Séries

exercices

Terme général « abstrait »

101 **carré**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente.

102 **max**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.
Montrer que la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge si et seulement si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes.

103 **sqrt**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.
Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ est convergente.

104 **Transformation homographique**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

105 **Encadrement pour des séries à termes signés**

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, alors $\sum v_n$ converge également.

106 **Exponentiation et comparaison**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Prouver que, pour tout $\alpha > 1$, $\sum u_n^\alpha$ converge.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Prouver que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\sum u_n^\alpha$ diverge.

107 **Sous-espace vectoriel (belote)**

Soit

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum n^2 u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

108 **Sous-espace vectoriel (rebelote)**

Soit

$$F = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \text{la série } \sum n u_n^2 \text{ converge} \right\}$$

Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

109 **Une double inégalité (série télescopique)**

Soit (u_n) et (w_n) deux suites de réels telles que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_k \leqslant w_{k-1} - w_k$$

On suppose de plus que w converge vers ℓ.

1. Montrer que la série $\sum u_k$ converge.
   On note U sa somme.
2. En notant $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U - w_n + \ell \ \leqslant\ U_n \ \leqslant\ U$$

110 Un classique

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$?
2. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n}$?

   Écrire a_n en fonction de S_n puis considérer l'équivalent $1 - x \underset{x\to 1}{\sim} -\ln x$.
3. On suppose que la série $\sum a_n$ diverge. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$?

   On pourra considérer $\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

111 Condensation

Soit (u_n) une suite décroissante positive.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

112 Hum...

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente.
Montrer que $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ est convergente. Réciproque ?

Terme général « concret »

113 Télescopie

Soit $a > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$.

— Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

— En prenant le log de l'égalité définissant u_n, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

114 Retour aux sommes partielles

1. Donner la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

   On exprimera les sommes partielles de la série, en calculant notamment $S_2, S_3, S_4, \dots$
2. On pose $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$

   Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

115 Terme général défini par morceaux

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \begin{cases} -\frac{4}{n} & \text{si } n \text{ est multiple de } 5 \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{5n} u_k$.
2. En déduire que $\sum u_k$ converge et déterminer $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

116 Très détaillé

On pose $u_n = \mathrm{e}^{-n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha \leqslant 0$. Montrer que la série $\sum u_n$ est divergente.
2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de $\sum u_n$.

117 Avec paramètres

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier la nature de la série de terme général : $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.
Lorsque la série converge, calculer sa somme.
Même question avec $\sum \big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\big)$.

118 Ça se corse

1. Étudier la convergence de la série $\sum\big(n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}\big)$.
2. Étudier la série de terme général $u_n = n^{\frac{3}{2}}\left(\tan\frac{1}{n} - \operatorname{sh}\frac{1}{n}\right)\cdot$
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de la série $\sum\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$.

119 Un calcul de somme

1. Étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.
2. En remarquant que $\displaystyle\int_0^1 x^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$, calculer sa somme.

120 Avec le critère des séries alternées

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n-x}$.

121 Reste d'ordre n

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
En utilisant le critère des séries alternées, montrer que le reste d'ordre n de la série $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est le terme général d'une série convergente.

Comparaison série intégrale

122 Un petit morceau des séries de Bertrand

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\alpha > 1$.
Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

123 Le cas $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer la divergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln n}$ et donner un équivalent de ses sommes partielles.
Quel développement asymptotique avons-nous obtenu ?

124 Le cas $\alpha = 1$ et $\beta = -1$

Montrer que la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge et donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

125 Un DA à deux termes pour la série harmonique

Par comparaison à une intégrale, donner un développement asymptotique à deux termes de la suite des sommes partielles de la série harmonique.

126 Reste d'indice n

Soit $\alpha \in]1,+\infty[$. Justifier l'existence et donner un équivalent de $\displaystyle u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Théorèmes classiques

127 La règle de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tous non nuls.
On suppose que la limite suivante existe :

$$\ell = \lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Peut-on conclure si $\ell = 1$?

128 Suite définie par récurrence

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{n}.$$

À l'aide de la règle de d'Alembert, montrer que la série $\sum u_n$ converge.

