Intégration

exercices

Généralités

101 La formule préférée de J. Nougayrède

Soit $a < b \in \mathbb{Z}$ deux entiers. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On suppose f croissante. Montrer que

$$f(a) \;+\; \int_a^b f \;\leqslant\; \sum_{k=a}^{b} f(k) \;\leqslant\; \int_a^b f \;+\; f(b)$$

Quelle formule obtient-on lorsque f est décroissante ?

102 Des variantes de la formule précédente

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.
On suppose f croissante. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} f(0) \;+\; \int_0^1 f \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \;\leqslant\; \int_0^1 f \;+\; \frac{1}{n} f(1)$$

Puis, expliquez à l'oral comment obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n} f(0) \;+\; \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \;\leqslant\; \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \;+\; \frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

103 Facile !

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

On suppose qu'il existe $x_1 \in [a, b]$ tel que $f(x_1) > 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Montrer qu'il existe $x_2 \in [a, b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

104 Une fonction constante

Considérons $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue, non nulle et telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.
Montrer que f est constante égale à 1.

105 Une fonction non continue qui admet une primitive

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. Malgré le fait que f n'est pas continue, on souhaite montrer que f admet des primitives.
   On pose $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \displaystyle\int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

   — Montrer que F est bien définie (et expliquer l'abus de langage/notation dans l'intégrale).
   — Montrer que F est une primitive de f.

106 La norme infinie pour une fonction continue par morceaux

Considérons $E = \mathcal{CM}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$.
Montrer que l'application $N : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longrightarrow & \sup\limits_{[a,b]} |f| \end{array}$ (qui est bien définie) vérifie les trois propriétés suivantes

— $\forall\, f \in E,\ N(f) = 0 \implies f = 0$ (séparation)

— $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, f \in E,\ N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ (homogénéité)

— $\forall\, f, g \in E,\ N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$ (inégalité triangulaire)

On dit que N est une norme sur E. C'est la *norme infinie* sur E, souvent notée $\|\cdot\|_\infty$.

107 La norme 1 pour une fonction continue

Considérons $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[a,b]$.
Montrer que l'application $N : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ f & \longrightarrow & \displaystyle\int_{[a,b]} |f| \end{array}$ (qui est bien définie) est une norme sur E.
C'est la *norme 1* sur E, souvent notée $\|\cdot\|_1$.

Trouver (faire un dessin) une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $[0,1]$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty = n \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = 1.$$

108 Un calcul technique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\lfloor x \rfloor}{x+1} \end{array}$

1. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ sur $[0,n]$, puis montrer que f est continue par morceaux sur $[0,n]$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{[0,n]} f \;=\; \ln\left(\frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\right)$.

109 Théorème de la moyenne

1. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que g est positive.
   Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que
   $$\int_{[a,b]} fg \;=\; f(c) \int_{[a,b]} g$$
2. Soit $\Theta : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$.
   Déterminer l'ensemble de définition de Θ.
   En utilisant le théorème de la moyenne (question précédente) avec la fonction $f : t \mapsto t$, déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} \Theta(x)$.
   Que dire de $\lim\limits_{x\to 1} \Theta(x)$?

Utiliser la question précédente avec $f(t) = t$ et $g(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$

Dérivation/Intégration

110 Régularité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux (c'est-à-dire continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$).
On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$

1. Justifier que φ est bien définie.
2. On suppose f continue. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose f dérivable. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer φ'.

111 La fonction nulle

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a \in [0,1]$.
On suppose que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^{ax} f$$

1. Dans cette question, on suppose que $a = 1$. Montrer que f est nulle.
2. On revient au cas général $a \in [0,1]$.
   (a) Montrer que f est dérivable et déterminer f'.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$, ainsi que $f^{(n)}(0)$.
   (c) En appliquant une formule de Taylor bien choisie, montrer que f est nulle.

112 Fonction définie par une intégrale (1)

Soit $\Psi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\mathrm{d}t$ définie sur $\mathbb{R}^*$ (Ψ se prononce Psi majuscule).

1. Dire rapidement pourquoi Ψ est bien définie.
2. Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer Ψ'.
3. À l'aide d'un encadrement de la fonction intégrée, déterminer la limite de Ψ en 0.

113 Fonction définie par une intégrale (2)

Soit $\Theta : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$ (Θ se prononce Theta majuscule).

1. Déterminer l'ensemble de définition D de Θ.
2. Montrer que Θ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer Θ'.
   Dresser le tableau de variations de Θ.
3. Montrer que on distinguera $x < 1$ et $x > 1$

$$\forall x \in D, \quad \frac{x^2 - x}{2\ln x} \leqslant \Theta(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

4. En déduire $\lim\limits_0 \Theta$ et $\lim\limits_{+\infty} \Theta$.
5. Pour $x \in D$, on pose $I(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t$. Calculer $I(x)$.
6. Montrer que $\forall x > 1, \ xI(x) \leqslant \Theta(x) \leqslant x^2 I(x)$.
   Donner une inégalité analogue pour $x < 1$.
7. Déterminer $\lim\limits_1 \Theta$, puis retrouver $\lim\limits_0 \Theta$ et $\lim\limits_{+\infty} \Theta$.

Des limites

114 Attention !

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 2nt\,\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} 2nt\,\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t$$

Qu'en conclure ?

115 Intuition, puis preuve rigoureuse

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin t}\mathrm{d}t$. Montrer que la suite (I_n) admet une limite.

Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\sin t}\mathrm{d}t$. Montrer que la fonction φ admet une limite en 0.

Question : quelle réponse implique l'autre ?

116 Passage à la limite dans les bornes : très important !

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Dire si les limites suivantes existent et les déterminer le cas échéant.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_3^x f(t)\mathrm{d}t$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_3^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to7}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to7}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$

117 Lemme de Lebesgue

Soit $f \in \mathcal{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \;=\; 0$$

118 Des limites avec des intégrales

Justifier les affirmations suivantes (il y en a qui sont très difficiles et relèvent d'exercices spécifiques).

(i) Pour tout $x \neq 0$, on a $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln 2$.

(ii) Pour tout $x \in \,]0,1[\,\cup\,]1,+\infty[$, on a $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln t}\mathrm{d}t = \ln 2$.

(iii) On a $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to0]{} \ln 2$.

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$.

(v) On a $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(vi) On a $\displaystyle\int_0^1 t^n\sin t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(vii) Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(viii) On a $\displaystyle\int_0^1 nt^n\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par ailleurs, pour $x \in [0,1]$, on a $nx^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ +\infty & \text{si } x = 1 \end{cases}$

(ix) On a $\displaystyle\int_0^1 n\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Par ailleurs, pour $x \in [0,1]$, on a $n\mathrm{e}^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \in \,]0,1] \end{cases}$

(x) Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a $\displaystyle\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.

(xi) Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a $\displaystyle\int_0^1 n\mathrm{e}^{-nt} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$.

Formules de Taylor

119 Deux restes visuellement différents

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Rappeler pourquoi
$$\forall\, x \neq 1, \quad \frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{k=0}^{n} x^k \;+\; \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

2. Soit $x \in \,]-\infty, 1[$. Donner la formule de Taylor avec reste intégral de f à l'ordre n en 0 et montrer que le reste intégral vaut
$$(n+1)\int_0^x \frac{1}{(1-t)^2}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

3. L'égalité de la question 1 et la formule de la question 2 se ressemblent !
En faisant le changement de variable $y = \dfrac{x-t}{1-t}$ dans le reste intégral, montrer que les deux formules sont identiques.

