Matrices

Systèmes linéaires

exercices

Opérations sur les matrices

101 Contre-exemple

Déterminer deux matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que :

1. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ et $BA \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$.
2. $AB = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$, $BA = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ et $A \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$ et $B \neq 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$.

102 Produit matriciel avec la matrice J

On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer JMJ.

103 Calcul de puissance et Newton

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer A^3 puis les puissances de $A + I_3$.

104 Puissance de la matrice « surdiagonale unité »

Soit N la matrice de taille n ayant des 1 sur sa sur-diagonale et des 0 ailleurs :

$$\operatorname{coeff}_{i,j}(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i+1,j} \qquad\qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer les puissances successives de N, disons N^k pour $k \in \mathbb{N}$ (faire des dessins pour $n = 4$ et pour n quelconque, et essayer ensuite de faire une preuve formelle, sans dessin ; on pourra raisonner par récurrence finie).
En déduire que N est nilpotente.

105 Vect(A, I)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 + 2A - 3I = 0$.
En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n est combinaison linéaire de A et I.

106 Matrice colonne, matrice ligne

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$.

Écrire A comme le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne.
En déduire A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

107 Calcul de puissances en pagaille

Calculer les puissances successives des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Un peu de raisonnement

108 **Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

109 **Commutant d'une matrice diagonale**

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D.

110 **Stabilité des matrices nilpotentes**

On rappelle qu'une matrice carrée est *nilpotente* si l'une de ses puissances est nulle.
Soit A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $A+B$ et AB sont également nilpotentes. Que dire si l'on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Matrices carrées inversibles

111 Avec un polynôme annulateur

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calculer $(A+I)^3$. En déduire sans calcul que A est inversible.
3. Énoncer un résultat qui généralise les questions précédentes :
   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que ...
   alors A est inversible.

112 La matrice $J - I$

Pour $n \geqslant 2$, on considère la matrice carrée A de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1. Est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.

S'appuyer sur la matrice pleine de 1 et sur le fait que le carré de cette matrice est connu.

113 Nilpotence et inversibilité

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente.
   En utilisant la formule de Bernoulli, montrer que la matrice $I - N$ est inversible et exprimer son inverse comme polynôme en N (càd comme combinaison linéaire des puissances de N).
2. Soit A la matrice de taille n ayant des 1 sur la diagonale, des -1 sur la sur-diagonale et des 0 ailleurs :
   $$\operatorname{coeff}_{i,j}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ -1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
   En utilisant la question précédente, montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

114 Une mini matrice compagnon

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$. Montrer que A est inversible si et seulement si $x \neq 0$.

115 Inversible avec paramètres

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $A_{x,y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & x \\ 1 & 4 & y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Représenter dans le plan l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles la matrice $A_{x,y}$ n'est pas inversible.

116 Inversible ou pas ?

Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} (z \in \mathbb{C}), \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

117 Échelonnement des matrices carrées

Montrer qu'une matrice est inversible si et seulement si elle peut s'écrire comme un produit de matrices d'opérations élémentaires.

118 Inversibilité et produit

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. On suppose que AB est inversible.
Montrer que A et B sont inversibles. Que peut-on dire de BA ?

On utilisera librement le critère si $\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ (MX = 0 \implies X = 0)$, alors M est inversible.

119 Matrice à diagonale dominante

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

1. Montrer que :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \quad \Big(AX = 0 \implies X = 0\Big)$$

   Une fois le raisonnement lancé, on pourra s'aider d'un raisonnement par l'absurde et considérer $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$.

2. Que peut-on dire d'une matrice à diagonale dominante ?
3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Et $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 6 \\ -3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$?

   Donner une condition *suffisante* sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -3 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ soit inversible.

Des matrices blocs

120 Blocs diagonaux inversibles

Soit $M = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array}\right] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ et une matrice $N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $a_1 \neq 0$ et $N \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$.

121 Matrice triangulaire commutant avec sa transposée

On veut montrer qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) à coefficients réels commute avec sa transposée si et seulement si elle est diagonale.

Un sens est évident, lequel ?

Pour l'autre sens, on considère une matrice A triangulaire *supérieure* commutant avec sa transposée.

On écrit A par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & B & & C \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d \end{array}\right).$$

Montrer que v est la colonne nulle. On pourra noter $L = C^\top$.

Puis expliquer comment conclure.

Systèmes linéaires

122 Trois, Deux, Un, Zéro

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$. Résoudre le système d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 7y & + & 3z & + & 17t & = & a \\ x & + & & & 2z & + & 5t & = & b \\ -x & + & 5y & + & & & 7t & = & c \end{array}\right.$$

2. Pouvez-vous expliquer à l'oral à un camarade pourquoi les calculs précédents montrent que la matrice $Z = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible ?

