

Fonctions de deux variables

| | |
|---|----|
| I Fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2 | 2 |
| Ouverts de \mathbb{R}^2 | |
| Fonctions continues | |
| Opérations | |
| Composition | |
| La fonction de PCSI 3 | |
| II Fonctions de classe \mathcal{C}^1 | 5 |
| Dérivées partielles | |
| Gradient | |
| Fonctions de classe \mathcal{C}^1 | |
| III Dérivation des fonctions composées | 12 |
| Composition avec une fonction d'une variable | |
| Première règle de la chaîne | |
| Dérivée selon un vecteur en un point | |
| Deuxième règle de la chaîne | |
| IV Extrema | 15 |



I. Fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2

Ouverts de \mathbb{R}^2

On munit \mathbb{R}^n de la norme euclidienne canonique :

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \end{aligned}$$

1

Définition (boule ouverte de \mathbb{R}^n).

Soit $p \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On appelle *boule ouverte* de centre p et de rayon r la partie :

$$B(p, r) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \|\xi - p\| < r\}.$$

- **Pour $n = 1$.** À quoi ressemble une boule ouverte?
- **Pour $n = 2$.** À quoi ressemble une boule ouverte?

Ce chapitre considérera exclusivement le cas $n = 2$.

Dans ce cas, la boule ouverte $B(p, r)$ est appelée *disque ouvert* de centre p et de rayon r , et notée $D(p, r)$.

2

Définition (ouvert de \mathbb{R}^2).

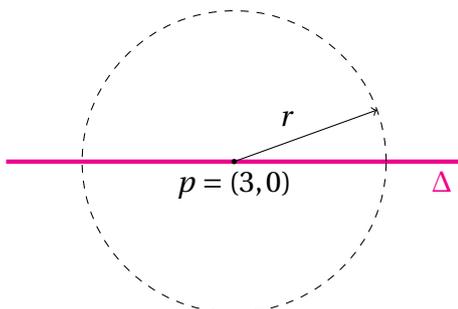
Soit U une partie de \mathbb{R}^2 . On dit que U est un *ouvert* de \mathbb{R}^2 lorsque :

$$\forall p \in U, \quad \exists r > 0, \quad D(p, r) \subset U.$$

3

Exemples.

- Le plan \mathbb{R}^2 est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Le demi-plan $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Plus généralement, $I \times \mathbb{R}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 où I est un intervalle *ouvert* non vide de \mathbb{R} .
- Encore plus généralement, $I \times J$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 où I et J sont des intervalles *ouverts* non vides de \mathbb{R} .
- Le disque unité ouvert $\mathcal{D} = D(0_{\mathbb{R}^2}, 1)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 . S'écrit-il $I \times J$?
- La droite $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2 .



sol → 18



Fonctions continues

Étant donné une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et un point $p = (a, b) \in U$, on notera indifféremment $f(p)$ ou $f(a, b)$ la valeur de f en ce point.

On peut représenter graphiquement une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ par son *graphe* :

$$\Gamma_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\},$$

qui est une partie de $U \times \mathbb{R}$, et donc de \mathbb{R}^3 .

4 **Définition.** Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $p = (a, b) \in U$.

— On dit que la fonction f est *continue en p* lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \xi \in U, (\|\xi - p\| \leq \eta \implies |f(\xi) - f(p)| \leq \varepsilon)$$

ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \xi \in U \cap D(p, \eta), |f(\xi) - f(p)| \leq \varepsilon$.

— On dit que f est *continue sur U* lorsqu'elle est continue en tout point de U .

5 **Exemple.** Par une preuve epsilonesque, montrer que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
 $(x, y) \mapsto x - 2y$.

sol → 18

Dans la suite du cours, on ne fera plus jamais ce genre de preuve pour de telles fonctions.

6 **Proposition (From 1 to 2 variables !).**

preuve

Soit $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue (d'une seule variable).
 $t \mapsto \theta(t)$

Alors la fonction de deux variables $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
 $(x, y) \mapsto \theta(x)$

• **Remarque.** Bien sûr, on a la même conclusion avec $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.
 $(x, y) \mapsto \theta(y)$

• **Généralisation.**

Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
 $t \mapsto \theta(t)$

Alors, pour tout J intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , la fonction $I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
 $(x, y) \mapsto \theta(x)$

Opérations

La définition de la continuité pour les fonctions de deux variables étant le calque de celle vue pour les fonctions d'une variable réelle, on obtient les mêmes théorèmes généraux concernant les opérations avec essentiellement les mêmes démonstrations.

On montre notamment que la somme, le produit et, si le dénominateur ne s'annule pas, le quotient de deux fonctions continues définies sur U sont des fonctions continues.

• **À l'oral.** Redémontrons efficacement que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
 $(x, y) \mapsto x - 2y$.

Montrer que les fonctions $]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.
 $(r, \theta) \mapsto r \cos \theta$ et $(r, \theta) \mapsto r \sin \theta$



Composition

Énonçons les résultats concernant les trois façons de composer une fonction de deux variables et une ou plusieurs fonction(s) d'une variable.

Ci-dessous, la lettre I désigne un intervalle de \mathbb{R} non trivial, les lettres U et V des ouverts non vides de \mathbb{R}^2 .

7 Proposition (composition à gauche).

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs dans I .