120 Un grand classique

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$.
En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{f'(0)}{2}$$

En déduire
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

121 Dans l'esprit de Kolmogorov, exercice astucieux

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
On suppose que f est positive et que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$. On pose $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$, càd $\|f''\|_\infty$.
Montrer que
$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \quad |f'(a)| \leqslant \sqrt{2Mf(a)}$$

122 Inégalités de Kolmogorov

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
On pose
$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \qquad\qquad M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{M_2\,h^2}{2} \qquad \text{et} \qquad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{M_2\,h^2}{2}$$

2. À l'aide de l'inégalité triangulaire, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, on a
$$|f'(x)| \;\leqslant\; \frac{M_0}{h} + \frac{M_2\,h}{2}$$

3. En déduire que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \;\leqslant\; \sqrt{2M_0M_2}$$

123 Dérivées dominées par un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)|$.
Que dire de f ?

124 Théorème de division (prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.
On définit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array}$

On fixe $n \in \mathbb{N}$ une fois pour toutes.

1. Montrer que φ peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et avec la formule de Leibniz, donner une expression de $\varphi^{(n)}$ où $n \in \mathbb{N}$ en fonction des $f^{(k)}$.
3. En déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x^{n+1}\varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$
Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour f en 0.
4. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire une autre expression de $\varphi^{(n)}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
5. Montrer que
$$\varphi^{(n)}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$$
6. Avec le théorème de limite de la dérivée, et une récurrence sur n, on peut montrer que φ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.
Ainsi φ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
En admettant cela, constater que $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
C'est dingue, non ?
Que dire de la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$?

Des développements en série entière

125 Hélène de Deux

Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite vaut $\ln 2$.

126 La fonction logarithme-translatée est développable en série entière sur $]-1,1[$

1. Soit $x \in [0,+\infty[$. Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Pour alléger les notations, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

3. Question pour l'an prochain : montrer que l'on ne peut pas généraliser cela à $x \in]1,+\infty[$? On pourra étudier $S_{n+1}(x) - S_n(x)$.
4. (a) Montrer que

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, x \in]-1,+\infty[, \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \int_0^x (-1)^m \frac{t^m}{1+t} \mathrm{d}t \qquad (\bigstar)$$

   (b) Soit $x \in]-1,1]$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

127 La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite vaut $\cos x$.

Pour alléger les notations, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$.

128 Puissance moins $\frac{1}{2}$

On considère la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ définie sur $[0,1[$.

1. Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ et calculer ses dérivées successives.
2. (2a) Montrer que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \binom{2n+2}{n+1} \leqslant 4^{n+1}$.

   (2b) Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{x-t}{1-t} \leqslant x$.
3. Soit $x \in [0,1[$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Utiliser une des formules de Taylor.

Analyse asymptotique et intégrale

129 Une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que

$$I_n \;=\; 1 - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

130 Intégrale de $t^n f(t)$: limite

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ou encore $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$.
2. En fait, montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Expliquer le « en fait ».
3. Soit $\delta > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. Bien sûr, il faut comprendre $\delta \in]0,1]$.

131 Intégrale de $t^n f(t)$: DA à 1 terme

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On veut montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n} \;+\; \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left(\text{ou encore que} \quad \int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)\right)$$

1. Prouver le résultat dans le cas où f est supposée de classe $\mathcal{C}^1$.
2. On suppose ici seulement f continue et on suppose que $f(1) = 0$.
   (a) On fixe $\varepsilon > 0$.
   Montrer qu'il existe $\delta \in]0,1]$ tel que
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_{1-\delta}^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2}$$
   Pour ce δ, montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall\, n \geqslant n_0, \quad \left|\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \;\leqslant\; \varepsilon$$
   (b) Conclure.
3. Prouver le résultat annoncé.

132 Difficile

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left(\int_a^b |f(t)|^n\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max_{[a,b]} |f|$$

Revenir à la définition epsilonesque.

Sommes de Riemann

133 Faire ses gammes

Pour chaque suite, montrer que la limite existe et la déterminer.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} \qquad d_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{n^3+(2k)^3} \qquad g_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad e_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad h_n = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^3}}$$

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2} \qquad f_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \qquad i_n = \left(\frac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

134 Un faux ami

Déterminer la limite de

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$$

135 Une somme, presque de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

Montrer que $S_n \to 0$, puis déterminer un équivalent de S_n.

136 Somme de puissances

Soit $\alpha \in [0, +\infty[$ un réel positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

Déterminer un équivalent de $S_n(\alpha)$ quand $n \to +\infty$.

Examiner d'abord les cas particuliers $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Dans quel paragraphe du cours sommes-nous ?...

137 Une fausse somme de Riemann

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

Il s'agit de montrer que (S_n) admet une limite et la déterminer.

Un élève remarque que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Malheureusement, cette fonction est seulement définie sur l'ouvert $[0, 1[$ (qui n'est donc pas un segment), et on ne peut donc pas appliquer le théorème des sommes de Riemann. Comment s'en sortir ? Quelle qualité (certe, moins remarquable que la continuité) f possède-t-elle ?

On pourra s'inspirer de l'exercice 102.

138 Autour de la preuve du théorème des sommes de Riemann

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. On suppose que f est M-lipschitzienne.
   (Re)-montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\int_0^1 f - S_n\right| \leqslant \frac{M}{2n}$$
   En particulier,
   $$S_n - \int_0^1 f = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$
2. On suppose f continue, dérivable sur $]0,1[$ et dont le module de la dérivée est borné, disons $|f'| \leqslant M$.
   Les hypothèses de la question précédente sont-elles vérifiées ?
3. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$.
   Les hypothèses de la question précédente sont-elles vérifiées ?
4. ** On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$.
   Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que
   $$S_n - \int_0^1 f = \frac{a}{n} + \underset{+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

139 Une intégrale à paramètre.

À l'aide d'une intégration par partie, montrer que

$$\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

333 Une intégrale, deux suites — DM

Pour tout $a, b > 0$, on pose

$$I(a,b) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$$

On fixe deux réels $a, b > 0$ strictement positifs.

Propriétés de $I(a,b)$

1. Montrer que
$$\forall\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a\cos^2 t + b\sin^2 t > 0$$
En déduire que l'intégrale $I(a,b)$ est bien définie.
2. Montrer que $I(a,b) = I(b,a)$.

On déduit de cette question que

$$\forall\, \alpha, \beta > 0, \quad I(\alpha,\beta) = I(\beta,\alpha)$$

3. Montrer que
$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(a,b)\big) \;\leqslant\; I(a,b) \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(a,b)\big)$$
4. Montrer que
$$2I(a,b) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left[ab\cos^2(2t) + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \sin^2(2t)\right]\mathrm{d}t$$
5. Déduire des questions précédentes que
$$\forall\, \alpha, \beta > 0, \quad 2I(\alpha,\beta) \;=\; I\Big(\alpha\beta, \Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2\Big)$$

Deux suites imbriquées

On définit deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = u_n v_n \\ v_{n+1} = \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Une récurrence immédiate montre que ces suites sont à termes strictement positifs.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer une relation entre $I(a,b)$ et $I(u_n, v_n)$.
7. En considérant $w_n = \dfrac{\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}}{2}$ et $w'_n = \dfrac{\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}}{2}$, déterminer $\sqrt{u_n}$ et $\sqrt{v_n}$ en fonction de a, b et n.
Pour plus de lisibilité, on pourra poser $\sigma = \dfrac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{2}$ et $\delta = \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{2}$.
8. Déterminer la limite des suites $\dfrac{\ln u_n}{2^n}$ et $\dfrac{\ln v_n}{2^n}$.

La chute !

9. Déterminer la valeur de $I(a,b)$.

On pourra notamment s'aider de 3 et 8.