123 Valeur propre de J

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.
Résoudre le système $\mathcal{S}_\lambda$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

124 de Tête ? !

L'un des deux systèmes suivants n'a pas de solution. De tête, déterminer lequel.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-z+t & = & 2 \\ 2x+3y+z & = & 4 \\ 2x+3y+2z & = & 3 \\ 2x+3y & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} 2x+3y-z+t & = & 2 \\ 2x+3y+z & = & 4 \\ 2x+3y+2z & = & 3 \\ 2x+3y & = & 4 \end{array}\right.$$

125 Système 2-2

Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ le système suivant admet-il : aucune solution ? une solution unique ? une infinité de solutions ?

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & 1 \\ bx+ay & = & 1 \end{array}\right.$$

126 Systèmes à paramètres

Soit $a, b, d, m, p, q, r, s \in \mathbb{R}$ des paramètres.
Résoudre les systèmes suivants, en discutant selon les valeurs des paramètres.

1. $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x+y-z=-1 \\ 5x+2y-2z=a \\ 4x+y-z=b \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+y=1 \\ ax+by=0 \\ a^2x+b^2y=1 \\ a^3x+b^3y=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=1 \\ x+y+z=m \end{cases}$

5. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ (2a+1)x+3y+(a+2)z=3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+2z=a \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y+4z+4t=a \\ 3x+y-4z+6t=0 \\ x-4z+t=b \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y+2z=p \\ -2x+z=q \\ -2x-y=r \\ x-2y+2z=s \end{cases}$

Autres exos

127 **Polynôme annulateur et valeur propre**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A lorsqu'il existe une colonne **non nulle** X telle que $AX = \lambda X$; dans ce cas, on dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ.
   Montrer que
   $$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k X = \lambda^k X$$
2. Soit P un polynôme annulateur de A et λ une valeur propre de A.
   Montrer que λ est racine de P.
3. Soit J la matrice pleine de 1. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 pour J.
   Quelles sont les valeurs propres de J ?

128 **Matrice symétrique de trace nulle**

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   On suppose que $M^\top = M + \operatorname{tr}(M) I_n$.
   Montrer que M est symétrique et de trace nulle.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Ici $n = 3$.
   Montrer que les matrices de l'ensemble
   $$\left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^\top = M + \operatorname{tr}(M) I_3 \right\}$$
   s'écrivent comme combinaison linéaire de 5 matrices à déterminer.

129 **Combinaison linéaire de I et J**

Soit $n \geqslant 2$. Soit I la matrice identité de taille n et J la matrice pleine de 1 de taille n.
On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & b & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{bmatrix}}_{=M(a,b)} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{K} \right\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Montrer que $E = \{\lambda I + \mu J \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$.
2. Montrer que E est stable par somme et produit.
3. Montrer que E est stable par puissance entière positive.

Soit $a, b \in \mathbb{K}$. On pose $M = M(a, b)$.

4. Déterminer un polynôme annulateur de degré 2 pour M.

   Exprimer M^2 comme combinaison linéaire de M et I

5. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff a \notin \{b,\ -(n-1)b\}$.
   Dans ce cas, montrer que $M^{-1} \in E$.

130 **Avec le noyau**

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $I + AB$ est inversible.
Montrer que $I + BA$ est inversible.

Matrices
Systèmes linéaires
corrigés

103

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$.
On montre ensuite que $\forall\, k \geqslant 3, A^k = 0$ (par récurrence, ou bien de manière directe en utilisant que $A^k = A^3 A^{k-3}$ avec $k-3 \in \mathbb{N}$).

Comme I_3 et A commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton, donc

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (I_3 + A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k$$

Quand $n \geqslant 2$, il y a au moins trois termes dans cette somme. Sommons par paquets :

$$\begin{aligned} (I_3 + A)^n &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} A^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{A^k}_{0} \quad \text{paquets} \\ &= \binom{n}{0} A^0 + \binom{n}{1} A^1 + \binom{n}{2} A^2 \\ &= I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2. \end{aligned}$$

On constate que cette formule est également valable pour $n = 0$ et $n = 1$.
Bilan :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (I_3 + A)^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2} A^2.$$

104

En effectuant le calcul de N^2, puis N^3 (éventuellement pour une taille raisonnable, disons $n = 4$), on conjecture que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la matrice N^k possède une $k^{\text{ème}}$ surdiagonale unité, autrement dit :

$$\forall\, i, j \in [\![1, n]\!], \quad \text{coeff}_{i,j}(N^k) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \;=\; \delta_{i+k,j}$$

Si l'on veut montrer cette formule formellement, on peut opter pour une récurrence finie sur $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Initialisation. On a $N^0 = I$. Et on z $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$, $\text{coeff}_{i,j}(I) = \delta_{i,j}$, d'où $\text{coeff}_{i,j}(N^0) = \delta_{i+0,j}$.

