présente comme le produit scalaire $\langle 1 \mid f' \rangle$.
   On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
   $$\langle 1 \mid f' \rangle^2 \;\leqslant\; \|1\|^2 \|f'\|^2$$
   D'où
   $$\begin{aligned} f^2(t) \;&\leqslant\; \left(\int_a^t 1\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u\right) \\ &\leqslant\; (t-a)\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

2. Reprenons ce qui précède à t fixé :
   $$\begin{aligned} f^2(t) \;&\leqslant\; (t-a)\int_a^t f'^2(u)\mathrm{d}u \\ &\leqslant\; (t-a)\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u \quad \text{car } f'^2 \geqslant 0 \text{ et } t \leqslant b \end{aligned}$$
   Réumons. On a
   $$\forall\, t \in [a, b], \quad f^2(t) \;\leqslant\; (t-a)\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u$$
   Par croissance de l'intégrale :
   $$\begin{aligned} \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \;&\leqslant\; \left(\int_a^b (t-a)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u\right) \\ &\leqslant\; \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

113

Utilisons le produit scalaire sur E défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b fg$.
Soit $f \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire

$$\left|\langle \sqrt{f} \mid \frac{1}{\sqrt{f}}\rangle\right|^2 \leqslant \|\sqrt{f}\|^2 \times \|\frac{1}{\sqrt{f}}\|^2$$

d'où

$$(b-a)^2 \leqslant \int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}$$

Autrement dit, $(b-a)^2$ est un minorant de l'ensemble $\left\{\displaystyle\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \mid f \in E\right\}$, qui est une partie non vide de $\mathbb{R}$.
D'où

$$(b-a)^2 \leqslant \inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$$

De plus, pour $f_0 = 1$ qui est élément de E, on a l'égalité $(b-a)^2 = \displaystyle\int_a^b f_0 \times \int_a^b \frac{1}{f_0}$.
Ainsi, la borne inférieure est atteinte (c'est donc un minimum), par exemple par la fonction identiquement égale à 1 (et plus généralement, par les fonctions constantes).
On a donc montré

$$\inf_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) = \min_{f\in E}\left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right) = (b-a)^2$$

116

Une base de F est $\Big((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)\Big)$.
Une base orthonormée de F est (f_1,f_2) où $f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)$ et $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)$.
Notons p_F la projection orthogonale sur F.
Comme la famille (f_1,f_2) est une base orthonormée de F, on a l'expression de p_F :

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^4, \quad p_F(v) = \langle v \mid f_1\rangle f_1 + \langle v \mid f_2\rangle f_2$$

La matrice de p dans la base canonique est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathrm{cano}}}(p_F) \;=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Détaillons la première colonne.
En notant $\varepsilon_1 = (1,0,0,0)$, on a

$$\begin{aligned} p_F(\varepsilon_1) &= \underbrace{\langle \varepsilon_1 \mid f_1\rangle}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}} f_1 + \underbrace{\langle \varepsilon_1 \mid f_2\rangle}_{=0} f_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} f_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) \\ &= \frac{1}{2}(1,0,-1,0) \end{aligned}$$

117

Commençons par lire des rappels de cours.

Rappel.

Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$, alors on peut montrer (cf. 107) que $G = F^{\perp}$. Autrement dit, $E = F \oplus F^{\perp}$.
Ainsi, la projection sur orthogonale sur F est ni plus ni moins que la projection sur F parallèlement à G.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$.
Alors on a $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ avec le bonus que $x = f(x) + \big(x - f(x)\big)$.
Ainsi, la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$ est l'application $x \mapsto f(x)$, qui est ni plus ni moins que f. Autrement dit, $p_{\operatorname{Im} f /\!/ \operatorname{Ker} f} = f$.