334 La formule de Plouffe — DM

Le but de cet exercice est de démontrer cette formule :

$$\text{(BBP)} \qquad \pi \;=\; \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right)$$

Elle a été obtenue le 19 septembre 1995 par Simon Plouffe en collaboration avec David H. Bailey et Peter Borwein. Elle permet le calcul isolé des chiffres binaires du nombre π.
On considère l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que l'intégrale I est bien définie.
2. (a) Factoriser X^8-16 dans $\mathbb{C}[X]$, puis en déduire une factorisation comme un produit de quatre polynômes de degré 2 à coefficients réels.
   Est-ce la factorisation en irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$?
   (b) Effectuer la division euclidienne de $X^5+X^4+2X^3-4$ par X^2+2.
   Factoriser le polynôme $X^5+X^4+2X^3-4$ en un produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
3. Avec le minimum de calculs, justifier que
$$\forall\, t\in[0,1], \qquad \frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16} \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\right).$$
4. Déterminer les valeurs des intégrales
$$I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2-2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x.$$
5. Montrer $I = \dfrac{\pi}{16}$.

Pour la fin de l'exercice, on fixe $p\in\mathbb{N}$.

6. Soit $a\in\,]0,1[$.
   (a) Montrer que pour tout $t\in[0,a[$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\left|\frac{t^p}{1-t^8} - \sum_{k=0}^{n} t^{8k+p}\right| \;\leqslant\; \frac{a^{8(n+1)+p}}{1-a^8}$$
   (b) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{8k+p+1}}{8k+p+1} \;=\; \int_0^a \frac{t^p}{1-t^8}\mathrm{d}t$$
   On rappelle que la notation $\lim\limits_{n\to+\infty}$ signifie que la limite existe et vaut…
7. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{16^k(8k+p+1)} \;=\; \int_0^1 \frac{16\,x^p}{16-x^8}\mathrm{d}x$$
8. Démontrer la formule BBP.

Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et positive.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une relation entre W_{n+1} et W_{n-1}.
   En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
4. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{2} \leqslant nW_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2}$.
5. Donner un équivalent simple de W_n.

Formule de Stirling

On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6. (a) Déterminer un équivalent de la suite $\left(\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right)_{n\geqslant 2}$.

   (b) En admettant que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell > 0$.

   On pourra par exemple minorer la suite $(\ln u_n)_{n\geqslant 2}$ par une suite convergente.

   (c) Donner un équivalent de $n!$ en fonction de ℓ.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer W_{2n} en fonction de $\binom{2n}{n}$ et donner un équivalent simple de W_{2n} en fonction de ℓ.
8. Montrer la formule de Stirling
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Intégrale de Gauss

On pose $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \end{array}$

9. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$
10. Montrer $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\,W_{2n+1} \leqslant \Phi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\,W_{2n-2}$.

    On pourra faire deux changements de variables successifs : d'abord $t = \sqrt{n}u$, puis un second (qui ne sera pas le même dans les deux intégrales) introduisant des fonctions trigonométriques...
11. Montrer $\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ce que vous noterez en Spé, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

104

Posons $g = f - f^2$. Autrement dit, $g : t \mapsto f(t) - f(t)^2$.
On a

- $\star$ g est continue par opérations (car f est continue)
- $\star$ g est positive, car f est à valeurs dans $[0, 1]$
- $\star$ $\displaystyle\int_0^1 g = 0$ par hypothèse

D'après le théorème aux trois hypothèses, on en déduit que g est la fonction nulle.
Donc $f = f^2$.

Attention ici, à ne pas dire ou bien $f = 0$, ou bien $f = 1$! ! ! !

D'où $\forall\, t \in [0, 1],\ \Big(f(t) = 0 \text{ ou } f(t) = 1\Big)$
Ainsi l'image de f est incluse dans $\{0, 1\}$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par la fonction continue f est un intervalle, qui est donc soit le singleton $\{0\}$, soit le singleton $\{1\}$.
Autrement dit, on a

$$\Big(\forall\, t \in [0, 1],\ f(t) = 0\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\forall\, t \in [0, 1],\ f(t) = 1\Big)$$

Comme f n'est pas nulle dans l'énoncé, on en déduit que f est constante égale à 1.

— Montrons que F est bien définie.

L'intégrale a bien un sens car la fonction intégrée $t \mapsto t\cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est prolongeable par continuité en 0.

En toute rigueur, à la place de $\displaystyle\int_0^x t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$, il faudrait écrire

$$\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t \qquad \text{où } \varphi : t \mapsto \begin{cases} t\cos\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

— Montrons que F est dérivable et $F' = f$.

★ Par opérations, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad F'(x) &= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

★ Montrons à présent que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = f(0)$ (en revenant à la définition, car ici, le théorème de la limite de la dérivée ne permettra pas de conclure (WHY d'ailleurs ?!)).

Examinons le taux d'accroissement de F en 0.

On a

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

- On a $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et la quantité $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée d'où

$$x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

- Pour le deuxième terme, on va utiliser l'inégalité triangulaire.
  Pour cela, on va d'abord calculer la limite en 0^+.
  On a

$$\begin{aligned} \forall\, x > 0, \qquad \left|\frac{1}{x}\int_0^x 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \left|\frac{1}{x}\right|\int_0^x \left|2t\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right|\mathrm{d}t && \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x 2t\,\mathrm{d}t}_{=x} && \text{car } |\cos| \text{ est majorée par } 1 \end{aligned}$$

  Comme $x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$, le membre gauche tend vers 0.
  On montre de même que le membre gauche tend vers 0 quand $x \to 0^-$.

Par somme de limites, on en déduit

$$\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Ainsi, F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$, qui vaut $f(0)$.

★ BILAN. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$.

109

1. Posons
$$\varphi : x \longmapsto \int_a^b fg \;-\; f(x)\int_a^b g \quad = \quad \int_a^b \big(f(t)-f(x)\big)\,g(t)\mathrm{d}t$$
On veut montrer qu'il existe c tel que $\varphi(c)=0$.

Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe x_m et x_M tels que
$$f(x_m)=\min_{[a,b]} f \qquad \text{et} \qquad f(x_M)=\max_{[a,b]} f$$
D'où
$$\forall\, t\in[a,b], \qquad f(t)-f(x_m)\geqslant 0$$
D'où, en multipliant par $g(t)\geqslant 0$,
$$\forall\, t\in[a,b], \qquad \big(f(t)-f(x_m)\big)g(t)\geqslant 0$$
Par positivité de l'intégrale,
$$\int_a^b \big(f(t)-f(x_m)\big)\,g(t)\mathrm{d}t \;\geqslant\; 0$$
c'est-à-dire $\varphi(x_m)\geqslant 0$.
On montre de même que $\varphi(x_M)\leqslant 0$.
Ainsi, 0 est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par φ.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, 0 est atteint par φ.
Autrement dit, il existe $c\in[x_m, x_M]$ tel que $\varphi(c)=0$.

Autre solution, mais moins élégante.
On distingue deux cas.
• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=0$. Alors d'après le « critère de nullité », g est la fonction nulle.
Donc tout c convient.

• Cas $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\neq 0$. Par stricte positivité de l'intégrale (savoir d'où cela sort), on a $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t>0$.
Montrons que
$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \quad \text{est une valeur intermédiaire pour } f.$$
Sur le segment $[a,b]$, la fonction continue f est bornée et atteint ses bornes, disons $m=f(x_m)$ et $M=f(x_M)$.
On a
$$\forall\, t\in[a,b], \quad m\leqslant f(t)\leqslant M$$
puis, en multipliant par $g(t)\geqslant 0$,
$$\forall\, t\in[a,b], \quad mg(t)\leqslant f(t)g(t)\leqslant Mg(t)$$
Par croissance de l'intégrale,
$$m\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; M\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
D'où en divisant par $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ qui est >0
$$f(x_m)=m \;\leqslant\; \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \;\leqslant\; M=f(x_M)$$

Ainsi $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}$ est une valeur intermédiaire entre deux valeurs atteintes par f, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, c'est une valeur atteinte par f. Autrement dit, il existe $c \in [\overset{\curvearrowright}{x_m, x_M}] \subset [a, b]$ tel que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} = f(c)$$

2. • Déterminons l'ensemble de définition de $\Theta : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\mathrm{d}t$.

