Programme de colle n° 16

semaine du 9 février 2025

Le thème de la colle est « **Polynômes** »

Pour les colleurs. Le chapitre Polynômes est dense et nouveau pour les élèves, soyez indulgents !
Si tout a été correctement traité, et s'il reste 10 minutes, on pourra donner un exo d'arithmétique. Mais attention, le programme d'arithmétique n'est pas celui de MPSI, c'est celui de Terminale. Donc je vous demande de bien regarder le programme officiel : cela n'empêche pas évidemment de poser un exo où l'on doit réfléchir !!!

Polynômes

- Un polynôme 1-périodique est constant, et réciproquement, c'est-à-dire $\left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X) = P(X+1)\right\} = \mathbb{K}_0[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a les deux égalités remarquables suivantes
  $X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$ et $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (X - \omega)$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ admet $n+1$ racines *distinctes*, alors $P = 0$.
- Prouver l'énoncé suivante (nous avons fait une preuve par récurrence finie) :

  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ des scalaires distincts.
  On a l'implication
  $$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ racines de } P \implies (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r) \text{ divise } P$$
  L'autre implication est immédiate (WHY ?).
- Prouver :

  Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. La famille $\left((X-\alpha)^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

  et dans la foulée, prouver la formule de Taylor.
- Prouver

  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$.
  Le scalaire α est racine de multiplicité ***au moins*** *m si et seulement si*
  $$\forall\, k \in [\![0, m-1]\!], \quad P^{(k)}(\alpha) = 0$$
  Il y a m conditions d'annulation $P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) = 0,\ \ldots,\ P^{(m-1)}(\alpha) = 0.$

  Le colleur peut consulter le cours en ligne pour voir la définition de cette locution qui ne nécessite pas P non nul ! En revanche, pour définir la multiplicité de α, alors, oui, j'ai besoin de P non nul.

  Rappel : on a fourni une preuve par équivalence, à l'aide de la formule de Taylor.

Dérivation

- Preuve du lemme de l'extremum local
- Preuve du théorème de Rolle
- Preuve du théorème des accroissements finis, version valeur absolue et/ou version double inégalité
- Preuve du théorème de la limite de la dérivée (limite finie et infinie).
- Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- Savoir donner un exemple de fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (avec preuve bien sûr).
  On pourra penser à $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$
  Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, mais pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (la dérivée n'est pas continue en 0)

Polynômes

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de base des polynômes et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite aux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensemble des polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Combinaison linéaire et produit de polynômes, formule du binôme. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Les fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
e) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$. Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

Rudiments d'arithmétique

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Entiers naturels, entiers relatifs, divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples.	
Théorème de la division euclidienne.	
PGCD de deux entiers relatifs dont l'un au moins est non nul.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
PPCM.	
Algorithme d'Euclide.	
Nombre premier.	
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	La démonstration est hors programme. Application au calcul du PGCD et du PPCM.