129 Avec d'Alembert

À l'aide de la règle de d'Alembert, déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles les séries suivantes sont absolument convergentes :

$$\sum z^n \qquad \sum nz^{n-1} \qquad \sum \frac{1}{n+1}z^{n+1} \qquad \sum n!z^n \qquad \sum \frac{1}{n!}z^n \qquad \sum (az)^{2n}$$

130 Factorielles

1. On pose $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$.
   Quelle est la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$?
   Montrer que la suite des sommes partielles de la série $\sum nu_n$ est croissante.
   En déduire que la série de terme général u_n est divergente.
2. On pose $v_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n)}$.
   Quelle est la limite de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$?
   Montrer que, si $0 < \alpha < 3/2$, on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leqslant n^\alpha v_n$.
   En déduire que la série de terme général v_n converge.

131 Un critère

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

où a, b sont deux constantes réelles ($-a, -b \notin \mathbb{N}$).

1. Montrer que u_n est de signe constant à partir d'un certain rang.
2. On pose $v_n = n^{b-a}u_n$.
   Étudier la convergence de la suite (v_n). On introduira la série de terme général $\ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$.
3. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a - b + 1 < 0$.
4. Si ce critère est satisfait, montrer $nu_n \to 0$, puis calculer la somme en fonction de a, b, u_0.

132 $\sum u_n$ convergente avec u positive et décroissante

Soit u une suite positive, décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Montrer que $nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Majorer nu_{2n} par une expression du type $S_i - S_j$ avec i et j à déterminer en fonction de n.
2. Montrer que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

Pour la culture : la condition de décroissance est indispensable ; en considérant

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \dfrac{1}{n^{2023}} & \text{sinon} \end{cases}$$

on peut montrer que $\sum u_n$ converge et que $u_n \neq \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

133 Cauchy-Schwarz

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent.

Montrer que la série $\sum u_n v_n$ est convergente, et que l'on a :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n\right|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} {v_n}^2\right).$$

134 Transformation d'Abel

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles ou complexes.

On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Relier :

$$\sum_{n=0}^{N} A_n b_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N} a_{n+1} B_n.$$

Étudier la convergence de $\sum \frac{\sin(n)}{n}$

On pourra commencer par montrer que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \sin k\right)$ est bornée.

135 Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. On pose :

$$c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}.$$

Montrer que $\sum c_n$ est absolument convergente, de somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right).$$

136 Séries de Riemann par télescopie

En étudiant la série $\sum\left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$ pour $\beta \in \mathbb{R}^*$ et la série $\sum\big(\ln(n+1) - \ln(n)\big)$, retrouver la nature des séries de Riemann :

$$\textit{la série } \sum \frac{1}{n^{\beta+1}} \textit{ converge si et seulement si } \beta > 0$$

En vrac

137 Un classique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive.

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par définie par $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k u_k$.

On suppose que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - N v_N$
2. En déduire que la série $\sum v_n$ converge.
3. Montrer ensuite que $N v_N$ tend vers une limite finie lorsque $N \to +\infty$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.
4. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

138 La série du binôme négatif

On fixe $q \in \left]-1,1\right[$. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit la série $\mathbb{B}(r)$

$$\mathbb{B}(r) = \sum_{n\geqslant r}\binom{n}{r}q^{n-r} = \sum_{n'\geqslant 0}\binom{n'+r}{r}q^{n'}$$

On note $\big(S_N(r)\big)_N$ la suite de sommes partielles de la série $\mathbb{B}(r)$. Ainsi

$$\forall N \geqslant r,\quad S_N(r) = \sum_{k=r}^{N}\binom{k}{r}q^{k-r} = \sum_{j=0}^{N-r}\binom{j+r}{r}q^{j}$$

1. Quelle est la nature de la série $\mathbb{B}(r)$ pour $r = 0, 1, 2$?
2. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall N \geqslant r+1,\quad (1-q)S_N(r+1) = S_{N-1}(r) - \binom{N}{r+1}q^{N-r}$$
3. Montrer par récurrence sur r que la série $\mathbb{B}(r)$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{1}{(1-q)^{r+1}}$.

139 Série semi-convergente, réagencement des termes

Soit u une suite indexée par $\mathbb{N}^*$.
On réordonne les termes de u en écrivant un terme d'indice impair suivi de deux termes d'indice pair, précisément :

$$u_1 \quad u_2 \quad u_4 \quad u_3 \quad u_6 \quad \dots$$

On appelle v cette nouvelle suite, que l'on indexe par $\mathbb{N}^*$. Dans cet exemple, on a $v_3 = u_4$.