   La fonction intégrée est continue sur $]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[$.

   On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tel que $[\overset{\curvearrowright}{x, x^2}] \;\subset\;]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[$.
   Il n'est pas difficile de constater que ce sont les $x \in \,]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[$.
   Ainsi, $\mathcal{D}_\Theta = \,]0, 1[\, \cup \,]1, +\infty[$.

   • Déterminons $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \Theta(x)$.
   Fixons $x \in \,]1, +\infty[$.
   Posons $f : t \mapsto t$ et $g : t \mapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ qui sont continues sur $]1, +\infty[$ donc sur $[x, x^2]$.
   De plus, g est positive sur $]1, +\infty[$ donc sur $[x, x^2]$.
   La question précédente s'applique et fournit l'existence de $c_x \in [x, x^2]$ tel que

   $$(\diamondsuit) \qquad \int_x^{x^2} t \times \frac{1}{t \ln t}\mathrm{d}t \;=\; f(c_x) \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\mathrm{d}t$$

   Ce qui se réécrit avec les définitions

   $$(\heartsuit) \qquad \Theta(x) \;=\; c_x \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\mathrm{d}t$$

   Or
   $$\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t}\mathrm{d}t \;=\; \int_x^{x^2} \frac{1/t}{\ln t}\mathrm{d}t \;=\; \Big[\ln |\ln t|\Big]_x^{x^2} \;=\; \ln 2$$
   Bilan :
   $$\forall\, x \in \,]1, +\infty[, \quad \Theta(x) \;=\; c_x \ln 2$$
   Comme $c_x \in [x, x^2]$, le théorème des Gendarmes fournit $c_x \xrightarrow[x \to 1^+]{} 1$, d'où

   $$\Theta(x) \;\xrightarrow[x \to 1^+]{}\; \ln 2$$

   • Soit $x \in \,]0, 1[$. On montre de la même manière que

   $$\Theta(x) \;\xrightarrow[x \to 1^-]{}\; \ln 2$$

   Il faut juste intervertir x et x^2 au début de la preuve dans l'égalité $(\diamondsuit)$; puis on récupère l'égalité $(\heartsuit)$ en multipliant par -1 de chaque côté.
   • Bilan. On a
   $$\Theta(x) \;\xrightarrow[x \to 1]{}\; \ln 2$$

1. On considère l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, donc c'est licite.
2. Comme f continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'analyse affirme que $F : x \mapsto \int_0^x f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. En particulier, $F'(0) = f(0)$ et la fonction φ a donc le visage suivant :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{F(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ F'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

   — Par opération, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad \varphi'(x) = \frac{F'(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{f(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}F(x) + \frac{1}{x}\, f(x) = \frac{-1}{x^2}\int_0^x f + \frac{1}{x}\, f(x)$$

   — **Continuité en** 0**.**
   La fonction F étant dérivable en 0, on a

$$\frac{F(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} F'(0)$$

   ce qui se traduit pour φ par $\varphi(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \varphi(0)$.
   Ainsi, φ est continue en 0.

   Ainsi, φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$.
3. **Étude en** 0**.** Reprenons les notations précédentes. On a

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \frac{\dfrac{F(x)}{x} - F'(0)}{x} = \frac{F(x) - F'(0)x}{x^2}$$

   Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et la formule de Taylor-Young peut s'appliquer :

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

   Comme $F(0) = 0$, on en déduit :

$$\frac{F(x) - F'(0)x}{x^2} = \frac{1}{2!}F''(0) + \underset{x \to 0}{\mathrm{o}}(1)$$

   Donc

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2!}F''(0)$$

   Ainsi, φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = \dfrac{1}{2}f'(0)$.
   Résumons. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f + \dfrac{1}{x}\, f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. On a

$$(\bigstar) \qquad \forall\, x \in [0,1], \quad f(x) = \int_0^x f$$

Comme f est continue, le théorème fondamental de l'Analyse dit que $x \mapsto \int_0^x f$ est dérivable de dérivée f.
La relation ($\bigstar$) montre donc que f est dérivable et que $f' = f$.
Par ailleurs, la relation ($\bigstar$) fournit $f(0) = 0$.
Résumons. La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' - y = 0$ et s'annule, donc le cours dit que c'est la fonction nulle.

On peut évidemment retrouver très facilement ici que f est nulle. En effet, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto \lambda e^x$. Et l'égalité $f(0) = 0$ fournit $\lambda = 0$, donc f est nulle.

2. (a) Au brouillon, on conjecture une formule pour la dérivée $n^{\text{ème}}$.
Puis, on montre par récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{« } f \text{ est } n\text{-fois dérivable et } f^{(n)} : x \mapsto a^{\sum\limits_{k=1}^{n} k} f(a^n x) \text{ »}$$

ou bien

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{« } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ et } f^{(n)} : x \mapsto a^{\sum\limits_{k=1}^{n} k} f(a^n x) \text{ »}$$

J'opte pour la première version et je note $\mathcal{H}_n$ l'assertion.
On pose $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k$ de sorte que $\sigma_{n+1} = \sigma_n + (n+1)$.
Il est plus pratique ici d'initialiser à $n = 1$ (car on aura besoin d'utiliser $\mathcal{H}_1$ ensuite). Ce n'est pas un problème car $\mathcal{H}_0$ est trivialement vraie.

Initialisation. La fonction f est bien entendu 0-fois dérivable, et comme $f^{(0)} = f$, la formule est valable.
D'où $\mathcal{H}_0$.

Initialisation (bis). La fonction f est dérivable en vertu du théorème fondamental de l'analyse (car f est continue).
Plus précisément,

$$\begin{cases} x \mapsto ax \text{ est dérivable sur } [0,1] \text{ à valeurs dans } [0,1] \\ y \mapsto \displaystyle\int_0^y f \text{ est dérivable sur } [0,1] \text{ (on utilise le fait que } f \text{ est continue) de dérivée } f \end{cases}$$

Par composition, f est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$f' : x \mapsto a f(ax)$$

D'où $\mathcal{H}_1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$. Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$.
D'après $\mathcal{H}_n$, la fonction f est n-fois dérivable et $f^{(n)} : x \mapsto a^{\sigma_n} f(a^n x)$.
On a

$$\begin{cases} x \mapsto a^n x \text{ est dérivable sur } [0,1] \text{ et à valeurs dans } [0,1] \\ t \mapsto f(t) \text{ est dérivable sur } [0,1] \text{ et } f' : t \mapsto a f(at) \text{ (même justification que pour } \mathcal{H}_1\text{).} \end{cases}$$

Par composition, la fonction $x \mapsto f(a^n x)$ est dérivable sur $[0,1]$.
Ainsi, la fonction $f^{(n)}$ est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$(f^n)' : x \mapsto a^{\sigma_n} a^n f'(a^n x)$$

Comme $f' : t \mapsto a f(at)$, on a

$$f^{(n+1)} = (f^n)' : x \mapsto a^{\sigma_n} a^n a f\big(a(a^n x)\big) = a^{\sigma_n + (n+1)} f(a^{n+1} x)$$

On vient de montrer que f est $(n+1)$-fois dérivable et $f^{(n+1)} : x \mapsto a^{\sigma_n + (n+1)} f(a^{n+1} x)$, d'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

(b) Fixons $x \in [0,1]$ et montrons que $f(x) = 0$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et x fournit

$$(\clubsuit) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leqslant K_{n,x} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{où } K_{n,x} = \sup_{[0,x]} |f^{(n+1)}|$$

— Comme $f(0) = 0$, la formule de la dérivée $k^{\text{ème}}$ obtenue à la question précédente fournit :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = 0$$

— Comme $f^{(n+1)} : x \mapsto a^{\sigma_{n+1}} f(a^{n+1}x)$ et que $a \in [0,1]$, on en déduit que

$$\forall\, t \in [0,x], \quad |f^{(n+1)}(t)| \leqslant |f(a^{n+1}x)| \leqslant \sup_{[0,1]} |f|$$

ce maximum ayant du sens car f est continue sur le segment $[0,1]$, donc $|f|$ aussi, et admet donc un maximum en vertu du théorème des bornes atteintes.