Hérédité. Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que la formule soit vraie.

On a

$$\begin{aligned} \forall\, i, j \in [\![0, n-1]\!], \quad \text{coeff}_{i,j}(N^{k+1}) &= \sum_{\ell=1}^{n} \text{coeff}_{i,\ell}(N^k)\text{coeff}_{\ell,j}(N) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{i+k,\ell}\, \delta_{\ell,j-1} \\ &= \delta_{i+k,j-1} \\ &= \delta_{i+(k+1),j} \end{aligned}$$

Expliquons le calcul de la somme.

Si $i + k = j - 1$, alors cet entier $(i + k = j - 1)$ est dans $[\![1, 2n-2]\!] \cap [\![0, n-1]\!] \subset 1, n]\!]$; par conséquent, ℓ qui parcourt $[\![1, n]\!]$ prend une et une seule fois la valeur de $i + k = j - 1$, donc la somme vaut 1.

Sinon, chaque terme de la somme est nul (si $i + k \neq j - 1$, il n'existe aucun ℓ tel que $i + k = \ell = j - 1$), donc la somme est nulle.

Bilan, la somme vaut bien $\delta_{i+k,j-1}$.

Après calculs, on finit par obtenir la relation $A^2 = -2A + 3I$.
En particulier, A^2 est combinaison linéaire de A et I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{H}_n$ la propriété « A^n est combinaison linéaire de A et I ».

Initialisation. La matrice A^0, qui vaut I, est combinaison linéaire de A et I, car $A^0 = 0A + 1I$.
D'où $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$.
Alors on peut trouver λ et $\mu \in \mathbb{K}$ tels que $A^n = \lambda A + \mu I$.
Ainsi, $A^{n+1} = AA^n$ vaut $\lambda A^2 + \mu A$.
Or $A^2 = -2A + 3I$, d'où

$$A^{n+1} \; = \; (-2\lambda + \mu)A \; + \; 3\lambda I$$

D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

Remarque. On peut en fait montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{K}^2$ tel que $A^n = \lambda_n A + \mu_n I$.

Pour la partie « Existence », on pose $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites imbriquées définies par

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \mu_0 = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \; \begin{cases} \lambda_{n+1} = -2\lambda_n + \mu_n \\ \mu_{n+1} = 3\lambda_n \end{cases}$$

et on montre par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N},\; A^n = \lambda_n A + \mu_n I$.

Pour la partie « Unicité », cela revient à montrer (WHY) qu'une égalité du type $\alpha A + \beta I = 0$ implique que $\alpha = 0$ et $\beta = 0$. Je vous laisse faire.

Autre remarque. On peut montrer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre 2.
En effet, en utilisant la ligne 2 avec l'indice $n+1$, puis la ligne 1, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mu_{n+2} \; = \; 3(-2\underbrace{\lambda_n}_{\mu_{n+1}} + \mu_n)$$

D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \mu_{n+2} \; = \; -6\mu_{n+1} + 3\mu_n$$

106

On a $A = CL$ où $C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ et $L = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$.

Calculons la puissance 2. On a $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$ par associativité du produit matriciel.
Or LC est une matrice carrée de taille 1 dont le coefficient vaut $t = a^2 + b^2 + c^2$.
On a donc $A^2 = tCL = tA$.

On a alors $A^3 = A^2A = (tA)A = tA^2 = t(tA) = t^2A$.
On prouve alors par récurrence $\forall\, k \geqslant 1,\ A^k = t^{k-1}A$.

Bilan :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{cases} I & \text{si } k = 0 \\ t^{k-1}A & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

— On prouve par récurrence que

$$\forall\, k \geqslant 1, \quad A^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & -2^{k-1} \\ -2^{k-1} & 2^{k-1} \end{pmatrix} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad B^k = \begin{pmatrix} 1 & 2^k - 1 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Un élève me fait remarquer que A est du type CL ! Donc on connaît facilement son carré, puis ses puissances successives !