1. Pour tout $k \geqslant 1$, exprimer v_{3k} en fonction d'un terme u_ℓ. Idem avec v_{3k-2} et v_{3k-1}.
2. On suppose **désormais** que $u_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_{3n} = \dfrac{1}{2}U_{2n}$ où $U_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} u_k$ et $V_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} v_k$.
3. Rappeler pourquoi la série $\sum u_n$ converge (idée de la preuve).
   Connaissez-vous la valeur de sa somme ?
4. Montrer que la série $\sum v_n$ converge (on pourra considérer $V_{3n}, V_{3n+1}, V_{3n+2}$).
   Quelle est la valeur de sa somme ?
5. Un théorème (largement hors programme) stipule que si une série $\sum w_n$ converge absolument alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la série $\sum w_{\sigma(n)}$ converge (et même absolument) **vers la même somme**.
   Au fait que représente la série $\sum w_{\sigma(n)}$?
   Est-ce que ce résultat tient toujours si l'on suppose $\sum w_n$ seulement convergente (sans convergence absolue) ?

Faire ses gammes

140 Nature

Déterminer (en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$) la nature des séries de terme général :

(i) $n\sin(1/n)$

(ii) $\dfrac{n^n}{2^n}$

(iii) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(v) $1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

(vi) $\dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

(vii) $a^n n!$

(viii) $ne^{-\sqrt{n}}$

(ix) $\dfrac{\ln n}{n^a}$

(x) $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$

(xi) $\dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$

(xii) $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$

(xiii) $\sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-1}$

(xiv) $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(xv) $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$

(xvi) $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$

(xvii) $\mathrm{e}^{1/n}-a-\dfrac{b}{n}$

(xviii) $\dfrac{1}{n^a}\left((n+1)^{1+1/n}-(n-1)^{1-1/n}\right)$.

141 Avec un DA

Étudier la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$.

142 Riemann (ou pas !)

1. Soit $a>0$. Donner la nature de $\sum a^{\ln n}$.

   En utilisant que $H_n = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$, déterminer la nature de $\sum a^{H_n}$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

2. Nature de $\sum \dfrac{1}{n^n}$.

3. Nature de $\sum \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Essayer de mettre le terme général sous la forme n^{w_n} avec w_n à déterminer.

143 Calculs de somme

Montrer les égalités suivantes, après avoir justifié l'existence des sommes infinies.

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right) = \ln 2$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(3+(-1)^k\right)^{-k} = \frac{26}{15}$.

144 Calculs de somme

Justifier l'existence et calculer la somme des séries suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+p)}$.

Séries
corrigés

101

La série $\sum u_n$ étant convergente, son terme général tend vers 0.
Il existe donc un rang N tel que :

$$\forall\, n \geq N 0 \leq u_n \leq 1,$$

et l'on a alors :

$$\forall\, n \geq N 0 \leq u_n^2 \leq u_n.$$

Le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet alors de conclure.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \max(u_n, v_n) \leq u_n + v_n$ par positivité de u_n et v_n. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série de TG $u_n + v_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes et l'on en déduit que la série de TG $\max(u_n, v_n)$ est convergente.

— Si la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge, alors les inégalités $0 \leqslant u_n \leqslant \max(u_n, v_n)$ et $0 \leqslant v_n \leqslant \max(u_n, v_n)$ entraînent la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

107

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

• Il est clair que la suite nulle est dans F. En effet, la série de terme général $n^2 0^2 = 0$ converge ! (sa somme est nulle !).

• Montrons que F est stable par combinaison linéaire.
Soit $u, v \in F$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$, càd montrons que la série $\sum n^2(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge.
Prenons le terme général de cette série. Il vaut :

$$n^2(\lambda u_n + \mu v_n)^2 \;=\; \lambda^2\, n^2 u_n^2 \;+\; 2\lambda\mu\, n^2 u_n v_n \;+\; \mu^2\, n^2 v_n^2$$

Examinons les 3 termes de cette somme.