La relation $(\clubsuit)$ fournit :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \left| f(x) \right| \leqslant M \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M \frac{1}{(n+1)!} \quad \text{où } M = \sup_{[0,1]} |f|$$

Comme le membre droit tend vers 0 quand $n \to +\infty$, le théorème des Gendarmes implique que la suite constante égale à $f(x)$ tend vers 0, donc $f(x) = 0$.

1. **Solution.** Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   La fonction intégrée est continue (par morceaux) sur $[\overset{\curvearrowleftright}{x, 2x}]$, donc $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t} \mathrm{d}t$ est bien définie.
   Ainsi, $\Psi(x)$ existe.

   Pour le fun. Faisons comme si l'ensemble de définition de Ψ n'était pas donné.
   La fonction intégrée $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.
   On cherche les $x \in \mathbb{R}$ tels que
   $$\begin{cases} [\overset{\curvearrowleftright}{x, 2x}] \subset \left]-\infty, 0\right[\\ \text{ou} \\ [\overset{\curvearrowleftright}{x, 2x}] \subset \left]0, +\infty\right[\end{cases}$$
   Ce qui équivaut à $x < 0$ ou $x > 0$.

   BILAN : l'ensemble de définition de Ψ est $\mathbb{R}^* = \left]-\infty, 0\right[\, \cup \, \left]0, +\infty\right[$.

2. **Première rédaction (un peu laborieuse...).**
   Montrons que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ **en montrant qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle de** $\mathbb{R}^*$.
   $\triangleright$ Sur $\left]0, +\infty\right[$
   D'après la relation de Chasles, on a
   $$\forall\, x \in \left]0, +\infty\right[, \quad \Psi(x) \; = \; -\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t} \; + \; \int_1^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t} \mathrm{d}t$$
   D'après le théorème fondamental de l'Analyse :
   - la fonction $x \mapsto -\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ est $\mathcal{C}^1$
   - la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^{2x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}$ est $\mathcal{C}^1$ car les deux fonctions $\begin{cases} x \mapsto 2x \\ y \mapsto -\displaystyle\int_1^y \frac{\mathrm{e}^t}{t} \end{cases}$ le sont

   Par somme, on en déduit que Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, +\infty\right[$ et on a
   $$\forall\, x \in \left]0, +\infty\right[, \quad \Psi'(x) \; = \; -\frac{\mathrm{e}^x}{x} \; + \; 2\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} \; = \; \frac{\mathrm{e}^x(-1 + \mathrm{e}^x)}{x}$$

   $\triangleright$ Sur $\left]-\infty, 0\right[$
   Rien ne change si ce n'est le 1 artificiel dans les deux intégrales qu'il faut changer en -1 ou en -2026.

   BILAN : Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \Psi'(x) \; = \; \frac{\mathrm{e}^x(-1 + \mathrm{e}^x)}{x}$$

   Autre rédaction (moins laborieuse, peut-être).
   Montrons que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (on travaille donc directement sur $\mathbb{R}^*$, qui n'est pas un intervalle !).
   La fonction intégrée $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle, certes !).
   Elle admet des primitives. Notons F l'une d'entre elle. Ainsi, F est de classe $\mathcal{C}^1$ (en tant que primitive d'une fonction continue).
   On a alors
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad \Psi(x) \; = \; F(2x) - F(x)$$

Par opérations, on en déduit que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \qquad \Psi'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}(-1+\mathrm{e}^{x})}{x}\end{aligned}$$

3. Déterminons la limite de Ψ en 0.
   $\triangleright$ On commence par déterminer la limite en 0^+.
   Montrons que
   $$\forall\, x > 0, \quad \mathrm{e}^{x}\ln 2 \;\leqslant\; \Psi(x) \;\leqslant\; \mathrm{e}^{2x}\ln 2$$
   On pourra en déduire, d'après le théorème des Gendarmes que $\Psi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln 2$.
   Fixons $x > 0$.
   On a
   $$\forall\, t \in [x, 2x], \quad \frac{\mathrm{e}^{x}}{t} \;\leqslant\; \frac{\mathrm{e}^{t}}{t} \;\leqslant\; \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}$$
   Par croissance de l'intégrale dans le bon sens, on a
   $$\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{x}}{t}\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\mathrm{d}t \;\leqslant\; \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{t}\mathrm{d}t$$
   D'où
   $$\mathrm{e}^{x}\underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{\ln 2} \;\leqslant\; \underbrace{\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\mathrm{d}t}_{\Psi(x)} \;\leqslant\; \mathrm{e}^{2x}\underbrace{\int_x^{2x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t}_{\ln 2}$$

   $\triangleright$ On établit de la même manière que
   $$\forall\, x < 0, \quad \mathrm{e}^{2x}\ln 2 \;\leqslant\; \Psi(x) \;\leqslant\; \mathrm{e}^{x}\ln 2$$
   D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $\Psi(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} \ln 2$.

   $\triangleright$ Ces deux points montrent que la limite de Ψ en 0 existe et vaut $\ln 2$.

Limite de I_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin t}$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
D'où

$$\forall\, t \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big], \quad \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{2}}}_{=\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}}} \;\leqslant\; \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin t} \;\leqslant\; \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin 0}}_{=1}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \;\leqslant\; \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sin t}\mathrm{d}t}_{I_n} \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}$$

On a donc montré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} \;\leqslant\; I_n \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}$$

Le théorème des Gendarmes assure l'existence de la limite et donne sa valeur :

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Limite de φ en 0
Commençons par rappeler une proposition de cours :

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$ *(un point intérieur en lequel f est définie)*. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On a l'équivalence

$$\varphi(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \varphi(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x<a}]{} \ell \\[2mm] \varphi(x) \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x>a}]{} \ell \\[2mm] \varphi(a) = \ell \end{cases}$$

Vérifions les trois points (ici, on est obligé de distinguer 0^+ et 0^-, à cause des encadrements).

— **Limite en 0^+.**
Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sin t}$ est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (on utilise la positivité de x).
D'où

$$\forall\, t \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big], \quad \underbrace{\mathrm{e}^{-x\sin\frac{\pi}{2}}}_{=\mathrm{e}^{-x}} \;\leqslant\; \mathrm{e}^{-x\sin t} \;\leqslant\; \underbrace{\mathrm{e}^{-x\sin 0}}_{=1}$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x} \;\leqslant\; \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\sin t}\mathrm{d}t}_{\varphi(x)} \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}$$

On a donc montré que

$$\forall\, x > 0, \quad \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-x} \;\leqslant\; \varphi(x) \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}$$

Le théorème des Gendarmes assure l'existence de la limite et donne sa valeur :

$$\varphi(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} \frac{\pi}{2}$$

— **Limite en 0^-.** Ce cas se traite de la même manière.
On obtient

$$\varphi(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} \frac{\pi}{2}$$

— **En 0.** On a $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$.