Retour à l'exercice. Nous allons montrer que

$$\begin{cases} f \text{ est un projecteur } f^2 = f \\ \operatorname{Im} f \text{ et } \operatorname{Ker} f \text{ sont orthogonaux} \end{cases}$$

Pour le premier point, il suffit de vérifier que $A^2 = A$.
Ce qui est facile en remarquant que

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De plus, cette matrice est de rang 1 (la colonne C_1 est une base de l'image).
On a

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\underbrace{\big((1,0,-1)\big)}_{\mathcal{F}} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\underbrace{\big((0,1,0),(1,0,1)\big)}_{\mathcal{G}}$$

Il est facile de voir que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont orthogonaux aux vecteurs de $\mathcal{G}$, de sorte que $\operatorname{Im} f \perp \operatorname{Ker} f$.

1. La borne inférieure existe car la partie ... est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée (par 0).
   (a) IL est évident que F est de dimension 2.
   (b) Calculons :
$$\langle \cos \mid \sin \rangle = \int_0^\pi \cos t \sin t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^\pi = 0$$
   et
$$\|\cos\|^2 = \langle \cos \mid \cos \rangle = \int_0^\pi \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{\pi}{2}$$
   et
$$\|\sin\|^2 = \langle \sin \mid \sin \rangle = \int_0^\pi \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \ldots = \frac{\pi}{2}$$
   Ainsi, une base orthonormée de F est $\left(\frac{1}{\|\cos\|}\cos, \frac{1}{\|\sin\|}\sin\right)$.
   (c) On a $m = \mathrm{d}(\mathrm{id}, F)^2 = \|\mathrm{id} - p_F(\mathrm{id})\|^2$, ce qui vaut, d'après Pythagore, $\|\mathrm{id}\|^2 - \|p_F(\mathrm{id})\|^2$.
2. Notons $\widetilde{\cos} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\cos$. Idem pour sinus.
   Utilisons l'expression du projeté à l'aide d'une base orthonormée :
$$\begin{aligned} p_F(\mathrm{id}) &= \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\cos}\rangle \widetilde{\cos} + \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\sin}\rangle \widetilde{\sin} \\ &= \langle \mathrm{id} \mid \cos\rangle \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos + \langle \mathrm{id} \mid \sin\rangle \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin \end{aligned}$$
   Calculons
$$\langle \mathrm{id} \mid \cos\rangle = \int_0^\pi t\cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \langle \mathrm{id} \mid \sin\rangle = \int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$$
   Pour cela, calculons qu'une seule intégrale, à savoir $\int_0^\pi t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$. Effectuons une IPP. Après calculs, on trouve $-2+\mathrm{i}\pi$.
   Donc
$$\langle \mathrm{id} \mid \cos\rangle = -2 \quad \text{et} \quad \langle \mathrm{id} \mid \sin\rangle = \pi$$
   On a donc
$$\begin{aligned} p_F(\mathrm{id}) &= \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\cos}\rangle \widetilde{\cos} + \langle \mathrm{id} \mid \widetilde{\sin}\rangle \widetilde{\sin} \\ &= -2\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cos + \pi\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\sin \\ &= -\frac{4}{\pi}\cos + 2\sin \end{aligned}$$
3. Reprenons, on a $m = \|\mathrm{id}\|^2 - \|p_F(\mathrm{id})\|^2$ avec
$$\|\mathrm{id}\|^2 = \int_0^\pi t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\pi^3$$
   et
$$\|p_F(\mathrm{id})\|^2 = \|\lambda\cos + \mu\sin\|^2 \qquad \text{avec } \lambda = -\frac{4}{\pi} \text{ et } \mu = 2$$
   Ainsi,
$$\|p_F(\mathrm{id})\|^2 = \lambda^2\|\cos\|^2 + 2\lambda\mu\langle\cos\mid\sin\rangle + \mu^2\|\sin\|^2 = \frac{16}{\pi^2}\frac{\pi}{2} + 4\frac{\pi}{2} = \frac{8}{\pi} + 2\pi$$
   D'où
$$m = \frac{1}{3}\pi^3 - \frac{8}{\pi} - 2\pi$$

121

La condition nécessaire

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$$

se reformule

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leqslant \|x+\lambda y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\lambda\langle x \mid y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

c'est-à-dire

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ \|y\|^2\lambda^2 \ +\ 2\langle x \mid y\rangle\lambda$$

que l'on peut voir comme une fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\langle x \mid y\rangle = 0$.