— On écrit $C = I + 2M$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule les puissances de M. On a $M^k = \begin{cases} I & \text{si } k \text{ est pair} \\ M & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$

Ainsi, comme I et M commutent, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k M^k$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad C^n = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^k I + \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} 2^k M$$

— On écrit H comme combinaison linéaire de I et J via $H = (a-b)I + bJ$.
On connaît les puissances de J. En notant n la taille de la matrice, on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad J^k = \begin{cases} I & \text{si } k = 0 \\ n^{k-1} J & \text{si } k \geqslant 1 \end{cases}$$

Comme I et J commutent, la formule du binôme s'applique et on a :

$$\begin{aligned} H^p &= (a-b)^p I + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (a-b)^{p-k} b^k n^{k-1} J \\ &= (a-b)^p I + \frac{1}{n} \Big(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} (a-b)^{p-k} (bn)^k \Big) J \\ &= (a-b)^p I + \frac{1}{n} \Big(\big((a-b) + bn\big)^p - (a-b)^p \Big) J \\ &= (a-b)^p I + \frac{1}{n} \Big(\big(a + (n-1)b\big)^p - (a-b)^p \Big) J \end{aligned}$$

— Pour F, je trouve $F^3 = 3F$. D'où $F^5 = 3F^3 = 3^2 F$.
Ainsi, $F^{2k+1} = 3^k F$.

109

Raisonner par Analyse-synthèse.
On peut aussi dérouler des équivalences, mais c'est dangereux et ici, c'est *délicat*.

Comme A et B sont nilpotentes, on peut trouver $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $A^a = B^b = 0$.
Ainsi, pour tout $k \geqslant a$, on alors $A^k = A^{k-a}A^a = 0$, et, de même pour tout $k \geqslant b$, on a $B^k = 0$.

• Montrons que le produit est nilpotent.
En posant $p = \min(a, b)$, on a $A^p = 0$ **ou** $B^p = 0$.
On a alors

$$\begin{aligned} (AB)^p &= \underbrace{(AB)(AB)\cdots(AB)}_{p \text{ fois}} \\ &= A^p\, B^p && \text{(car } A \text{ et } B \text{ commutent)} \\ &= 0 && \text{car } A^p = 0 \textbf{ ou } B^p = 0 \end{aligned}$$

Bilan : en prenant $p = \min(a, b)$, on a $(AB)^p = 0$.
Donc AB est nilpotente.

• Concernant la somme.
Fixons $p \in \mathbb{N}$, pour l'instant quelconque.
Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$(A + B)^p \;=\; \sum_{i+j=p} \frac{p!}{i!\, j!} A^i B^j$$

Pour assurer $(A+B)^p = 0$, il *suffit* (attention, je n'ai pas dit « il faut ») de prendre p de sorte que l'implication suivante soit vraie :

$$i + j = p \implies \Big(i \geqslant a \textbf{ ou } j \geqslant b\Big)$$

Ceci est réalisé pour $p = a + b$. En effet, montrons cette implication en supposant la prémisse $i + j = a + b$, puis en raisonnant par l'absurde. Si on avait $i < a$ **et** $j < b$, alors on aurait $i + j < a + b$, ce qui contredit $i + j = a + b$.
Bilan : en prenant $p = a + b$, on a $(A + B)^p = 0$.
Donc $A + B$ est nilpotente.

• Si A et B ne commutent pas, le résultat ne tient plus.
On vérifie par exemple facilement que $A = E_{1,2}$ et $B \in E_{2,1}$ sont nilpotentes (d'après la règle de multiplication des matrices élémentaires, on a en fait $A^2 = B^2 = 0$).
Pourtant :

— La somme $S = A + B$ vérifie

$$\begin{aligned} S^2 &= \underbrace{E_{1,2}E_{1,2}}_{=0} + E_{1,2}E_{2,1} + E_{2,1}E_{1,2} + \underbrace{E_{2,1}E_{2,1}}_{=0} \\ &= E_{1,1} + E_{2,2}. \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ S^{2k} = E_{1,1} + E_{2,2} \neq 0$, donc S n'est pas nilpotente.

— Le produit $P = AB = E_{1,1}$ est une matrice diagonale très simple et on a $P^2 = E_{1,1}$, d'où l'on déduit que $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P^k = E_{1,1} \neq 0$, donc P n'est pas nilpotente.

1. On a
$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$
On a donc
$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{2}\left(A - I\right)\right) = I \\ \text{et} \\ \left(\frac{1}{2}(A - I)\right) A = I \end{cases}$$
Ainsi, A est inversible et :
$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.
Après calculs, on a $(A + I)^3 = 0$.
Donc $A^3 + 3A^2 + 3A + I = 0$, d'où
$$A \times \left(-A^2 - 3A - 3I\right) = I \qquad \text{et} \qquad \left(-A^2 - 3A - 3I\right) \times A = I$$
Donc A est inversible d'inverse $-A^2 - 3A - 3I$.