▷ Comme $u \in F$, la série $\sum n^2 u_n^2$ converge.
▷ Idem pour v.
▷ Montrons que la série $\sum n^2 u_n v_n$ converge.
Appliquons l'inégalité rappelée à $a = nu_n$ et $b = nv_n$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |n^2 u_n v_n| \;=\; |(nu_n)(nv_n)| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\Big(n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2\Big)$$

Les séries $\sum n^2 u_n^2$ et $\sum n^2 v_n^2$ convergent (car $u, v \in F$). Par opération sur les séries convergentes, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{2}\Big(n^2 u_n^2 + n^2 v_n^2\Big)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |n^2 u_n v_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum n^2 u_n v_n$ converge absolument, donc converge (par théorème).

Bilan : Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n^2(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge, ce qui signifie que $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarque. On aurait pu vérifier la stabilité par combinaison linéaire en deux temps. En vérifiant d'abord la stabilité par multiplication par un scalaire, puis par somme.

Montrons que F est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

• Il est clair que la suite nulle est dans F. En effet, la série de terme général $n0^2 = 0$ converge ! (sa somme est nulle !).

• Montrons que F est stable par combinaison linéaire.
Soit $u, v \in F$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Montrons que $\lambda u + \mu v \in F$, càd montrons que la série $\sum n(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge.
Prenons le terme général de cette série. Il vaut :

$$n(\lambda u_n + \mu v_n)^2 \;=\; \lambda^2\, nu_n^2 \;+\; 2\lambda\mu\, nu_nv_n \;+\; \mu^2\, nv_n^2$$

Examinons les 3 termes de cette somme.

▷ Comme $u \in F$, la série $\sum nu_n^2$ converge.
▷ Idem pour v.
▷ Montrons que la série $\sum nu_nv_n$ converge.
Appliquons l'inégalité rappelée à $a = \sqrt{n}u_n$ et $b = \sqrt{n}v_n$, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |nu_nv_n| \;=\; |\sqrt{n}u_n\sqrt{n}v_n| \;\leqslant\; \frac{1}{2}\Big(nu_n^2 + nv_n^2\Big)$$

Les séries $\sum nu_n^2$ et $\sum nv_n^2$ convergent (car $u, v \in F$). Par opération sur les séries convergentes, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{2}\Big(nu_n^2 + nv_n^2\Big)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum |nu_nv_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum nu_nv_n$ converge absolument, donc converge (par théorème).

Bilan : Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum n(\lambda u_n + \mu v_n)^2$ converge, ce qui signifie que $\lambda u + \mu v \in F$.

Remarque. On aurait pu vérifier la stabilité par combinaison linéaire en deux temps. En vérifiant d'abord la stabilité par multiplication par un scalaire, puis par somme.

- Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

  — La suite u est décroissante.
  En effet, on montre par récurrence immédiate que $\forall\, n,\ u_n > 0$.
  Donc $\forall\, n,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-u_n} < 1$.
  Donc $\forall\, n,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

  — La suite u est minorée par 0.

  BILAN : la suite u converge d'après le th de la limite monotone.
  Notons ℓ sa limite.
  En passant à la limite dans l'égalité $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$, on obtient

$$\ell = \ell \mathrm{e}^{-\ell} \qquad \text{d'où} \qquad \ell(1-\mathrm{e}^{-\ell}) = 0 \qquad \text{d'où (WHY ?)} \qquad \ell = 0$$

- Étudions la nature de la série $\sum u_n$.
  On a $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ et la suite u est à termes > 0, on peut donc prendre le log népérien.
  D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - u_n$$

  Ou encore

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \;=\; \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$$

  Ainsi, étudier la série $\sum u_n$ revient à étudier la série télescopique $\sum \big(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})\big)$, qui a même nature (d'après le cours) que la SUITE $\big(\ln u_n\big)$.
  Cette suite diverge (car $u_n \to 0$).

  BILAN : La série $\sum u_n$ diverge.

115

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
S_{5n} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} - \frac{4}{5k+5} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{5k+1} + \frac{1}{5k+2} + \frac{1}{5k+3} + \frac{1}{5k+4} + \frac{1}{5k+5} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{5k+5} \\
&= \sum_{k=1}^{5n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=n+1}^{5n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.
\end{aligned}$$

Ce dernier terme est du type

$$I_{4n} = \frac{4}{4n} \sum_{k=1}^{4n} \frac{1}{1+\frac{4k}{4n}} \quad \text{où l'on a posé} \quad I_m = \frac{4}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{1+\frac{4k}{m}}.$$

La suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est une somme de Riemann de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$, continue sur $[0,4]$. Donc :

$$I_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \int_0^4 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \ln 5.$$

Par extraction, on a $I_{4m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \ln 5$ c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{5n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 5$$

2. Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = 0$, on en déduit que $S_{5n+1} = S_{5n} + u_{5n+1}$ a aussi pour limite $\ln 5$.