Alors la dernière assertion des équivalences ci-dessus est vraie, puisqu'on a bien

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ \|y\|^2\lambda^2$$

D'où la condition nécessaire :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x\| \leqslant \|x+\lambda y\|$.

Alors

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ \|y\|^2\lambda^2 \ +\ 2\langle x \mid y\rangle\lambda$$

On a donc une hypothèse du type

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \ \leqslant\ a\lambda^2 + b\lambda$$

et on cherche à montrer que $b = 0$.

Plusieurs façons de conclure.

On peut distinguer le cas $a = 0$ et $a \neq 0$ (dans ce dernier cas, on a une fonction polynomiale de degré exactement 2 qui est positive, donc son discriminant est négatif ou nul, donc $b^2 - 4\times a\times 0 \leqslant 0$, donc $b = 0$).

On peut aussi raisonner par l'absurde, supposer $b \neq 0$.

Au voisinage de 0, on a alors (car $b \neq 0$) l'équivalent $a\lambda^2 + b\lambda \sim b\lambda$.

Or $a\lambda^2 + b\lambda$ ne change pas de signe, alors que $b\lambda$ change de signe. D'où la contradiction.

122

Soit $(x, y) \in \operatorname{Im}(p) \times \operatorname{Ker}(p)$.
Montrons $\langle x \mid y\rangle = 0$.
D'après l'hypothèse faite sur p, on a

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|p(\lambda x + y)\|^2 \ \leqslant\ \|\lambda x + y\|^2$$

Or, comme $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$, on a $p\,(\lambda x + y) = \lambda x$.
D'où

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda^2\|x\|^2 \ \leqslant\ \|\lambda x + y\|^2 \ =\ \lambda^2\|x\|^2 \ +\ 2\lambda\langle x \mid y\rangle \ +\ \|y\|^2,$$

On en déduit

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|y\|^2 + 2\lambda\langle x \mid y\rangle \geqslant 0.$$

Autrement dit, la fonction affine $\lambda \mapsto \|y\|^2 + 2\lambda\langle x \mid y\rangle$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
Donc elle est de pente nulle, donc $\langle x \mid y\rangle = 0$.

Bilan. Les espaces vectoriels $\operatorname{Im}(p)$ et $\operatorname{Ker}(p)$ sont orthogonaux.

123

Remarquons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est de dimension finie égale à k.

On va montrer que $\forall\, p \in [\![1, n]\!], f_p = g_p$.
Fixons $p \in [\![1, n]\!]$.
Considérons l'espace euclidien $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ dans lequel vivent les f_j et g_j car, par hypothèse, $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_p)$.
Comme la famille $\mathcal{F}$ est orthonormée, f_p est orthogonale à tout vecteur f_j, donc est orthogonal à l'hyperplan de F suivant :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1}) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{p-1})$$

Idem pour g_p.
Ainsi, f_p et g_p se retrouvent orthogonaux à l'hyperplan commun $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{p-1})$.
Les vecteurs f_p et g_p appartiennent donc à une même droite vectorielle (l'orthogonal d'un hyperplan est une droite vectorielle en dimension finie).
Donc ils sont colinéaires.
Comme ils sont unitaires, on a $f_p = \pm g_p$.
Les conditions $\langle e_p \mid f_p \rangle > 0$ et $\langle e_p \mid g_p \rangle > 0$ empêchent le cas $f_p = -g_p$ et imposent donc $f_p = g_p$.

BILAN : Les familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont égales.

1. Commençons par un rappel.

   Rappel. *Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ carrée, on a l'équivalence*

$$A \textit{ inversible} \iff \textit{la famille } \big(\mathrm{Col}_1(A), \ldots, \mathrm{Col}_n(A)\big) \textit{ est libre}$$

   Sens direct Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est ibre.

   Vérifions que G est inversible en montrant que la famille de ses colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ est une famille libre.

   Soit donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$.

   En examinant le $i^{\text{ème}}$ coefficient des colonnes qui vaut $G_{i,j} = \langle e_i \mid e_j \rangle$, on a

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i \mid e_j \rangle = 0$$

   puis par bilinéarité du produit scalaire, $\langle e_i \mid \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \rangle = 0$.