Les limites en 0^+ et en 0^- coïncident et valent $\varphi(0)$, d'où l'existence de la limite en 0 et

$$\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2}$$

Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$
Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 1 en 0. On a

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x) - f'(0)x| \leqslant K\frac{|x|^2}{2!}$$

où K est un majorant de $|f''|$ sur $[0,x]$. Prenons $K = \sup\limits_{[0,1]} |f''|$, qui ne dépend pas de x.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\forall\, k \in [\![0,n]\!], \quad \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{k}{n^2}\right| \leqslant \frac{K}{2!}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\left|S_n - \sum_{k=0}^{n} f'(0)\frac{k}{n^2}\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\frac{k}{n^2}\right| && \text{par inégalité triangulaire}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{K}{2!}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 && \text{par somme de ce qui précède}\\
&\leqslant \frac{K}{2!}\frac{1}{n^4}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}k^2}_{\sim \frac{1}{3}n^3} && \text{car } \sum_{k=0}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Le membre de droite est un $\mathrm{O}(\frac{1}{n})$ donc tend vers 0.
D'après le théorème des gendarmes,

$$S_n - f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or $\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{1}{2}$, d'où

$$f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f'(0)}{2}$$

Comme

$$S_n \;=\; \left(S_n - f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}\right) \;+\; f'(0)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n^2}$$

on en déduit par somme de limites que

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f'(0)}{2}$$

La somme $\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ est du type $\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ avec $f : x \mapsto \sin(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f(0) = 0$.
On a donc

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\cos'(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

On transforme ce produit $\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$ avec le principe bien connu suivant

$$\exp(\ln\text{produit}) \;=\; \exp(\text{somme}\ln)$$

On pose $f : x \mapsto \ln(1+x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f(0) = 0$.

On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\frac{1}{1+0}}{2} = \frac{1}{2}$$

Par continuité de l'exponentielle en $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\prod_{k=0}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\mathrm{e}}$$

121

Fixons $a \in \mathbb{R}$ et appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 en a.

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad \Big| f(a+h) - f(a) - hf'(a) \Big| \;\leqslant\; K \frac{|h|^2}{2} \qquad \text{où } K = \sup_{[a,a+h]} |f''| \text{ (qui est un max)}$$

On a bien sûr $K \leqslant M$.
En utilisant que f est positive, on a alors

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad 0 \;\leqslant\; f(a+h) \;\leqslant\; f(a) + hf'(a) + M\frac{h^2}{2}$$

d'où

$$\forall\, h \in \mathbb{R}, \quad 0 \;\leqslant\; f(a) + f'(a)h + \frac{M}{2}h^2$$

On a donc un polynôme en h de degré 2 qui est toujours positif, donc son discriminant est négatif ou nul :

$$f'(a)^2 - 4\frac{M}{2}f(a) \;\leqslant\; 0$$

D'où $f'(a)^2 \leqslant 2Mf(a)$. Puis par croissance de la fonction racine carré, on a $|f'(a)| \leqslant \sqrt{2Mf(a)}$.

Inégalités de Kolmogorov

① L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à $f \in \mathcal{C}^2$ est :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left| f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) \right) \right| \leqslant K_{a,b} \frac{|b-a|^2}{2!}$$

où $K_{a,b}$ est un majorant de $|f^{(2)}|$ sur $[a,b]$

On peut prendre $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f^{(2)}(t)|$ qui ne dépend pas de a et b.

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.

Appliquons ce qui précède à $b = x \pm h$, $a = x$

$$\left| f(x+h) - \left(f(x) + (\pm h) f'(x) \right) \right| \leqslant M_2 \frac{h^2}{2}$$

② Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.

Il faut "retrouver" $f'(x)$ avec les expressions de la question ①

On voit que :

$$\Big(f(x-h) - f(x) + h f'(x) \Big) - \Big(f(x-h) - \cancel{f(x)} \Big)$$

$$- \left[\Big(f(x+h) - f(x) - h f'(x) \Big) - \Big(f(x+h) - \cancel{f(x)} \Big) \right]$$

Vaut $2 h f'(x)$

D'où, par inégalité triangulaire

$$2h\,|f'(x)| \leqslant |f(x-h) - f(x) + hf'(x)|$$
$$+ |f(x-h)|$$
$$+ |f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$$
$$+ |f(x+h)|$$

$$2h\,|f'(x)| \leqslant M_2\frac{h^2}{2} + M_0 + M_2\frac{h^2}{2} + M_0$$

En divisant par 2 :

$$h\,|f'(x)| \leqslant M_0 + \frac{M_2 h^2}{2}$$

D'où

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{1}{2}M_2 h$$

③ Etudions la fonction $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$$h \longmapsto \frac{M_0}{h} + \frac{1}{2}M_2 h$$

φ est dérivable et sa dérivée est

$$\varphi' : h \longmapsto M_0\frac{-1}{h^2} + \frac{1}{2}M_2$$
$$\frac{1}{h^2}\left(-M_0 + \frac{M_2}{2}h^2\right)$$

Le tableau de variations de φ est

h	0		$\sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$		$+\infty$
φ'		$-$	0	$+$	
φ		$\searrow$	$\sqrt{2M_0M_2}$	$\nearrow$	

] WHY

On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0, \quad |f'(x)| \leqslant \varphi(h)$$

En particulier pour $h = \sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |f'(x)| \leqslant \varphi\left(\sqrt{2\frac{M_0}{M_2}}\right) = \sqrt{2M_0M_2}$$

Ainsi $\sqrt{2M_0M_2}$ est un majorant de la fct $x \longmapsto |f'(x)|$

Donc, la borne supérieure de $|f'|$ qui est le + petit des majorants vérifie :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

1. Comme f est dérivable en 0, on a

$$\forall x \neq 0, \quad \varphi(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f'(0)$$

Donc φ est prolongeable par continuité en 0 et ce prolongement est

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\varphi} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & x \neq 0 \\ f'(0) & x = 0 \end{cases} \end{array}$$

2. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction φ se présente comme le produit de f par g où $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$.
La formule de Leibniz dit que l'on a l'égalité de fonctions :

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

Comme $\forall\, j \in \mathbb{N},\ g^{(j)} : x \longmapsto \frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}}$, on a :

$$\varphi^{(n)} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{x^{n-k+1}}$$

$$\forall\, x \neq 0 \quad \varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{-k}}{k!} f^{(k)}(x) x^k$$

3. Soit $x \neq 0$.
D'une part, la question précédente fournit

$$x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) = (-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (-x)^k$$

D'autre part, la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $a = x$ et $b = 0$ donne :

$$\underbrace{f(0)}_{=0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (0 - x)^k - \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t) t^n dt$$

D'où en multipliant par $(-1)^n n!$

$$(-1)^n n! \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (0 - x)^k = \int_0^x f^{(n+1)}(t) t^n dt$$

En rassemblant ces deux informations, on a

$$x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$$

4. On pose $v : t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ et $u : t \mapsto \dfrac{1}{n+1} t^{n+1}$.

$$\begin{aligned} x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) &= \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) \mathrm{d}t \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(x) - \frac{1}{n+1} \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

En divisant par x^{n+1} :

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) - \frac{1}{n+1} \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t) \mathrm{d}t$$

5. Pour répondre à la question, il suffit de montrer que (WHY ?) :

$$\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t) \mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

En posant $M = \max\limits_{[-1,1]} |f^{(n+2)}|$, je vous laisse montrer que :

$$\forall\, x \in [-1,1], \quad \left| \int_0^x t^{n+1} f^{(n+2)}(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant M \frac{|x|^{n+2}}{n+2}$$