Soit $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{cases} f \text{ continue en } p \in U \\ \psi \text{ continue en } f(p) \end{cases} \implies \psi \circ f \text{ continue en } p$$

$$\begin{aligned} \text{où } \psi \circ f : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \psi(f(\xi)) \end{aligned}$$

8 Proposition (composition à droite, 1 variable).

Soit γ_1 et $\gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\Gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ soit à valeurs dans U .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ continues en } t_0 \in I \\ f \text{ continue en } \Gamma(t_0) \end{cases} \implies f \circ \Gamma \text{ continue en } t_0$$

$$\begin{aligned} \text{où } f \circ \Gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{aligned}$$

9 Proposition (composition à droite, 2 variables).

Soit φ_1 et $\varphi_2 : V \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\Phi : \xi \mapsto (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))$ soit à valeurs dans U .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{cases} \varphi_1 \text{ et } \varphi_2 \text{ continues en } p \in V \\ f \text{ continue en } \Phi(p) \end{cases} \implies f \circ \Phi \text{ continue en } p$$

$$\begin{aligned} \text{où } f \circ \Phi : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto f(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)) \end{aligned}$$

10 Exemples très importants.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que les fonctions suivantes sont continues.

$$f_0 : \begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \exp(f(x, y)) \end{aligned}$$

$$f_1 : \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t^2, t^3) \end{aligned}$$

$$f_2 : \begin{aligned}]0, +\infty[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) &\longmapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

La fonction de PCSI 3

11

preuve

Proposition. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

— est continue sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

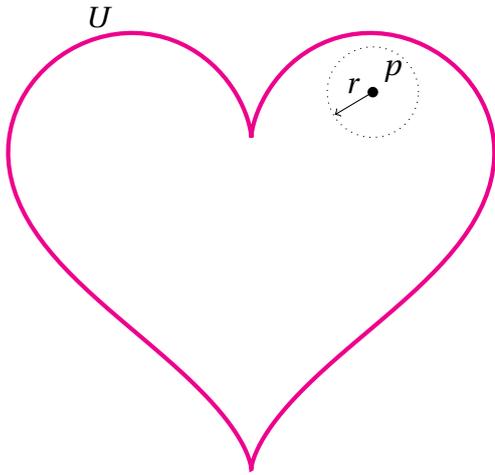
— mais n'est pas continue en $(0, 0)$



II. Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Dérivées partielles

Soit $p = (a, b) \in U$. Comme U est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $D(p, r) \subset U$.



On considère les ensembles :

$$D_{1,p} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in U\} \quad \text{et} \quad D_{2,p} = \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in U\}$$

et les *applications partielles* :

$$f_{1,p}: D_{1,p} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_{2,p}: D_{2,p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x, b) \quad \quad \quad y \longmapsto f(a, y)$$

On a alors les inclusions :

$$]a - r, a + r[\subset D_{1,p} \quad \text{et} \quad]b - r, b + r[\subset D_{2,p}.$$

Notons que $D_{1,p}$ et $D_{2,p}$ ne sont pas nécessairement des intervalles, mais que cela n'a guère d'importance puisque la discussion est ici locale : seul ce qui se passe au voisinage de $a \in D_{1,p}$ et $b \in D_{2,p}$ nous intéresse.

12

Définition (dérivée partielle en un point).

Soit $p = (a, b) \in U$.

- Si l'application partielle $f_{1,p}$ est dérivable en a , on dit que f admet une *première dérivée partielle* au point $p = (a, b)$ et l'on pose :

$$\partial_1 f(a, b) = f'_{1,p}(a).$$

- Si l'application partielle $f_{2,p}$ est dérivable en b , on dit que f admet une *seconde dérivée partielle* au point $p = (a, b)$ et l'on pose :

$$\partial_2 f(a, b) = f'_{2,p}(b).$$

- **Notation.** On utilise en pratique une notation plus parlante.

Pour une fonction f de deux variables dont on note (x, y) les variables, on note plutôt $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ le réel $\partial_1 f(a, b)$.

On s'adapte aux noms des variables apparaissant dans la définition de f .

Cette notation est potentiellement ambiguë, car les variables apparaissant dans la définition de f sont en fait des variables muettes, mais elle ne pose guère de problème à l'usage.

- **Exemple.** Soit $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(r, \theta) \longmapsto r \cos \theta$

Montrons que f admet des dérivées partielles en tout **point** de \mathbb{R}^2 .

Fixons un **point** $p = (r_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$.

★ Considérons la 1^{ère} application partielle **en ce point $p = (r_0, \theta_0)$** , c'est-à-dire $f_{1,p}: r \mapsto r \cos \theta_0$.

Cette fonction $f_{1,p}$ est dérivable **au point r_0** et on a $f'_{1,p}(r_0) = \cos \theta_0$.

Ainsi f admet une première dérivée partielle **au point $p = (r_0, \theta_0)$** et on a $\frac{\partial f}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \cos \theta_0$

★ De même, f admet une 2^{nde} dérivée partielle au point $p = (r_0, \theta_0)$ et on a $\frac{\partial f}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) = \dots\dots\dots$

• **Nouvel exemple.**

On considère la fonction définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ par

$$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto 9x + 8y + 7.$$

Montrons que f admet des dérivées partielles en tout point de U .

Soit $p = (x_0, y_0) \in U$.

Les applications partielles de f en ce point sont :

$$f_{1,p}: \dots \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f_{2,p}: \dots \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \dots \quad \quad \quad y \longmapsto \dots$$

Ces fonctions sont dérivables au point $p = (x_0, y_0)$ et on a

$$f'_{1,p}(x_0) = \dots \quad \text{et} \quad f'_{2,p}(y_0) = \dots$$

Cela signifie que f admet des dérivées partielles au point p et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dots \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dots$$

Bonus. Ceci étant vrai pour tout point $p = (x_0, y_0) \in U$, on en déduit que f admet des dérivées partielles sur U et qu'elles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}: \dots \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}: \dots \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\dots \longmapsto \dots \quad \quad \quad \dots \longmapsto \dots$$