3. On peut démontrer le résultat suivant :

   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. S'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de A et ayant un coefficient constant non nul, alors A est inversible.

   Écrivons P sous la forme $P = X^p + c_{d-1}X^{p-1} + \cdots + c_1 X + c_0$, où les $c_i \in \mathbb{K}$.
On suppose que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ (cela se prononce « $P(A)$ est la matrice nulle » ou bien « P est un polynôme annulateur de A) et on suppose aussi que $c_0 \neq 0$ (cela se prononce « le coefficient constant de P est non nul »).
Montrons que A est inversible.
On a
$$A^p + c_{d-1}A^{p-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I \ = \ 0$$
d'où
$$\begin{cases} A\left(A^{p-1} + c_{d-1}A^{p-2} + \cdots + c_1 I\right) & = & -c_0 I \\ \left(A^{p-1} + c_{d-1}A^{p-2} + \cdots + c_1 I\right)A & = & -c_0 I \end{cases}$$
Posons $B = \dfrac{1}{-c_0}\left(A^{p-1} + c_{d-1}A^{p-2} + \cdots + c_1 I\right)$, licite, car $c_0 \neq 0$.
On obtient $\begin{cases} AB = I \\ BA = I \end{cases}$, donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

   Remarque. Au passage, on remarque que, dans ces conditions, l'inverse de A est une combinaison linéaire des puissances de A (en fait, c'est toujours vrai, mais c'est un gros théorème, merci Cayley & Hamilton !).

112

Il y a au moins deux solutions possibles : polynôme annulateur, échelonnement (pivot de Gauss).

Première solution : avec polynôme annulateur.
On note J la matrice pleine de 1.
La matrice A de l'énoncé est liée à J par la relation $A = J - I$.
Comme on connaît une relation entre les puissances de J (à savoir $J^2 = nJ$), on écrit J en fonction de A, puis on élève au carré.
On a $J = A + I$. En élevant au carré, on a donc $(A + I)^2 = n(A + I)$.
Comme A et I commutent, on obtient :

$$A^2 + 2A + I = nA + nI \quad \text{d'où} \quad A^2 + (2-n)A = (n-1)I$$

Comme $n - 1 \neq 0$, on a les égalités :

$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{n-1}\left(A-(2-n)I\right)\right) = I \\ \text{et} \\ \left(\frac{1}{n-1}(A-(2-n)I)\right) A = I \end{cases}$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{n-1}(A - (2-n)I)$.
Dessinons A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2-n \end{bmatrix}.$$

114

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de A, ce qui ne change par son caractère inversible.
En effectuant $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftrightarrow L_3$, puis $L_3 \leftrightarrow L_4$, on obtient la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

qui est inversible si et seulement si $x \neq 0$.
Ainsi, A est inversible si et seulement si $x \neq 0$.

115

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de $A_{x,y}$, ce qui ne change par son caractère inversible.
En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x-3 \\ 0 & 2 & y-3 \end{pmatrix}$$

Puis en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & x-3 \\ 0 & 0 & y-2x+3 \end{pmatrix}$$

qui est non inversible si et seulement si $y - 2x + 3 = 0$.
L'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A_{x,y}$ n'est pas inversible est la droite ayant pour équation $y = 2x - 3$.

116

Après avoir essayé pour de petites valeurs de n, on montrer que l'inverse de F est la matrice ayant une diagonale de 1, une première sur-diagonale de -2 et une deuxième sur-diagonale de 1 :

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul de FF' est très instructif. L'objectif étant de montrer que $FF' = I$ (le calcul de $F'F$ est similaire, mais en théorie, il faudrait le faire !).

119

1. Soit X une colonne telle que $AX = 0$.
   Montrons que $X = 0$.
   La partie $\Big\{|x_1|, \dots, |x_n|\Big\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, *finie* et *non vide*, donc elle admet un maximum.
   Ainsi, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\Big(\Big\{|x_1|, \dots, |x_n|\Big\}\Big)$.
   On va montrer que $x_k = 0$
   Raisonnons par l'absurde en supposant $x_k \neq 0$.
   Par hypothèse, on a l'égalité matricielle $AX = 0$ qui se réécrit :
   $$\forall\, i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$$
   En particulier, pour $i = k$, on obtient $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j = 0$.
   En isolant le terme d'indice k, on obtient
   $$a_{kk} x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j$$
   Puis, en appliquant le module :
   $$|a_{kk} x_k| = \Big|\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j\Big|$$
   Puis par inégalité triangulaire,
   $$|a_{kk}||x_k| \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_j|$$
   Comme $|x_k| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$, on a
   $$|a_{kk}||x_k| \leqslant \sum_{j \neq k} |a_{kj}||x_k|$$
   Comme $|x_k| \neq 0$ par hypothèse, on obtient $|a_{kk}| \leqslant \displaystyle\sum_{j \neq k} |a_{kj}|$.
   Cela contredit le fait que la matrice soit à diagonale dominante.
   D'où $x_k = 0$, d'où $|x_k| = 0$.
   Par définition de k, on a alors tous les $|x_i|$ sont nuls, donc tous les x_i sont nuls, donc X est nulle.
2. On vient de montrer que l'équation $AX = 0$ admet une unique solution, à savoir la colonne nulle.
   Par théorème, on en déduit que A est inversible.