De la même manière, on montre que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_{5n+2} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+3} = \lim_{n\to+\infty} S_{5n+4} = \ln 5$$

On peut alors facilement montrer que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ln 5$ et donc que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \ln 5$$

116

1. La série de terme général $u_n = e^{-n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leqslant 0$ puisque son TG ne tend pas vers 0.
2. Soit $\alpha > 0$. Par croissances comparées :

$$n^2\, u_n = \left(n^\alpha\right)^{2/\alpha}\, e^{-n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qui signifie que $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot$
Comme $2 > 1$, on en déduit que $\sum u_n$ converge absolument.

Bilan. On vient de prouver que

$$\sum u_n \text{ CV} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 0$$

117

On a $u_n = \sqrt{n}\left(1 + a\sqrt{1+\frac{1}{n}} + b\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)$.

— Le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\sqrt{1+t}$ fournit $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + \mathrm{O}(t^2)$.
  On obtient un développement asymptotique de u_n :

$$u_n = \sqrt{n}\left((1+a+b) + \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (1+a+b)\sqrt{n} + \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

  — Si $1+a+b \neq 0$, alors $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n}$.
    Le terme général u_n ne tend pas vers 0, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
  — Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2}+b \neq 0$.
    Alors $u_n \sim \left(\frac{a}{2}+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$.
    Or la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$).
    Par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n$ diverge.
  — Si $1+a+b = 0$ et $\frac{a}{2}+b = 0$.
    Alors $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ et $\sum u_n$ converge (absolument).

  Comme on a $\left(1+a+b=0 \text{ et } \frac{a}{2}+b=0\right) \iff (a=-2 \text{ et } b=1)$, on en déduit :

$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \iff (a,b) = (-2,1)$$

— On suppose que $(a,b) = (-2,1)$. Dans ce cas, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k} - 2\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2}\sqrt{k} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - 1.\end{aligned}$$

  On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -1$.

1. On peut écrire $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{n}}\left[1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$.
   Comme $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, on a $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   On en déduit que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   Donc $u_n = n^{\frac{1}{n}}\left[-\frac{1}{n^2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})\right]$.
   Puisque $n^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ \ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a $u_n \sim -\frac{1}{n^2}$, d'où la convergence absolue de $\sum u_n$.
2. Les fonctions tan et sh étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0, elles admettent un $\mathrm{DL}_3(0)$ que l'on peut écrire, par imparité, $\tan x = x + \mathrm{O}(x^3)$ et $\operatorname{sh} x = x + \mathrm{O}(x^3)$.
   Ainsi,
   $$\tan x - \operatorname{sh} x \ = \ \mathrm{O}(x^3)$$
   D'où
   $$\tan\tfrac{1}{n} - \operatorname{sh}\tfrac{1}{n} \ = \ \mathrm{O}(\tfrac{1}{n^3})$$
   Puis, en multipliant par $n^{\frac{3}{2}}$:
   $$u_n \ = \ n^{3/2} \times \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right),$$
   La série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge absolument (série de Riemann avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), donc par comparaison, il en est de même la série $\sum u_n$.
3. On a $u_n = \exp(v_n)$ avec $v_n = n^\alpha \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha\ \left(\cos\frac{1}{n} - 1\right) \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$.
   Ainsi,
   — Cas $\alpha \leqslant 2$. Alors v_n ne tend pas vers $-\infty$ et donc u_n ne tend pas vers 0 ;
   Donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   — Cas $\alpha > 2$. Montrons que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$.
   Autrement dit, montrons que $n^2 u_n = \exp(v_n + 2\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Comme $v_n \sim -\frac{n^{\alpha-2}}{2}$ et $\alpha > 2$, on a $v_n \to\ -\infty$ et $\ln n = \mathrm{o}(v_n)$ par croissances comparées.
   Donc $v_n + 2\ln n = v_n + \mathrm{o}(v_n) \sim v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
   Donc $\exp(v_n + 2\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   On a montré que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$.
   La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, donc par comparaison la série $\sum u_n$ converge absolument

   Bilan : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

119

1. On a
$$\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}\right| \sim \frac{1}{4n^2}$$
D'où la convergence absolue, et donc la convergence.