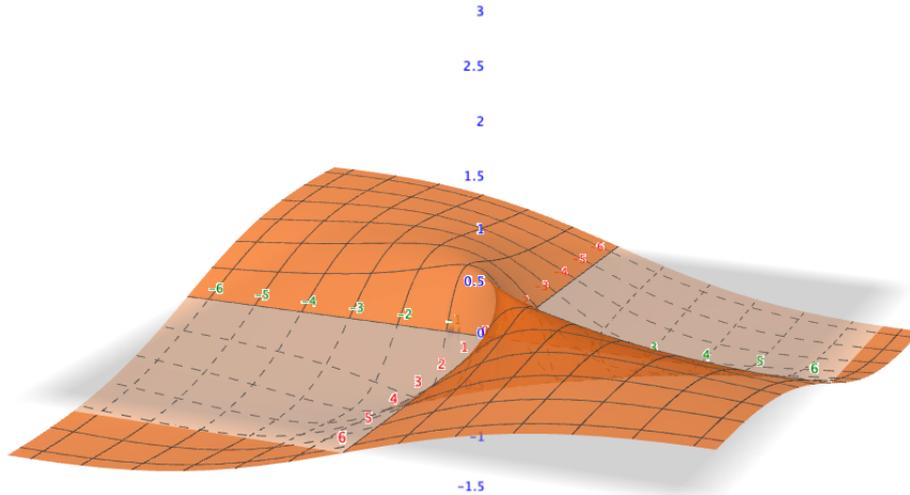


Proposition.

La fonction de PCSI 3

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .

- **À méditer.** Pour une fonction d'une seule variable, la dérivabilité implique la continuité. La fonction de PCSI 3 admet des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 , mais pourtant n'est pas continue sur \mathbb{R}^2 (elle ne l'est pas en $(0, 0)$). Ainsi, on comprend que l'existence des dérivées partielles n'est pas le pendant de la dérivabilité pour les fonctions de deux variables. On verra plus loin la notion de « dérivée d'une fonction selon un vecteur ». Et si vous faites des maths plus tard, vous verrez la notion de *différentiabilité* d'une fonction de plusieurs variables.
- **À retenir.** L'existence des dérivées partielles, même en tout point, n'entraîne pas la continuité.

Question. Considérons l'ouvert $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et la fonction $f: H \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto x^y$$
Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de H .**Proposition (somme et produit).**Soit f et g deux fonctions de U dans \mathbb{R} , et $p \in U$.

- Si f et g admettent des dérivées partielles en p , alors $f + g$ également, et on a :

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) + \frac{\partial g}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) + \frac{\partial g}{\partial y}(p).$$

- Si f et g admettent des dérivées partielles en p , alors fg également, et on a :

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial y}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial y}(p).$$

Gradient

16

Définition. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Si f admet des dérivées partielles sur U , on définit le *gradient* de f comme étant l'application :

$$\begin{aligned}\nabla f : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (a, b) &\longmapsto \nabla f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right).\end{aligned}$$

- **Champ de vecteurs.**

Géométriquement, $\nabla f(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur du plan dont les coordonnées sont $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$. Le gradient est alors un *champ de vecteurs*, c'est-à-dire une application dont les valeurs sont des vecteurs.

- **Exemple.** Considérons la fonction affine

$$\begin{aligned}f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 9x + 8y + 7.\end{aligned}$$

On a vu que f admet des dérivées partielles sur \mathbb{R}^2 .

Le gradient de f est l'application :



Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Si la fonction f admet des dérivées partielles en tout point de U , on peut considérer ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ comme des fonctions définies sur U .

17 **Définition.** La fonction f est dite *de classe \mathcal{C}^1* sur U lorsqu'elle admet des dérivées partielles en tout point de U et que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U .

On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 définies sur U .

• **Exemple affine.**

On considère la fonction (affine) définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ par

$$f: \quad U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto 9x + 8y + 7.$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Preuve. La fonction f admet des dérivées partielles en tout point de U (cf. exemple précédent).

Ces fonctions dérivées partielles sont les suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}: \quad U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}: \quad U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\dots \longmapsto \dots \quad \quad \quad \dots \longmapsto \dots$$

et elles sont continues (WHY?).

• **From 1 to 2 variables!**

Soit $\theta \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ où I est un intervalle ouvert non vide. Soit J un autre intervalle ouvert non vide.

La fonction $g: I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

$$(x, y) \longmapsto \theta(x).$$

Fixons $p = (x_0, y_0) \in I \times J$.

Les applications partielles de g en ce point sont :

$$g_{1,p}: \dots \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g_{2,p}: \dots \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \dots \quad \quad \quad y \longmapsto \dots$$

Ces fonctions sont dérivables sur leur ensemble de définition et on a

$$g'_{1,p}: \dots \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g'_{2,p}: \dots \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \dots \quad \quad \quad y \longmapsto \dots$$

En particulier, au point $p = (x_0, y_0)$, on a

$$g'_{1,p}(x_0) = \dots \quad \text{et} \quad g'_{2,p}(y_0) = \dots$$

Cela signifie que g admet des dérivées partielles au point p et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \dots \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \dots$$

Ceci étant vrai pour tout point $p = (x_0, y_0) \in I \times J$, on en déduit que g admet des dérivées partielles sur $I \times J$ et qu'elles sont données par :

$$\frac{\partial g}{\partial x}: \dots \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}: \dots \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\dots \longmapsto \dots \quad \quad \quad \dots \longmapsto \dots$$

Ces fonctions $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont continues sur (WHY?).

Donc g est de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times J$.



- **Exemple x^y .** Considérons l'ouvert $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et la fonction $f: \begin{array}{l} H \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^y \end{array}$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur H .

On a montré que f admet en tout point de H des dérivées partielles.

Ainsi, f possède des fonctions dérivées partielles définies sur H :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}: \quad H \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}: \quad H \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \dots \quad \quad \quad (x, y) \longmapsto \dots \end{array}$$

Ces fonctions sont continues sur H (WHY).

Donc la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur H .

- **La fonction de PCSI 3.** $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$

On a montré que f possède des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .

Ainsi, f possède des fonctions dérivées partielles définies sur \mathbb{R}^2 :

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}: \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \dots \quad \quad \quad (x, y) \longmapsto \dots \end{array}$$

La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$ (idem pour l'autre dérivée partielle).