   Dans cet exercice, on a montré un joli résultat de maths :

   Une matrice à diagonale dominante est inversible

Avec échelonnement.

Rappel. Toute matrice carrée peut être rendue triangulaire supérieure (inversible ou pas...) après opérations élémentaires sur ses lignes. Autrement dit, il existe une matrice $\Omega \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ produit de matrices d'opérations élémentaires et une matrice triangulaire T telle que $\Omega A = T$. Et le caractère inversible de A est le même que celui de T (qui lui est facile à voir, car il suffit d'examiner la diagonale).

Lemme. Soit Ω' de taille $n-1$ **inversible**.

Alors la matrice $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right]$ est inversible d'inverse $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega'^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

(Preuve : faire le produit matriciel par blocs).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons M inversible.

Utilisons le rappel à la matrice N : il existe une matrice $\Omega' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $\Omega' N = T'$ où T' est triangulaire supérieure de taille $n-1$.

L'idée est d'effectuer les opérations élémentaires correspondant à Ω' sur la matrice M qui est de taille un peu plus grande (donc les opérations élémentaires attaquent aussi la première colonne de M, mais pas la première ligne, donc tout va bien !), ce qui ne change pas son caractère inversible,

on arrive alors à $M^{\text{op.elem.}} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T' & \\ 0 & & & \end{array}\right]$

Cette matrice $M^{\text{op.elem.}}$ est triangulaire (WHY ?), et elle est inversible (car M l'est). Donc $M^{\text{op.elem.}}$ n'a pas de zéro sur sa diagonale ce qui implique que $a_1 \neq 0$ et que T' n'a pas de 0 sur sa diagonale, donc T' est inversible, donc N l'est !

Remarque. La matrice $M^{\text{op.elem.}}$ est en fait le produit $\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right] M$

Bilan : $a_1 \neq 0$ et N est inversible.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $a_1 \neq 0$ et N inversible.

Il existe une matrice Ω' inversible et une matrice triangulaire T' inversible, telles que $\Omega' N = T'$.

On a alors

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' N & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

ce qui s'écrit

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Omega' & \\ 0 & & & \end{array}\right] M = \left[\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T' & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

Comme la matrice à droite est inversible, car elle est triangulaire supérieure avec aucun 0 sur la diagonale ($a_1 \neq 0$ par hypothèse, et il n'y a pas de 0 sur la diagonale de T'), et la matrice à l'extrême gauche aussi (c'est le lemme initial), la matrice M est inversible (WHY ?).

121

On écrit la matrice par blocs

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & B & & C \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d \end{array}\right) \qquad \text{avec } B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}),\ C \in \mathcal{M}_{n-1,\,1}(\mathbb{R}) \text{ et } d \in \mathbb{R}$$

Comme A est triangulaire supérieure, la matrice B l'est également.
D'après l'hypothèse, A commute avec sa transposée, donc on obtient :

$$AA^\top = \left(\begin{array}{c|c} BB^\top + CL & d\,C \\ \hline dL & d^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B^\top B & B^\top C \\ \hline LB & LC + d^2 \end{array}\right) = A^\top A.$$

L'égalité des blocs en bas à droite fournit $d^2 = LC + d^2$, d'où $LC = 0$. Ce produit s'interprète comme (la matrice 1×1 dont l'unique coefficient vaut ...) le scalaire $c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_{n-1}^2$ où $C = (c_1, \dots, c_{n-1})$.
On obtient donc une somme de **réels** positifs de somme nulle, donc tous les réels sont nuls, donc tous les c_i sont nuls, donc $C = 0$.
L'égalité des blocs Nord-Ouest fournit $BB^\top + CL = B^\top B$, et comme $C = 0$, on obtient que B commute avec sa transposée.
Bilan :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & B & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d \end{array}\right) \qquad \text{avec } B \text{ triangulaire supérieure qui commute avec sa transposée}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que B est diagonale, ce que l'on peut obtenir par récurrence sur la taille de la matrice (ne pas oublier que B est elle-même triangulaire supérieure et commute avec sa transposée).