   On en déduit que :

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \ \in\ \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) \cap \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^{\perp}$$

   Or cette intersection est réduite au vecteur nul, d'où $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$.

   Par liberté de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$, on obtient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   Sens réciproque Supposons que G est inversible.

   Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$.

   En remontant les calculs précédents, on obtient $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$,

   ce qui constitue une combinaison linéaire nulle de la famille des colonnes de la matrice inversible G.

   On en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

2. — D'après l'algorithme de Gram-Schmidt, on a

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \qquad \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j)$$

   Ainsi,

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \qquad e_j \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_j)$$

   Donc

$$\forall\, j \in [\![1, n]\!], \qquad e_j = \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_j f_j + 0 f_{j+1} + \cdots + 0 f_n$$

   Ainsi, la $j^{\text{ème}}$ colonne de P est la colonne

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   ce qui justifie que P est une matrice triangulaire supérieure.

   — Montrons que $G = P^{\top} P$ en travaillant sur les coefficients.

   Montrons donc que

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(G) \ = \ \mathrm{coeff}_{i,j}(P^{\top} P)$$

c'est-à-dire

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \mathrm{coeff}_{i,j}(G) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathrm{coeff}_{k,i}(P)\,\mathrm{coeff}_{k,j}(P)$$

Que vaut le coefficient (k,j) de P ? Réponse : la coordonnée de e_k sur f_j.
Comme la famille $\mathcal{B}' = (f_1,\dots,f_n)$ est orthonormée, cette cooordonnée vaut $\langle e_k \mid f_j\rangle$.
Ainsi,

$$\mathrm{coeff}_{k,j}(P) \;=\; \langle e_k \mid f_j\rangle$$

Il suffit donc de montrer que

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle e_i \mid e_j\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} \langle e_i \mid f_k\rangle\langle e_j \mid f_k\rangle.$$

Ce qui est assuré par le rappel suivant (savoir prouver ce petit rappel de cours).
Rappel. Pour deux vecteurs x et y, comme la base orthonormée $(f_1,\dots,f_n)$, on a

$$\langle x \mid y\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} \langle x \mid f_k\rangle\langle y \mid f_k\rangle$$

3. Montrons l'inégalité de gauche.
   D'après la question précédente, on a

   $$\det(G) = \det(P^\top P) = \det(P^\top)\det(P) = \det(P)^2 \geqslant 0$$

   La matrice G est inversible donc de déterminant non nul.
   On a donc $\det(G) > 0$.
   Montrons l'inégalité de droite.
   Comme P est une matrice triangulaire, on a $\det(P)^2 = \prod_{j=1}^{n}(p_{j,j})^2 = \prod_{j=1}^{n}\langle e_j \mid f_j\rangle^2$.
   D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le caractère unitaire des vecteurs f_j, on a :

   $$\forall\, j \in [\![1,n]\!], \quad \langle e_j \mid f_j\rangle^2 \leqslant \|e_j\|^2.$$

   Par produit d'inégalités dont les termes sont positifs, on en déduit :

   $$\det(G) \leqslant \prod_{j=1}^{n} \|e_j\|^2.$$

1. Posons $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$.
   Montrons que $E = F$.
   Comme F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, on a $E = F \oplus F^\perp$.
   Montrons que $F^\perp = \{0_E\}$.
   Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)^\perp$.
   D'après l'hypothèse, on a $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle^2 = 0$ car x est orthogonal aux vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.
   Ainsi, $\|x\|^2 = 0_{\mathbb{R}}$. Donc $x = 0_E$.

   On en déduit que $E = F$, donc la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de E.
   Comme par hypothèse elle est libre, c'est une base de E.
2. D'après la question précédente, la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de E, qui est donc en particulier de dimension p.

   Soit $i \in [\![1, p]\!]$.
   Objectif.
   — Montrer que $\|e_i\|^2 \geqslant 1$. Cela fait penser à Cauchy-Schwarz...
   ... avec un vecteur u vérifiant $\|u\|^2 = \langle u \mid e_i \rangle^2$.
   — Puis montrer que $\|e_i\|^2 \leqslant 1$, et enfin $\quad \forall\, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\},\ \langle e_i \mid e_j \rangle = 0$.