La fonction f n'est donc pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

En revanche, on peut montrer (comment?) qu'elle l'est sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (qui est bien un ouvert).



18

Théorème (Développement limité à l'ordre 1). Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $p = (a, b) \in U$.

Il existe alors une fonction $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow p} 0$ et on a :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \varepsilon(x, y) \|(x, y) - (a, b)\|.$$

- **Se ramener en 0.** En notant $U_p = \{\xi - p \mid \xi \in U\}$, on peut réécrire l'égalité du théorème sous la forme :

$$\forall (h, k) \in U_p, \quad f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) k + \varepsilon(h, k) \|(h, k)\|,$$

où $\varepsilon : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varepsilon(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0$.

- **Avec petit o.** Au voisinage de (a, b) :

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + o(\|(x, y) - (a, b)\|).$$

ou encore au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) k + o(\|(h, k)\|).$$

à mettre en parallèle, pour une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une seule variable :

au voisinage de a :

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x - a) + o(|x - a|)$$

ou encore au voisinage de 0 :

$$g(a + h) = g(a) + g'(a)h + o(|h|)$$

- **Avec le gradient.** Au voisinage de p , on a :

$$f(\xi) = f(p) + \langle \nabla f(p) \mid \xi - p \rangle + o(\|\xi - p\|)$$

ou encore, avec d'autres notations, en écrivant $p = (x_0, y_0)$, on a :

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0) \mid (x - x_0, y - y_0) \right\rangle + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

à mettre en parallèle, pour une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ d'une seule variable :

au voisinage de x_0 :

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$$

- **Plan tangent.** Le théorème précédent affirme que la fonction affine :

$$(x, y) \mapsto f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

approche au premier ordre la fonction f au voisinage du point (a, b) .

En particulier, le plan d'équation :

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b),$$

qui est le graphe de cette fonction affine, est le *plan tangent* du graphe de la fonction f en (a, b) , c'est-à-dire de la surface d'équation $z = f(x, y)$.

19

preuve

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Alors f est continue.

20

Proposition. Soit $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Alors la somme $f + g$ et le produit fg sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

- L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^U , qui est par ailleurs stable par multiplication.



III. Dérivation des fonctions composées

- **Rappel important.** Pour des fonctions d'une variable :

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs dans J .

Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ à valeurs dans } J \\ g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } J \end{cases}$ alors $g \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall a \in I, \quad (g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Composition avec une fonction d'une variable

21
preuve

Proposition.

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs dans I .

Soit $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \text{ à valeurs dans } I \\ \psi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \end{cases}$ alors $\psi \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U et

$$\forall p \in U, \quad \frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}(p) = \psi'(f(p)) \frac{\partial f}{\partial x}(p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial y}(p) = \psi'(f(p)) \frac{\partial f}{\partial y}(p).$$

- **Inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 .**

En utilisant pour ψ la fonction inverse, on obtient par exemple que l'inverse d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui ne s'annule pas est encore de classe \mathcal{C}^1 .

- **Quotient de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 .**

D'après la propriété 20 pour le produit, on en déduit que si f et g sont de classe \mathcal{C}^1 et si g ne s'annule pas, alors le quotient f/g est encore de classe \mathcal{C}^1 .

22
sol → 20

Question. Montrer que la norme $N : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{x^2 + y^2} \end{matrix}$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0, 0)$,

mais que sa restriction à $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Donner ses dérivées partielles.



Première règle de la chaîne

23

preuve

Proposition (composition à droite, 1 variable).

Soit γ_1 et γ_2 deux fonctions définies sur I telles que $\Gamma : t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ soit à valeurs dans U .
Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{cases} \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \end{cases} \implies f \circ \Gamma \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I$$

et dans ce cas :

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \Gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(t))\gamma_2'(t).$$

c'est-à-dire

$$(f \circ \Gamma)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Gamma \right) \times \gamma_1' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \Gamma \right) \times \gamma_2'$$

- On peut écrire de façon concise la dérivée de $f \circ \Gamma$ à l'aide du gradient de f :

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \Gamma)'(t) = \langle \nabla f(\Gamma(t)) \mid \Gamma'(t) \rangle \quad \text{où l'on a noté } \Gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$$

24

sol → 21

Question. Soit $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 , avec u à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Considérons $w : t \mapsto u(t)^{v(t)}$.

À l'aide de la règle de la chaîne, montrer que w est de classe \mathcal{C}^1 et déterminer sa dérivée.

On considérera la fonction $f : \begin{array}{l} H \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^y \end{array}$ définie sur l'ouvert $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

Dérivée selon un vecteur en un point

25

preuve

Proposition. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in U$, $v = (x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2$, une fonction, un point et un vecteur.

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors la fonction $\varphi_{v,p} : t \mapsto f(p + tv)$ est définie au voisinage de 0, dérivable en 0 et :

$$\varphi'_{v,p}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)x_v + \frac{\partial f}{\partial y}(p)y_v$$

On note $D_v f(p) = \varphi'_{v,p}(0)$ ce nombre dérivé que l'on appelle *dérivée de f en p selon le vecteur v* .

On a

$$D_v f(p) = \langle \nabla f(p) \mid v \rangle.$$

- Cas particulier.** Si on prend $v = (1, 0)$ le premier vecteur de la base canonique, alors $D_v f(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$.
- Remarque à comprendre!** La fonction $f_{v,p}$ correspond, lorsque $v \neq 0$, à la fonction f « le long de la droite » passant par p et dirigée par v .
La notion de dérivée selon un vecteur généralise donc celle de dérivée partielle, en ne faisant plus jouer de rôle particulier aux droites parallèles aux axes de coordonnées.
- Pour la culture.** Si v est un vecteur unitaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$|D_v f(p)| = |\langle \nabla f(p) \mid v \rangle| \leq \|\nabla f(p)\|.$$

En outre, la dérivée $D_v f(p)$ est alors maximale (resp. minimale) si $\nabla f(p)$ est positivement (resp. négativement) colinéaire à v : elle vaut dans ce cas $\pm \|\nabla f(p)\|$.