1. Considérons la fonction $f:\begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t)\end{array}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f à l'ordre n, en 0, on a
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Big|f(x)-S_n(x)\Big| \leqslant \|f^{(n+1)}\|_{\infty,\underbrace{[0,x]}}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Big|f(x)-S_n(x)\Big| \leqslant \|f^{(n+1)}\|_{\infty,[0,x]}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\qquad \text{(on utilise que } x\geqslant 0)$$
   Comme $f^{(n+1)}: t\mapsto \dfrac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}$, on a
$$\forall t\in[0,x],\quad |f^{(n+1)}(t)|\leqslant \frac{n!}{(1+0)^{n+1}}$$
   d'où $\|f^{(2n+1)}\|_{\infty,[0,x]}\leqslant n!$ (ici, il y a même égalité).
   D'où
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Big|f(x)-S_n(x)\Big| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
   c'est-à-dire
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad \left|\ln(1+x)\ -\ \sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

2. Ici, $x\in[0,1]$. Ainsi,
$$\frac{x^{n+1}}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
   Comme
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Big|f(x)-S_n(x)\Big| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
   le théorème des Gendarmes affirme que
$$S_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$$
   c'est-à-dire
$$\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(1+x)$$

3. A taper.
4. Cf. cours
5. On a
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Big|f(x)-S_n(x)\Big| \leqslant \left|\int_0^x(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t\right|$$
   Ici, il faut distinguer deux cas pour utiliser l'inégalité triangulaire.
   • Traitons le cas $x\leqslant 0$, c'est-à-dire ici le cas $x\in\,]-1,0]$.
   On a
$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \Big|f(x)-S_n(x)\Big| &\leqslant \int_x^0\left|(-1)^n\frac{t^n}{1+t}\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_x^0\frac{|t|^n}{1+t}\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{1+x}\underbrace{\int_x^0|t|^n\mathrm{d}t}_{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}\end{aligned}$$

   Remarque. Le calcul de $\displaystyle\int_x^0|t|^n\mathrm{d}t$ n'est pas du tout immédiat.
$$\int_x^0|t|^n\mathrm{d}t=\int_x^0(-t)^n\mathrm{d}t=(-1)^n\int_x^0t^n\mathrm{d}t=(-1)^n\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_x^0=(-1)^n(0-\frac{1}{n+1}x^{n+1})=\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}x^{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

BILAN. Pour $x \in \,]-1, 0]$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Big|f(x) - S_n(x)\Big| \;\leqslant\; \frac{1}{1+x}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Où a-t-on utilisé le fait que x est différent de -1 ?

• Cas $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \Big|f(x) - S_n(x)\Big| \quad &\leqslant \quad \int_0^x \Big|(-1)^n \frac{t^n}{1+t}\Big| \mathrm{d}t \\
&= \quad \int_0^x \frac{|t|^n}{1+t} \mathrm{d}t \\
&\leqslant \quad \frac{1}{1+0} \underbrace{\int_0^x |t|^n \mathrm{d}t}_{\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}}
\end{aligned}$$

BILAN. Pour $x \in [0, 1]$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Big|f(x) - S_n(x)\Big| \;\leqslant\; \frac{1}{1+0}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

• Dans les deux cas (c'est-à-dire $x \in \,]-1, 1]$), on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \Big|f(x) - S_n(x)\Big| \;\leqslant\; \max\left(\frac{1}{1+x}, 1\right)\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Comme $x \in \,]-1, 1]$, on a

$$\frac{|x|^{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

D'après le théorème des Gendarmes, on a

$$S_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

127

Considérons la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos t \end{array}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f à l'ordre $2n$, en 0, on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Big| f(x) - S_n(x) \Big| \;\leqslant\; \|f^{(2n+1)}\|_{\infty,[0,x]} \, \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Comme $|f^{2n+1}| = |\sin|$, on a $\|f^{(2n+1)}\|_{\infty,[0,x]} \leqslant 1$ (attention, il n'y a pas forcément égalité).

D'où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Big| f(x) - S_n(x) \Big| \;\leqslant\; \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Or

$$\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \begin{cases} \text{par croissances comparées si } |x| > 1 \\ \text{par opérations si } |x| \leqslant 1 \text{ (borné} \times \text{tend-vers-0)} \end{cases}$$

D'après le théorème des Gendarmes, on a

$$S_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \cos x$$

1. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$ par opérations.
Montrons par récurrence :
$$\mathcal{H}_n : « \varphi^{(n)} : x \mapsto \tfrac{(2n)!}{4^n n!}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} ».$$
$\triangleright$ $\mathcal{H}_0$ est vraie. En effet, la fonction $x \mapsto \frac{(2\times 0)!}{4^0 0!}(1-x)^{-\frac{2\times 0+1}{2}} = (1-x)^{\frac{-1}{2}}$ est exactement φ donc $\varphi^{(0)}$.
$\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Montrons $\mathcal{H}_{n+1}$. Pour cela, on utilise que $\varphi^{(n+1)} = (\varphi^{(n)})'$.
Ainsi
$$\varphi^{(n+1)} : x \mapsto \frac{(2n)!}{4^n n!}\times\frac{-(2n+1)}{2}\times(-1)\times(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}-1} = \underbrace{\frac{(2n)!}{4^n n!}\times\frac{(2n+1)(2n+2)}{2(2n+2)}}_{\frac{\big(2(n+1)\big)!}{4^{n+1}(n+1)!}}\times(1-x)^{-\frac{2(n+1)+1}{2}}$$
Ce qui est exactement $\mathcal{H}_{n+1}$.

2. (2a) • On peut procéder par récurrence.
• Ou bien fixer $n \in \mathbb{N}$.
Puis remarquer que $4^{n+1} = (1+1)^{2n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+2}\binom{2n+2}{k}$ et enfin constater que cette somme d'entiers positifs est supérieure à l'un d'entre eux, à savoir $\binom{2n+2}{n+1}$.

(2b) Soit $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leqslant t \leqslant x < 1$.
Procédons par équivalences successives
$$\begin{aligned} 0 \leqslant \frac{x-t}{1-t} \leqslant x \quad &\iff \quad 0 \leqslant x-t \leqslant (1-t)x \\ &\iff \quad \begin{cases} 0 \leqslant x-t \\ x-t \leqslant (1-t)x \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} t \leqslant x \\ 0 \leqslant (1-x)t \end{cases} \\ &\underset{t\geqslant 0}{\overset{1-x\geqslant 0}{\iff}} \quad t \leqslant x \end{aligned}$$
L'assertion finale est vraie, donc l'assertion initiale aussi.

3. Soit $x \in [0,1[$.
Première idée.
On peut penser à utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.
La fonction φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$, et on a $\quad \forall\, k \in \mathbb{N},\ \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{(2k)!}{4^k k!}(1-0)^{\frac{-(2k+1)}{2}} = \dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc
$$\left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{2k}{k}}{4^k}x^k\right| \leqslant K_{n,x}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$
où $K_{n,x}$ est un majorant de $|\varphi^{(n+1)}|$ sur $[0,x]$.
On a
$$\forall\, t \in [0,x], \qquad |\varphi^{(n+1)}(t)| = \varphi^{(n+1)}(t) = \underbrace{\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}}_{(n+1)!\times\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}}\times\frac{1}{(1-t)^{n+\frac{3}{2}}}$$
D'après la question précédente, on a $\dfrac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}} \leqslant 1$.
Par croissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^{n+\frac{3}{2}}}$, on a donc
$$\forall\, t \in [0,x], \qquad |\varphi^{(n+1)}(t)| \leqslant (n+1)! \times \frac{1}{(1-x)^{n+\frac{3}{2}}}$$

On peut prendre $K_{n,x} = (n+1)! \dfrac{1}{(1-x)^{n+\frac{3}{2}}}$.