   Allons-y.
   — Notons $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p)$
   On a $\dim F_i = p - 1$ (car $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p)$ est une sous-famille d'une famille libre).
   Ainsi,
   $$\dim F_i^\perp \ = \ p - (p-1) \ = \ 1$$
   Considérons une base de cet espace $F_i^\perp$, disons (u).
   Ainsi $\forall\, j \neq i,\ \langle u \mid e_j \rangle = 0$.
   L'hypothèse appliquée à ce vecteur u fournit
   $$\|u\|^2 \ = \ \langle u \mid e_i \rangle^2 \qquad \text{qui n'est pas nul, car } u \text{ n'est pas le vecteur nul}$$
   — L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit
   $$\langle u \mid e_i \rangle^2 \ \leqslant \ \|u\|^2 \|e_i\|^2$$
   D'où (WHY ?) :
   $$1 \ \leqslant \ \|e_i\|^2$$
   — L'hypothèse appliquée au vecteur e_i fournit :
   $$(\star) \qquad \|e_i\|^2 \ = \ \|e_i\|^4 + \underbrace{\sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \langle e_i \mid e_j \rangle^2}_{\geqslant 0}$$
   D'où
   $$\|e_i\|^2 \geqslant \|e_i\|^4 \qquad \text{d'où} \qquad \|e_i\| \leqslant 1$$
   — Par double inégalité, on en déduit $\|e_i\| = 1$.
   — En reprenant $(\star)$, on a :
   $$0 \ = \ \sum_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} \langle e_i \mid e_j \rangle^2$$
   D'où
   $$\forall\, j \in [\![1, n]\!] \setminus \{i\}, \quad \langle e_i \mid e_j \rangle = 0$$
   Bilan : la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée.

127

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: « pour tout espace euclidien de dimension n, on a . . . .

— Soit un espace euclidien de dimension 0.
  Donnons-nous p vecteurs tels que . . .
  Montrons que $p \leqslant 1$.
  Supposons donc avoir au moins 2 tels vecteurs et aboutissons à une absurdité.
  Soit (e_1, e_2) tel que $\langle e_1 \mid e_2 \rangle < 0$.
  Comme on est en dimension 0, on a $e_1 = e_2 = 0$ donc $\langle e_1 \mid e_2 \rangle = 0$. D'où la contradiction.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour tout espace euclidien de dimension n.
  Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E vérifiant la condition requise sur les produits scalaires.

  — Si $p = 1$, il n'y a rien à faire car $1 \leqslant n+1$. On supposera donc $p \geqslant 2$ dans la suite.

  — Tout d'abord, $\langle e_1 \mid e_p \rangle < 0$ donc $e_p \neq 0$.
    Posons $H = \{e_p\}^\perp$. C'est un hyperplan, donc de dimension $n = \dim E - 1$.
    Notons p_H la projection orthogonale sur H.
    Montrons que la famille $(p_H(e_1), \dots, p_H(e_{p-1}))$ de vecteurs de H satisfait la condition requise sur les produits scalaires.
    On pourra en déduire que $p - 1 \leqslant \dim H + 1$, d'où $p \leqslant n+2$, ce qui achèvera la preuve de l'hérédité.

  — On a
$$\forall\, x \in E, \quad p_H(x) = x - \frac{\langle x \mid e_p \rangle}{\|e_p\|^2} e_p.$$
    Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On a :
$$\langle p_H(e_i) \mid p_H(e_j) \rangle = \langle e_i \mid e_j \rangle - \frac{\langle e_i \mid e_p \rangle \langle e_j \mid e_p \rangle}{\|e_p\|^2},$$
    par bilinéarité et symétrie du produit scalaire.
    Le premier terme de cette soustraction est strictement négatif.
    Le second est strictement positif (produit de deux négatifs).
    Ainsi $\langle p_H(e_i) \mid p_H(e_j) \rangle < 0$.