Le gradient de f en p pointe donc dans la direction dans laquelle f croît le plus vite (qui est aussi, en sens inverse, celle où elle décroît le plus vite). Cela correspond à la direction de plus grande pente sur le graphe Γ_f .



Deuxième règle de la chaîne

26

preuve

Proposition (composition à droite, 2 variables).

Soit φ et ψ deux fonctions définies sur V telles que $\Phi : \xi \mapsto (\varphi(\xi), \psi(\xi))$ soit à valeurs dans U .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

On a :

$$\begin{cases} \varphi \text{ et } \psi \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } V \\ f \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \end{cases} \implies f \circ \Phi \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } V$$

et on a

$$\forall p \in V, \quad \partial_1(f \circ \Phi)(p) = \partial_1 f(\Phi(p)) \partial_1 \varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p)) \partial_1 \psi(p)$$

et

$$\forall p \in V, \quad \partial_2(f \circ \Phi)(p) = \partial_1 f(\Phi(p)) \partial_2 \varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p)) \partial_2 \psi(p).$$

- Si l'on note $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ et $\Phi : (u, v) \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$, ces formules deviennent, selon la notation usuelle :

$$\forall p \in V, \quad \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial u}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(p)) \frac{\partial \varphi}{\partial u}(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(p)) \frac{\partial \psi}{\partial u}(p)$$

et

$$\forall p \in V, \quad \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial v}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(p)) \frac{\partial \varphi}{\partial v}(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi(p)) \frac{\partial \psi}{\partial v}(p).$$

27

sol → 24

Question. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Montrer que $F : (u, v) \mapsto f(u + uv, u - uv^2)$ est de classe \mathcal{C}^1 et déterminer ses dérivées partielles.

28

Exemples récapitulatifs.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Les fonctions g suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 (WHY?).

Déterminer les dérivées (partielles) de g en un point p_0 , en fonction des dérivées partielles de f .

Le point p_0 sera noté (x_0, y_0) ou t_0 ou (r_0, θ_0) .

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \exp(f(x, y))$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(t^2, t^3)$$

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$



IV. Extrema

Dans toute cette section, U désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^2 .

29

Définition.

Soit X une partie non vide de \mathbb{R}^2 , et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $p \in X$.

- On dit que f admet un *maximum* en p lorsque $\forall \xi \in X, f(\xi) \leq f(p)$.
- On dit que f admet un *maximum local* en p lorsque :

$$\exists \eta > 0, \quad \forall \xi \in X \cap D(p, \eta), \quad f(\xi) \leq f(p).$$

- On définit de même les notions de *minimum* et de *minimum local*.
- On dit que f admet un *extremum* en p si f admet un maximum ou un minimum en p .
On définit de même la notion d'*extremum local*.

- **Exemple 1.** La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est positive, et nulle en $(0, 0)$.
 $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$

Elle admet un minimum en $(0, 0)$.

En revanche, elle n'est pas majorée, donc n'admet pas de maximum.

- **Exemple 2.** Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto \exp(x)$

Cette fonction est minorée (par 0) mais n'admet pas de minimum : si h admettait un minimum en (a, b) , on en déduirait que la fonction d'une variable $x \mapsto \exp(x)$ admettrait un minimum en a , ce qui est impossible.

30
sol → 24

Question. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)$.

Montrer que f admet en $(0, 0)$ un maximum local, qui n'est pas global.



31

Définition. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $p \in U$.

On dit que p est un *point critique* pour f lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$, c'est-à-dire lorsque $\nabla f(p) = (0, 0)$.

32

preuve

Proposition. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $p \in U$.

Si p admet un extremum local en p , alors p est un point critique de f .

- **Point intérieur?** Le théorème concernant les fonctions d'une variable, à avoir le lemme de l'extremum local, exigeait une hypothèse supplémentaire : le point était supposé intérieur à l'intervalle. Dans le théorème précédent, cette hypothèse est rendue superflue par le fait que U soit un ouvert de \mathbb{R}^2 : le point p est pour ainsi dire automatiquement dans l'intérieur de U .
- **Pour la culture.** On voit que, même si le théorème est énoncé dans le cadre d'une fonction globalement de classe \mathcal{C}^1 , la démonstration n'utilise en fait que l'existence des dérivées partielles en p .
- **Attention.** Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque du théorème est fautive : une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum local en chacun de ses points critiques.

Par exemple, considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^3 + y^3$.

On vérifie que f admet des dérivées partielles :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 3a^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 3b^2.$$

En particulier, l'origine $(0, 0)$ est un point critique.

Mais $(0, 0)$ n'est pas un maximum local, car $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x, 0) > f(0, 0)$.

De même, $(0, 0)$ n'est pas un minimum local.

- **Méthode.** Pour étudier les extrema (locaux ou globaux) d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$,
 - on trouve ses points critiques en résolvant les équations $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$;
 - pour chaque point critique (a, b) , on cherche à déterminer (soit au voisinage de (a, b) , soit globalement) le signe de $f(x, y) - f(a, b)$.
- **Retour sur l'exemple 1.** La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe \mathcal{C}^1 par opérations. et on a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 2b.$$

Ainsi, un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est critique si et seulement si $2a = 2b = 0$: le seul point critique est l'origine $(0, 0)$.

Il ne peut donc y avoir aucun extremum local à l'exception de $(0, 0)$, dont on a déjà vu qu'il s'agissait d'un minimum (global).

33

Question. Déterminer les extrema (locaux et globaux) des fonctions appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ suivantes :

1. $f : (x, y) \mapsto \cos(x) + y^2$;

2. $f : (x, y) \mapsto e^{3x} y^2 + e^x y$;

3. $f : (x, y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y$;

4. $f : (x, y) \mapsto \exp(x \operatorname{Arctan}(y))$.