2. La relation $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$ pourrait faire penser à une somme télescopique ; mais ce n'est pas le cas ici à cause des changements de signes occasionnés par les « $(-1)^n$ ». Calculons les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+3} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x - \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{2n+2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N} (1-x^2)\left(-x^2\right)^n\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^2-(1-x^2)\left(-x^2\right)^{N+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\left(-x^2\right)^{N+1}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

• Intéressons-nous à la deuxième intégrale. Par inégalité triangulaire, on a
$$\left|\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}x^{2N+2}\,\mathrm{d}x$$
En notant K un majorant de $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ sur $[0,1]$ (licite), on a
$$\left|\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant K\int_0^1 x^{2N+2}\,\mathrm{d}x = K\frac{1}{2N+3}$$
Donc :
$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x^2)^{N+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

• Calculons la première intégrale.
$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -1+2\,\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{2}-1$$
Bilan
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

120

Posons $u_n = \frac{1}{n-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et prenons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant x$. La suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est positive, décroissante et tend vers 0. On en déduit, d'après le théorème des séries alternées, la convergence de la série $\sum_{n \geqslant n_0} (-1)^n u_n$ donc, par le caractère asymptotique de la notion de série convergente, celle de $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$.

121

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ est une série alternée et la suite $\left(\frac{1}{(n+x)^2}\right)$ décroît et tend vers 0.
D'après le théorème des séries alternées, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}$ converge et que son reste d'ordre n vérifie :

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+x)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1+x)^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Par comparaison, la série de TG R_n est absolument convergente, donc convergente.

122

Notons u_n le terme général qui vaut $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.
Comme $\alpha > 1$, on peut trouver $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $1 < \gamma < \alpha$.
Comme $\alpha - \gamma > 0$), on a par croissances comparées (et même directement si $\beta \geqslant 0$)

$$n^\gamma \, u_n \;=\; \frac{1}{n^{\alpha-\gamma} (\ln n)^\beta} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $u_n = \mathrm{o}\big(\frac{1}{n^\gamma}\big)$.
La convergence absolue de la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ (Riemann avec $\gamma > 1$) assure celle de $\sum u_n$.

123

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ \ln x}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$ (comme inverse d'une fonction continue à valeurs strictement positives et évidemment croissante).
On obtient donc l'encadrement

$$\forall\, n \geqslant 2, \quad \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(n) \;\leqslant\; \sum_{k=2}^{n} f(k) \;\leqslant\; \int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(2)$$

Une primitive de f est $x \mapsto \ln(\ln x)$, donc

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \ln(\ln n) - \ln(\ln 2)$$

Déterminons un équivalent du membre gauche :

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(n) \;=\; \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{n \ln n} \;\sim\; \ln(\ln n)$$

Ce membre gauche tend vers $+\infty$.
Par minoration, on en déduit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, donc la série $\sum f(n)$ diverge.
Déterminons un équivalent du membre droit :

$$\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(2) \;=\; \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2 \ln 2} \;\sim\; \ln(\ln n)$$

Les membres extrêmes sont équivalents à $\ln(\ln n)$, donc

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ \ln k} \;\sim\; \ln(\ln n).$$

124

Une étude de fonction montre que la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est continue et décroissante sur $[3, +\infty[$. On obtient donc l'encadrement

$$\forall\, n \geqslant 3, \quad \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(n) \;\leqslant\; \sum_{k=3}^{n} f(k) \;\leqslant\; \int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(3)$$

Une primitive de f est $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ donc

$$\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{1}{2}(\ln n)^2 \;-\; \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

Déterminons un équivalent du membre gauche :

$$\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(n) \;=\; \frac{1}{2}(\ln n)^2 \;-\; \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \;+\; \frac{\ln n}{n} \;\sim\; \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Ce membre gauche tend vers $+\infty$.
Par minoration, on en déduit que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$, donc la série $\sum f(n)$ diverge.
Déterminons un équivalent du membre droit :

$$\int_3^n f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; f(3) \;=\; \frac{1}{2}(\ln n)^2 \;-\; \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \;+\; \frac{\ln 3}{3} \;\sim\; \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Les membres extrêmes sont équivalents à $\frac{1}{2}(\ln n)^2$, donc