1. On échelonne la matrice à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, sans oublier d'effectuer les opérations élémentaires sur le second membre.

$$A = \begin{bmatrix} . & 7 & 3 & 17 \\ 1 & . & 2 & 5 \\ -1 & 5 & . & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 7 & 3 & 17 \\ -1 & 5 & . & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 7 & 3 & 17 \\ . & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ a \\ b+c \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{7}L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & 3/7 & 17/7 \\ . & 5 & 2 & 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ 1/7a \\ b+c \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & 3/7 & 17/7 \\ . & . & -1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ 1/7a \\ -5/7a+b+c \end{bmatrix}$$

$L_3 \leftarrow -7L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & 3/7 & 17/7 \\ . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ 1/7a \\ 5a-7b-7c \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{7}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & 2 & 5 \\ . & 1 & . & 2 \\ . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b \\ -2a+3b+3c \\ 5a-7b-7c \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & . & . & 3 \\ . & 1 & . & 2 \\ . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -10a+15b+14c \\ -2a+3b+3c \\ 5a-7b-7c \end{bmatrix}$$

Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes d'un système ne change pas son ensemble solution. On a donc l'équivalence

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 7y & + & 3z & + & 17t & = & a \\ x & + & & & 2z & + & 5t & = & b \\ -x & + & 5y & + & & & 7t & = & c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccrcr} x & & & + & 3t & = & -10a+15b+14c \\ & y & & + & 2t & = & -2a+3b+3c \\ & & z & + & t & = & 5a-7b-7c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\,\lambda \in \mathbb{R}, \quad \left[\begin{array}{ccrcr} x & = & -10a+15b+14c & + & -3\lambda \\ y & = & -2a+3b+3c & + & -2\lambda \\ z & = & 5a-7b-7c & + & -\lambda \\ t & = & 0 & + & \lambda \end{array}\right.$$

Bilan : l'ensemble des solutions du système initial est l'ensemble des quadruplets de la forme

$$(-10a+15b+14c, \quad -2a+3b+3c, \quad 5a-7b-7c, \quad 0) \quad + \quad \lambda(-3, \, -2, \, -1, \, 1)$$

où λ parcourt $\mathbb{K}$.

2. On remarque que la matrice $Z = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ est extraite de la matrice A initiale.

   Cette matrice Z se transforme en l'identité via les opérations élémentaires décrites ci-dessus.

   Ainsi (en louchant sur le second membre), on « voit que » (WHY ? !)

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} -10 & 15 & 14 \\ -2 & 3 & 3 \\ 5 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

123

Soit $A = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

Le système s'écrit $AX = 0$.

Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de A ce qui ne change pas l'ensemble des solutions du système.

On peut commencer par permuter L_1 et L_3, puis après des étapes que je vous laisse trouver, on tombe naturellement sur une des matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2+3\lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou sur} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2-3\lambda \end{bmatrix} \quad \text{ou sur} \ldots$$

En utilisant le critère des matrices triangulaires inversibles, on obtient

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\iff 1 \times (-\lambda) \times (-\lambda^2+3\lambda) \neq 0 \\ &\iff \lambda \neq 0 \text{ et } \lambda \neq 3 \end{aligned}$$

Traitons des cas en fonction de l'appartenance de λ à $\{0, 3\}$.

$\boxed{\lambda \notin \{0,3\}}$. Dans ce cas, la matrice du système est inversible, et la seule solution est $(0, 0, 0)$.

$\boxed{\lambda = 0}$. Le système a pour matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Le système se résume à la seule équation $x + y + z = 0$.

Les solutions sont les (x, y, z) qui sont du type $(-\lambda - \mu,\ \lambda,\ \mu)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, càd les triplets qui sont combinaison linéaire de $(-1, 1, 0)$ et $(-1, 0, 1)$.

$\boxed{\lambda = 3}$. Le système a pour matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, qui s'échelonne en $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Le système est équivalent à $\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right.$

Dans ce cas, les solutions sont les (x, y, z) qui sont du type $(\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$, càd les triplets qui sont combinaison linéaire de $(1, 1, 1)$.

125

On peut commencer par remarquer que le déterminant de la matrice du système $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ vaut $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

— Si $a \neq \pm b$, la matrice du système est inversible, donc il a une unique solution (qui est en fait $(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+b})$, mais l'énoncé ne le demande pas).