Fonctions de deux variables

preuve et éléments de correction

3

(i) Soit $p = (a, b) \in H$. On a donc $a > 0$.

Montrons $D(p, a) \subset H$, ce qui conclura. Soit $\xi = (x, y) \in D(p, a)$.

On a $(x - a)^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 = \|\xi - p\|^2 < a^2$, d'où l'encadrement $-a < x - a < a$.

Il s'ensuit $x > 0$, donc $\xi \in H$.

(ii) Soit $p \in D((0, 0), 1)$. On a donc $\|p\| < 1$.

Posons $r = 1 - \|p\|$. On a bien $r > 0$, et l'on va montrer l'inclusion $D(p, r) \subset D(0, 1)$, ce qui conclura.

Soit $\xi \in D(p, r)$.

On a $\|\xi\| \leq \|p\| + \|\xi - p\|$ d'après l'inégalité triangulaire, d'où $\|\xi\| < \|p\| + 1 - \|p\| = 1$, ce qui prouve $\xi \in D(0, 1)$.

On montrerait de la même façon que tout disque ouvert est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

(iii) Soit $r > 0$. Le disque ouvert $D((0, 0), r)$ contient le point $(0, r/2)$, qui n'appartient pas à Δ .

On en déduit qu'aucun disque ouvert de centre $(0, 0)$ n'est inclus dans Δ , ce qui montre que Δ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2 .

5

Soit $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que f est continue en p .

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $\eta = \varepsilon/3$.

Soit $\xi = (x, y) \in U \cap D(p, \eta)$, c'est-à-dire $\xi \in U$ tel que $\|\xi - p\| < \eta$.

On a alors $|x - a| \leq \|\xi - p\| < \eta$. De même, $|y - b| \leq \eta$.

Par l'inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$|f(\xi) - f(p)| \leq |x - a| + 2|y - b| \leq 3\eta \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la continuité de f en p .

6

Soit $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que g est continue en p .

Soit $\varepsilon > 0$.

Par continuité de θ , on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - a| \leq \delta \implies |\theta(x) - \theta(a)| \leq \varepsilon$$

Posons $\eta = \delta$.

Soit $\xi = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \cap D(p, \eta)$.

Comme $|x - a| \leq \|\xi - p\| < \eta$, on a :

$$|g(\xi) - g(p)| = |g(x, y) - g(a, b)| = |\theta(x) - \theta(a)| \leq \varepsilon$$

11

Montrons que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Par l'absurde, si f était continue en $(0, 0)$, la fonction $t \mapsto f(t, t)$ serait continue en 0 par composition. Or

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t, t) = \begin{cases} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = 1/2 & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

qui n'est pas continue en 0.



13

Fixons $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

— Montrons que f admet une première dérivée partielle en p .

— Si $b \neq 0$, l'application partielle $f_{1,p} : x \mapsto f(x, b) = \frac{xb}{x^2 + b^2}$ est dérivable sur \mathbb{R} donc dérivable en a , et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{b(b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2}.$$

— Si $b = 0$, l'application partielle $f_{1,p} : x \mapsto f(x, 0) = 0$ est dérivable sur \mathbb{R} , donc dérivable en a , et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0) = 0.$$

Bilan. La fonction f admet une première dérivée partielle en p et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \begin{cases} \frac{b(b^2 - a^2)}{(a^2 + b^2)^2} & \text{si } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

— Par symétrie, on obtient que f admet une deuxième dérivée partielle en p et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \begin{cases} \frac{a(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2} & \text{si } a \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

14

Soit $p = (a, b) \in H = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Montrons que f admet des dérivées partielles en p .

— L'application partielle $\varphi_1 : x \mapsto x^b$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée $\varphi_1' : x \mapsto b x^{b-1}$.
Donc f admet une première dérivée partielle en p :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = b a^{b-1}.$$

— L'application partielle $\varphi_2 : y \mapsto a^y = \exp(y \ln(a))$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $\varphi_2' : y \mapsto \ln(a) \exp(y \ln(a)) = \ln(a) a^y$.

Donc f admet une deuxième dérivée partielle en p :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \ln(a) a^b.$$

19

Fixons $p = (a, b) \in U$. Montrons que f est continue en p , c'est-à-dire montrons que

$$f(a+h, b+k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a, b)$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , on peut écrire un DL₁ au point (a, b) :

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \varepsilon(h, k) \|(h, k)\|,$$

Or

$$h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \varepsilon(h, k) \|(h, k)\| \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} 0$$

D'où le résultat.



21

Montrons que $\psi \circ f$ admet une fonction première dérivée partielle et que cette fonction est continue. Pour cela, on montre que $\psi \circ f$ admet une première dérivée partielle en un point $p = (a, b) \in U$ fixé.

• **Première dérivée partielle en p .** Notons

$$\begin{aligned} \kappa_{1,p} : D_{1,p} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (\psi \circ f)(x, b) \end{aligned}$$

de telle sorte que $\kappa_{1,p} = \psi \circ f_{1,p}$ où $f_{1,p}$ est la première dérivée partielle de f en p .

D'après le théorème pour la composée de fonctions de 1 variable, on en déduit que $\kappa_{1,p}$ est dérivable en a et l'on obtient :

$$\kappa'_{1,p}(a) = \psi'(f_{1,p}(a)) f'_{1,p}(a)$$

Ainsi, $\psi \circ f$ admet une première dérivée partielle en p et on a :

$$\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}(p) = \psi'(f(p)) \frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

• **Première dérivée partielle sur U .**

Ceci étant vrai pour tout point $p \in U$, on en déduit que $\psi \circ f$ admet une fonction première dérivée partielle qui vaut :

$$\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x} = (\psi' \circ f) \times \frac{\partial f}{\partial x}$$

• **Aspect \mathcal{C}^1 sur U**

- La dérivée ψ' est continue (car ψ est de classe \mathcal{C}^1)
- La fonction f est continue (car f de classe \mathcal{C}^1).
- La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue (car f de classe \mathcal{C}^1).