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln k}{k} \;\sim\; \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Donc (WHY), on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} \;\sim\; \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

126

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ; cela justifie l'existence de u_n.
La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ étant continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, une comparaison série-intégrale donne :

$$(\star) \qquad \int_{n+1}^{N} f(t)\mathrm{d}t + f(N) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leqslant \int_{n+1}^{N} f(t)\mathrm{d}t + f(n+1)$$

Or

$$\int_{n+1}^{N} f(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

Par passage à la limite dans $(\star)$, on obtient :

$$\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

D'où $u_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum u_n$ a même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
Ainsi, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 2$.

1. — Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Par décroissance de u, on a

$$\forall\, k \in [\![n+1,\ 2n]\!], \quad 0 \ \leqslant\ u_{2n} \ \leqslant\ u_k$$

   Par somme, on a

$$0 \ \leqslant\ nu_{2n} \ \leqslant\ \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n} u_k}_{S_{2n}-S_n}$$

   — On a donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \ \leqslant\ nu_{2n} \ \leqslant\ S_{2n} - S_n$$

   Par hypothèse, la série $\sum u_n$ converge, donc la suite (S_n) converge, donc $S_{2n} - S_n \to 0$.
   D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit $nu_{2n} \to 0$.

2. Montrons que $u_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.
   Montrons que la suite (nu_n) tend vers 0.
   En notant $v_n = nu_n$, il s'agit de montrer que $v_{2n+1} \to 0$ et $v_{2n} \to 0$.

   - On a $(2n+1)u_{2n+1} = 2 \times nu_{2n+1} + u_{2n+1}$.
     On a $u_{2n+1} \to 0$ car $\sum u_n$ converge.
     Montrons que $nu_{2n+1} \to 0$.

     On a, par décroissance de u,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \ \leqslant\ nu_{2n+1} \ \leqslant\ nu_{2n}$$

     Or $nu_{2n} \to 0$ d'après la première question.
     Le théorème des Gendarmes fournit $nu_{2n+1} \to 0$.

     Ainsi $v_{2n+1} = (2n+1)u_{2n+1} \to 0$.
   - Or $nu_{2n} \to 0$, donc $v_{2n} = 2nu_{2n} \to 0$.

   BILAN : la suite (nu_n) tend vers 0 (car les suites extraites d'indice pair et impair tendent vers 0).

136

Soit $\beta \neq 0$. On a :

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta} \underbrace{\left(1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta}\right)}_{\sim -(-\beta)\frac{1}{n}} \sim \frac{\beta}{n^{\beta+1}}.$$

Comme la suite de terme général $v_n = \frac{\beta}{n^{\beta+1}}$ est de signe constant, la série $\sum v_n$ a même nature que la série télescopique $\sum \left(\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}\right)$, donc a même nature que la *suite* $\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$.
Or, cette dernière suite converge ssi $\beta > 0$ (ici, $\beta \neq 0$).
Donc pour $\beta \neq 0$, La série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ converge ssi $\beta > 0$.

Pour $\beta = 0$. On a

$$\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \geqslant 0$$

La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ a même nature que la série télescopique $\sum \Big(\ln(n+1) - \ln n\Big)$, qui a même nature que la suite $\big(\ln n\big)$, qui diverge.
Donc, pour $\beta = 0$, la série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ diverge.

Bilan.
La série $\sum \frac{1}{n^{\beta+1}}$ converge ssi $\beta > 0$.
Autrement dit, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

137

1. Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. On utilise la définition de v_n, on fait apparaître une somme double, on intervertit les sommes, puis on décompose la fraction $\frac{1}{n(n+1)}$ en $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; et enfin, on télescope !

$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k u_k \right) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n \leqslant N} \left(\frac{1}{n(n+1)} k u_k \right) = \sum_{k=1}^{N} \left(k u_k \sum_{n=k}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \right) = \sum_{k=1}^{N} k u_k \left(\frac{1}{k} - \right.$$

D'où
$$\sum_{n=1}^{N} v_n = \sum_{k=1}^{N} u_k - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} k u_k = \sum_{k=1}^{N} u_k - N v_N$$

2. Montrons que la série $\sum v_n$ converge en montrant que la **suite** des sommes partielles $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{n=1}^{N} v_n \right)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge.
Tout d'abord, comme le terme général v_n est positif, la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
Reste à montrer qu'elle est majorée, c'est-à-dire qu'il existe K tel que, pour tout N, on ait $V_N \leqslant K$.
D'après 1, on a
$$V_N = U_N - N v_N \qquad \text{d'où} \qquad V_N \leqslant U_N$$
Or la série $\sum u_n$ converge, donc la suite des sommes partielles $(U_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge, donc est en particulier majorée.
Comme $V_N \leqslant U_N$ pour tout N, on en déduit que la suite $(V_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ est majorée !

