Programme de colle n° 5

semaine du 4 novembre 2024

Remarque pour les colleurs.

Le thème de la colle est « généralités sur les fonctions réelles » et « fonctions usuelles ».

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Preuves et petits exercices à connaître (questions de difficulté inégale...)

Un peu du chapitre « Fonctions réelles »

- Soit D une partie quelconque de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone, alors elle est injective.
- Soit $f : X \rightarrow Y$ une bijection où X, Y sont des parties de $\mathbb{R}$.
Si f est strictement monotone, alors f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f .
- Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Alors :

$$f \text{ est bornée} \iff \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in X, |f(x)| \leq K$$

- Soit $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.
$$x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f est n -fois dérivable sur $] -1, +\infty[$ et on a $f' : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Un peu du chapitre « Fonctions usuelles »

- Preuve de $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
- En **admettant** que $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, savoir prouver $\frac{(\ln x)^b}{x^a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ pour $a, b > 0$.
- Définition de la fonction Arctangente; variations; graphe; dérivabilité
- Définition de la fonction Arcsinus; variations; graphe; dérivabilité
- Définition de la fonction Arccosinus; variations; graphe; dérivabilité
- Deux preuves de (en utilisant la dérivation, puis sans dériver avec la définition de Arctan)

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- Étude de la fonction $x \mapsto \text{Arcsin}(\sin x)$.
- Présentation des fonctions ch et sh : définition, variations, graphe, dérivabilité
- Soit $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles dérivables sur I .
Montrer que la fonction complexe $f : t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$ est dérivable sur I et donner sa dérivée.

A - Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Traduction géométrique de ces propriétés.
La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivées d'ordre supérieur.

Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles.

Résultats admis à ce stade.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités $\exp(x) \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$.

Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.

Fonctions hyperboliques sh, ch.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Dérivée, variations, représentation graphique.

Dérivée, variations, représentation graphique.

La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.