Par produit, on en déduit que $\frac{\partial(\psi \circ f)}{\partial x}$ est continue.

On procède alors exactement de même pour la deuxième dérivée partielle.

22

- Considérons la première application partielle de N en $p = (0, 0)$

$$x \longmapsto N(x, 0) = |x|$$

Cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Donc la fonction N n'admet pas de première dérivée partielle en $(0, 0)$.

- Idem pour la deuxième dérivée partielle.

- Sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Par opérations, l'application $N^2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U , et

$$\frac{\partial(N^2)}{\partial x} : (x, y) \longmapsto 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial y} : (x, y) \longmapsto 2y$$

Cette application N^2 est de classe \mathcal{C}^1 sur U et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

La fonction racine carrée est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

Par composition, la fonction $N = \sqrt{N^2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U et :

$$\frac{\partial N}{\partial x} : (x, y) \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y} : (x, y) \longmapsto \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

23



Soit $t_0 \in I$.

Montrons que $f \circ \Gamma$ est dérivable en t_0 en exhibant un $DL_1(t_0)$.

Posons $p = \Gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$, qui appartient à U .

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , il existe une fonction $\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow p} 0$ et :

$$\forall (x, y) \in U, \quad f(x, y) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - \gamma_1(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - \gamma_2(t_0)) + \varepsilon(x, y) \|(x, y) - p\|.$$

Comme $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in U$ pour tout $t \in I$, on a

$$\forall t \in I, \quad \underbrace{f(\gamma_1(t), \gamma_2(t))}_{f \circ \Gamma(t)} = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p) \underbrace{(\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0))}_{\gamma'_1(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \underbrace{(\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0))}_{\gamma'_2(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0)} + \varepsilon(\Gamma(t)) \|\Gamma(t) - p\|.$$

Écrivons les petits o avec des fonctions ε_1 et ε_2 .

$$\forall t \in I, \quad f \circ \Gamma(t) = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x}(p)(\gamma'_1(t_0)(t-t_0) + \varepsilon_1(t)(t-t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(\gamma'_2(t_0)(t-t_0) + \varepsilon_2(t)(t-t_0)) + \varepsilon(\Gamma(t)) \|\Gamma(t) - p\|.$$

d'où

$$\forall t \in I, \quad f \circ \Gamma(t) = f(p) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p) \gamma'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \gamma'_2(t_0) \right) (t - t_0) + \theta(t)(t - t_0)$$

où on a posé :

$$\theta : I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(p) \varepsilon_1(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \varepsilon_2(t) + \varepsilon(\Gamma(t)) \frac{\|\Gamma(t) - p\|}{t - t_0} & \text{si } t \neq t_0 \\ 0 & \text{si } t = t_0 \end{cases}$$

Montrons que $\theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$.

Comme $\varepsilon_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$ et $\varepsilon_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$, il suffit de montrer que $\varepsilon(\Gamma(t)) \frac{\|\Gamma(t) - p\|}{t - t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$.

— Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \frac{\|\Gamma(t) - p\|}{t - t_0} \right| \leq \left| \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_0)}{t - t_0} \right| + \left| \frac{\gamma_2(t) - \gamma_2(t_0)}{t - t_0} \right|.$$

Explication. Pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a $\|(h, k)\| \leq \|(h, 0)\| + \|(0, k)\| = |h| + |k|$

Comme le terme de droite converge vers $|\gamma'_1(t_0)| + |\gamma'_2(t_0)|$, il est borné au voisinage de t_0 , et il en va alors de même du terme de gauche.

— De plus, on a $\varepsilon(\Gamma(t)) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$ par continuité de γ_1 et γ_2 en t_0 et le fait que $\varepsilon(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow p} 0$.

La fonction $f \circ \Gamma$ admet un $DL_1(t_0)$, donc est dérivable en t_0 et on a

$$(f \circ \Gamma)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p) \gamma'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \gamma'_2(t_0).$$

ce qui se réécrit :

$$(f \circ \Gamma)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(t_0)) \gamma'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(t_0)) \gamma'_2(t_0).$$

On a donc montré l'égalité de fonctions :

$$(f \circ \Gamma)' = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \circ \Gamma \right) \times \gamma'_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \circ \Gamma \right) \times \gamma'_2$$

On constate que cette fonction dérivée est continue par opération, d'où l'aspect \mathcal{C}^1 de $f \circ \Gamma$.



Considérons la fonction $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur l'ouvert $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
 $(x, y) \mapsto x^y$

On a $w(t) = f(u(t), v(t))$.

On note $\Gamma: t \mapsto (u(t), v(t))$, de sorte que $w = f \circ \Gamma$.

- Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $I = \mathbb{R}$ et $\Gamma = (u, v)$ est à valeurs dans H .
- La fonction f est de classe \mathcal{C}^1 sur H et ses dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}: (x, y) \mapsto y x^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}: (x, y) \mapsto \ln(x) x^y.$$

D'après la première règle de la chaîne, on en déduit que la fonction $w = f \circ \Gamma$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad w'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) v'(t) \\ &= u'(t) v(t) u(t)^{v(t)-1} + v'(t) \ln(u(t)) u(t)^{v(t)} \\ &= \left(\frac{u'(t) v(t)}{u(t)} + v'(t) \ln(u(t)) \right) u(t)^{v(t)}. \end{aligned}$$

25



- Montrons que $\varphi_{v,p}$ est bien définie au voisinage de 0.

— Cas $v \neq 0$.

Comme U est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $D(p, r) \subset U$.

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < \frac{r}{\|v\|}$, l'inégalité $\|tv\| < r$.

D'où $p + tv \in D(p, r)$.