— Si $a = -b$, le système est

$$\begin{cases} ax \ \ - ay = 1 \\ -ax + ay = 1, \end{cases} \qquad \text{équivalent à} \qquad \begin{cases} ax - ay = \ \ 1 \\ ax - ay = -1, \end{cases}$$

évidemment incompatible, donc l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

— Si $a = b$, les deux équations du système sont $ax + ay = 1$.
Effectuons une nouvelle disjonction de cas en fonction de la nullité de a.

  — Si $a = 0$, il n'y a pas de solution.

  — Si $a \neq 0$, on obtient une infinité de solutions (à savoir l'ensemble $\left\{(\frac{1}{a} - \lambda,\ \lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$, même si ce n'est pas demandé).

126

Voici les ensembles de solutions.

1. $\left\{\left(\frac{s+d}{2},\ \frac{s-d}{2}\right)\right\}$.
2. On a l'équation de compatibilité $3+a+b=0$.
   Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{(-4-a,\ 5+3a+\lambda,\ \lambda),\ \lambda\in\mathbb{K}\right\}$.
3. Le système est compatible si et seulement si $(a,b)=(1,-1)$ ou $(a,b)=(-1,1)$.
   Dans ce cas, l'ensemble des solutions est $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$.
4. On a l'équation de compatibilité $-m^2-m+2=0$, dont les solutions sont $m=1$ et $m=-2$.
   Si $m=1$, l'ensemble des solutions est $\left\{(1-\mu-\lambda,\ \mu,\ \lambda),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2\right\}$.
   Si $m=-2$, l'ensemble des solutions est $\left\{(-1,0,-1)\right\}$.
5. Si $a=1$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{\begin{pmatrix}1-y-z\\ y\\ z\end{pmatrix},(y,z)\in\mathbb{K}^2\right\}$.
   Si $a=-2$, le système est incompatible.
   Dans tous les autres cas, le système a une unique solution : $\begin{pmatrix}\frac{1}{a+2}\\ \frac{1}{a+2}\\ \frac{1}{a+2}\end{pmatrix}$.
6. Si $a=-4$, le système est incompatible. Sinon, il admet une unique solution : $\begin{pmatrix}\frac{3a^2-2a-6}{a+4}\\ \frac{-2a^2+2a+5}{a+4}\\ \frac{a-1}{a+4}\end{pmatrix}$.
7. Si $a+2b=0$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{\begin{pmatrix}b+4z-t\\ -3b-8z-3t\\ z\\ t\end{pmatrix},(z,t)\in\mathbb{K}^2\right\}$.
   Si ce n'est pas le cas, il est incompatible.
8. Si $p=2q-2r$, le système a une unique solution, que l'on peut noter $\begin{pmatrix}\frac{s-2q-2r}{9}\\ \frac{4q-5r-2s}{9}\\ \frac{5q-4r+2s}{9}\end{pmatrix}$.
   Dans le cas contraire, le système est incompatible.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M^\top = M + \operatorname{tr}(M)I_n$.
   Appliquons la transposée à cette égalité. On obtient, par linéarité de la transposée :
   $$\left(M^\top\right)^\top = M^\top + \operatorname{tr}(M)I_n^\top$$
   d'où
   $$M = M^\top + \operatorname{tr}(M)I_n$$
   On obtient le petit système
   $$\begin{cases} M^\top &= M + \operatorname{tr}(M)I_n \\ M &= M^\top + \operatorname{tr}(M)I_n \end{cases}$$
   Effectuons $L_1 - L_2$. On obtient $M^\top - M = M - M^\top$, d'où $M^\top = M$. Ainsi M est symétrique. Et en reportant cette information dans l'égalité initiale, on trouve $\operatorname{tr}(M)I_n = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, donc $\operatorname{tr}(M) = 0$.
2. Oui !
   Si M est symétrique et de trace nulle, alors on a $M^\top = M$ et $\operatorname{tr}(M) = 0$, d'où l'égalité $M^\top = M + \operatorname{tr}(M)I_n$.
3. D'après les deux questions précédentes, l'ensemble $\left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^\top = M + \operatorname{tr}(M)I_3\right\}$ est exactement l'ensemble des matrices symétriques de trace nulle.
   Une matrice M carrée de taille 3 symétrique et de trace nulle est de la forme :
   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \qquad \text{avec } a + d + f = 0$$
   donc de la forme
   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-d \end{bmatrix}$$
   Ainsi M s'écrit
   $$a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   BILAN : Les matrices de l'ensemble $\left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mid M^\top = M + \operatorname{tr}(M)I_3\right\}$ s'écrivent comme combinaison linéaire des matrices
   $$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{11}-E_{33}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{12}+E_{21}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{13}+E_{31}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_{22}-E_{33}} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{23}+E_{32}}$$