3. D'après 1, on a
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad N v_N = U_N - V_N$$
Les suites U et V convergent (hypothèse et 2), donc la suite $(N v_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$ converge également.
Montrons que $\lim N v_N = 0$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim N v_N = \ell \neq 0$.
On a alors
$$v_N \underset{N \to +\infty}{\sim} \ell \times \frac{1}{N}$$
Or $\frac{1}{N}$ est le terme général d'une série divergente.
Par comparaison de séries à termes positifs (le terme général v_N l'est), on en déduit que la série $\sum v_N$ diverge, ce qui contredit 2.

4. Il suffit de passer à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'égalité 1 (c'est licite, WHY ?) et d'utiliser la question 3 qui dit que $N v_N \to 0$.

Les relations d'équivalence ou de domination données dans la suite sont parfois le fruit d'un calcul non trivial.

(i) On a $n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$: la série diverge grossièrement.

(ii) On a $\left(\frac{n}{2}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$: la série diverge grossièrement.

(iii) On a $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(iv) On a $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(v) On a $1-\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi^2}{2\,n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(vi) On a $\frac{(-1)^n+n}{n^2+1}\sim\frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(vii) On a $|a^n\,n!|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ dès que $a\neq 0$. Ainsi, la série converge (elle est nulle à partir d'un certain rang) si $a=0$, et diverge grossièrement dans tous les autres cas.

(viii) On a $ne^{-\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(ix) Distinguons trois cas :

- si $a\leqslant 0$, la série diverge grossièrement ;
- si $0<a\leqslant 1$, on a $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{\ln n}{n^a}\right)$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
- si $a>1$, on peut trouver un réel $1<b<a$, et on a $\frac{\ln n}{n^a}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^b}\right)$ (par croissance comparée) : la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(x) On a $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)\sim\frac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(xi) On a $\frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xii) On a $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\sim\frac{\ln n}{n}$, donc $\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\right)$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(xiii) On a $\sqrt{\operatorname{ch}\frac{1}{n}-1}\sim\frac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(xiv) On a $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\underset{n\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xv) On a $\left(n\sin\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}=\exp\left[-\frac{1}{6}n^{\alpha-2}+o(n^{\alpha-2})\right]$. On montre alors que la série diverge grossièrement si $\alpha\leqslant 2$ et qu'elle converge si $\alpha>2$ car son terme général est alors $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xvi) On a $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}=\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi,

- si $a\neq\frac{9}{2}$, le terme général est équivalent à $\underbrace{\left(\frac{a}{3}-\frac{3}{2}\right)}_{\neq 0}\frac{1}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
- si $a=\frac{9}{2}$, le terme général est $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(xvii) On a $e^{1/n}-a-\frac{b}{n}=(1-a)+\frac{1-b}{n}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

- si $a\neq 1$, le terme général tend vers $1-a\neq 0$, et la série diverge grossièrement ;
- si $a=1$ et $b\neq 1$, le terme général est équivalent à $\frac{1-b}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
- si $a=b=1$, le terme général est $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

Remarque : il était habile d'effectuer un développement du terme général avec un terme d'erreur en $\underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ plutôt que d'écrire un terme en $\frac{*}{n^2}$ (qui n'aurait pas eu d'importance) puis un terme d'erreur en $\underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(xviii) Le terme général est équivalent à $2\frac{\ln(n)}{n^a}$. Ainsi, en reprenant le résultat sur les séries de Bertrand, la série converge si et seulement si $a > 1$.

141

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utilisons un DL :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \underbrace{\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{v_n}. \end{aligned}$$

La convergence de la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, la divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ et la convergence absolue, par comparaison à une série de Riemann, de la série $\sum v_n$ entraîne donc la divergence de la série $\sum u_n$.