Ainsi, $\varphi_{v,p}$ est bien définie sur $\left] -\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|} \right[$.

— Si $v = 0$, la fonction $t \mapsto p + tv$ est constante égale à p .

Ainsi, $\varphi_{v,p}$ est bien définie sur \mathbb{R} .

Dans tous les cas, la fonction $t \mapsto p + tv$ envoie un intervalle d'intérieur non vide centré en 0, dans U .
Ce qui montre que $\varphi_{v,p}$ est définie au voisinage de 0. Notons I un tel voisinage.

- Montrons que $\varphi_{v,p}$ est dérivable en 0.

Notons $p = (a, b)$.

On pose $\Gamma = \Gamma_{v,p} : t \mapsto (a + tx_v, b + ty_v)$ qui est définie sur I à valeurs dans U .

On a $\Gamma(0) = p$.

— γ_1 et γ_2 sont \mathcal{C}^1 sur I

— f est \mathcal{C}^1 sur U

D'après la première règle de la chaîne, la composée $f \circ \Gamma$ est \mathcal{C}^1 sur I , a fortiori dérivable en 0, et on a

$$(f \circ \Gamma)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Gamma(0))\gamma_1'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\Gamma(0))\gamma_2'(0)$$

$$\varphi'_{v,p}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)x_v + \frac{\partial f}{\partial y}(p)y_v$$

26



On pose $F = f \circ \Phi$.

On veut montrer que cette fonction F est de classe \mathcal{C}^1 .

Autrement dit, que F admet des dérivées partielles en tout point $p \in V$, et que les fonctions dérivées partielles sont continues.

On fixe $p \in V$.

On étudie les applications partielles de F .

Soit $p = (a, b) \in V$ et $D_{1,p} = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in V\}$.

Les fonctions φ et ψ définissent des applications partielles :

$$\begin{array}{ccc} \gamma_{1,p} : D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x, b) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \gamma_{2,p} : D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \psi(x, b) \end{array}$$

telles que l'application $\Gamma : x \mapsto (\gamma_{1,p}(x), \gamma_{2,p}(x)) = (\varphi(x, b), \psi(x, b)) = \Phi(x, b)$ soit à valeurs dans U .

On a $\Gamma(a) = \Phi(p)$.

La première application partielle de $F = f \circ \Phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ en p est alors :

$$\begin{array}{ccc} F_{1,p} : D_{1,p} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(\gamma_{1,p}(x), \gamma_{2,p}(x)), \end{array}$$

c'est-à-dire que l'on a $F_{1,p} = f \circ \Gamma$.

D'après la première règle de la chaîne, cette fonction est de classe \mathcal{C}^1 , de dérivée :

$$\begin{aligned} \partial_1(f \circ \Phi)(p) &= F'_{1,p}(a) = (f \circ \Gamma)'(a) = \partial_1 f(\Gamma(a)) \gamma'_{1,p}(a) + \partial_2 f(\Gamma(a)) \gamma'_{2,p}(a) \\ &= \partial_1 f(\Phi(p)) \partial_1 \varphi(p) + \partial_2 f(\Phi(p)) \partial_1 \psi(p). \end{aligned}$$

On a donc montré l'égalité de fonctions :

$$\partial_1(f \circ \Phi) = (\partial_1 f \circ \Phi) \partial_1 \varphi + (\partial_2 f \circ \Phi) \partial_1 \psi.$$

Les dérivées partielles étant continues, les composées $\partial_1 f \circ \Phi$ et $\partial_2 f \circ \Phi$ sont continues.

D'où la continuité de $\partial_1(f \circ \Phi)$.

On procède de même pour la deuxième dérivée partielle, ce qui montre la deuxième formule et la continuité de $\partial_2(f \circ \Phi)$.

Ainsi, la fonction $f \circ \Phi$ est de classe \mathcal{C}^1 .

27

— La fonction $\varphi : (u, v) \mapsto u + uv$ est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}(a, b) = 1 + b \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a, b) = a.$$

— La fonction $\psi : (u, v) \mapsto u - uv^2$ est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}(a, b) = 1 - b^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial v}(a, b) = -2ab.$$

D'après la deuxième règle de la chaîne, on en déduit que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(a, b) = (1 + b) \frac{\partial f}{\partial x}(a + ab, a - ab^2) + (1 - b^2) \frac{\partial f}{\partial y}(a + ab, a - ab^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(a, b) = a \frac{\partial f}{\partial x}(a + ab, a - ab^2) - 2ab \frac{\partial f}{\partial y}(a + ab, a - ab^2).$$



30

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; notons $r = \|(x, y)\|$.

On a alors $f(x, y) = r^4 - r^2 = r^2(r^2 - 1)$.

Si on suppose que $(x, y) \in D((0, 0), 1)$, alors $r^2 \leq 1$. Donc $r^2(r^2 - 1) \leq 0$.

D'où $f(x, y) \leq 0 = f(0, 0)$.

Ce qui montre que f admet en $(0, 0)$ un maximum local.

En revanche, comme $r^4 - r^2 \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$, la fonction f n'est pas majorée, donc elle n'admet en particulier pas de maximum global.

32

IDEE : Via les applications partielles, on se ramène au théorème correspondant pour les fonctions d'une variable.

Supposons que $p = (a, b)$ admette un extremum local en p .

L'application partielle $f_{1,p} : t \mapsto f(t, b)$ admet donc un extremum local en a .

On a vu que le domaine de définition de $f_{1,p}$ contient un intervalle $]a - r, a + r[$ centré en a sur lequel la restriction de $f_{1,p}$ admet donc aussi un extremum local.

Le point a étant intérieur à cet intervalle, le lemme de l'extremum local nous donne $f'_{1,p}(a) = 0$, c'est-à-dire $\frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0$.

En procédant de même avec la deuxième dérivée partielle, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y}(p) = 0$.

Ainsi, $p = (a, b)$ est un point critique de f .