D'où

$$\left| \varphi(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k \right| \;\leqslant\; \frac{x^{n+1}}{(1-x)^{n+\frac{3}{2}}}$$

Hélas, aucune raison pour que $\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^n$ tend vers 0.

$\boxed{\textbf{échec}}$

Deuxième idée !

Du coup, on prend la formule de Taylor avec reste intégral.

On a

$$\varphi(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Occupons-nous du reste intégral.

$$\forall\, t \in [0,x], \qquad \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) \;=\; \underbrace{\frac{1}{n!} \times \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}(n+1)!}}_{(n+1)\times\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{4^{n+1}}} \times \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \times \frac{1}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$$

Comme $t \mapsto (1-t)^{\frac{-3}{2}}$ est croissante, et en utilisant les deux questions précédentes, on a

$$\forall\, t \in [0,x], \qquad 0 \;\leqslant\; \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t) \;\leqslant\; (n+1) \times 1 \times x^n \times \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Par croissance de l'intégrale entre 0 et x (bornes dans le bon sens), on en déduit que le reste intégral vérifie :

$$0 \;\leqslant\; \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \;\leqslant\; (n+1) \times x^{n+1} \times \frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$$

Le membre droit tend vers 0 (par croissance comparée et le fait que $x \in [0,1[$), donc par le théorème des Gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{RI}_n(x) = 0$. D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(x)$$

Cela signifie exactement que la série $\sum \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$ converge et que sa somme vérifie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

1. Montrons que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

   Remarque. En ayant regardé plus loin que le bout de son nez, on comprend qu'il suffit de répondre à la deuxième question pour conclure. Mais faisons comme si c'était un exercice d'oral avec des questions données au fur et à mesure. Répondons donc sagement à la première question.

   Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On a

$$\begin{aligned}
|I_n - 1| &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t \;-\; 1 \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t \;-\; \int_0^1 1\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+t^n} - 1 \Big)\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_0^1 \frac{-t^n}{1+t^n}\mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_0^1 \left| \frac{-t^n}{1+t^n} \right| \mathrm{d}t \qquad \text{inég. triangulaire} \\
&\overset{\text{WHY}}{\leqslant} \frac{1}{1+0^n} \int_0^1 t^n \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

   Résumons. On a montré

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad |I_n - 1| \;\leqslant\; \frac{1}{n+1}$$

   D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   Remarque. Au cours du calcul, on obtient l'égalité $I_n - 1 = \displaystyle\int_0^1 t^n \varphi_n(t)\mathrm{d}t$ avec $\varphi_n : t \mapsto \dfrac{-1}{1+t^n}$. On serait tenter d'appliquer l'exercice 130, mais ce n'est pas possible car φ_n dépend de n.

2. Il s'agit de montrer que

$$I_n - 1 \;=\; -\frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

   c'est-à-dire

$$I_n - 1 \;\sim\; -\frac{\ln 2}{n}$$

   Étape 1. Un calcul exact à n fixé.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ (le fait que n soit non nul sera utile après).
   Reprenons les calculs de la question précédente :

$$I_n - 1 \;=\; \int_0^1 \frac{-t^n}{1+t^n}\mathrm{d}t$$

   En louchant sur l'énoncé, on comprend qu'il faut faire apparaître du logarithme.
   On propose donc l'écriture suivante :

$$I_n - 1 \;=\; \frac{-1}{n} \int_0^1 \frac{nt^{n-1}}{1+t^n}\, t\, \mathrm{d}t$$

   Posons $u_n : t \mapsto \ln(1+t^n)$ et $v_n : t \mapsto t$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.
   Une intégration par parties fournit alors

$$I_n - 1 \;=\; \frac{-1}{n} \Big[\ln(1+t^n)\, t \Big]_0^1 + \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$$

   D'où

$$(\clubsuit) \qquad I_n - 1 \;=\; -\frac{\ln 2}{n} \;+\; \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t$$

   Étape 2. Un calcul asymptotique.
   Montrons que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$.

Une façon simple de le montrer est d'utiliser l'inégalité de convexité

$$\forall\, x \in [0,1], \quad \ln(1+x) \leqslant x$$

avec $x = t^n$ qui est bien dans $[0,1]$ lorsque t décrit $[0,1]$.
Bref, on a

$$\forall\, t \in [0,1], \quad 0 \;\leqslant\; \ln(1+t^n) \;\leqslant\; t^n$$

Par croissance de l'intégrale, on a alors $0 \;\leqslant\; \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t \;\leqslant\; \underbrace{\int_0^1 t^n \mathrm{d}t}_{\frac{1}{n+1}}$.

Le théorème des Gendarmes fournit $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$.

En multipliant par $\dfrac{1}{n}$, on a alors $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$.
Grâce à ($\clubsuit$), on en déduit

$$I_n - 1 \;=\; -\frac{\ln 2}{n} \;+\; \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

1. Notons $K = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, ce qui est licite, car f est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée (d'ailleurs cette borne supérieure est même un maximum).
   On a
$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \left|t^n f(t)\right|\ \mathrm{d}t && \text{inég. triangulaire}\\ &\leqslant \int_0^1 t^n \left|f(t)\right|\ \mathrm{d}t && \text{à vous}\\ &\leqslant K\int_0^1 t^n\ \mathrm{d}t && \text{définition de } K\text{, et croissance de l'intégrale}\\ &\leqslant K\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$
   Le membre droit tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
   D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que
$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2. Les calculs de la question précédente montrent que
$$\left|\int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant K\frac{1}{n+1} \qquad \text{où } K = \sup_{[0,1]}|f|$$
   ce qui est exactement la définition de $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)$.
   Et comme $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$, on a aussi
$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$
   Remarque. Le « en fait » dans la question s'explique par le fait que l'on peut retrouver le résultat de la première question.
   En effet, comme $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}(1)$, un grand O de $\dfrac{1}{n}$ est un o(1), d'où $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}(1)$.
3. Montrons que $\displaystyle\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$ c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   On a
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^{1-\delta} nt^n\left|f(t)\right|\mathrm{d}t && \text{par inég. triangulaire}\\ &\leqslant K\int_0^{1-\delta} nt^n\ \mathrm{d}t && \text{où } K = \sup_{[0,1]}|f|\end{aligned}$$
   Or
$$\int_0^{1-\delta} nt^n\ \mathrm{d}t = \left[\frac{n}{n+1}t^{n+1}\right]_0^{1-\delta} = \frac{n}{n+1}(1-\delta)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car } 1-\delta\in[0,1[$$
   D'après le théorème des Gendarmes, on obtient $\displaystyle\int_0^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   Autre façon de présenter la preuve. On a
$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^{1-\delta} t^n\left|f(t)\right|\mathrm{d}t && \text{par inég. triangulaire}\\ &\leqslant \sup_{[0,1]}|f| \underbrace{\int_0^{1-\delta} t^n\ \mathrm{d}t} && \text{car } f \text{ est continue}\\ &\qquad\qquad = \frac{1}{n+1}(1-\delta)^{n+1} && \text{calcul}\\ &\qquad\qquad = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big) && \text{car } (1-\delta)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\Big|\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\leqslant\; \text{qq-chose qui est un } \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

Donc (WHY) :

$$\int_0^{1-\delta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

1. On suppose f classe $\mathcal{C}^1$.

   Étape 1. Un calcul exact à n fixé.

   On pose $u : t \mapsto \dfrac{1}{n+1} t^{n+1}$ et $v = f$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

   Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \Big[\frac{1}{n+1} t^{n+1} f(t)\Big]_0^1 \;-\; \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t$$

   d'où

$$(\clubsuit) \qquad \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n+1} \;-\; \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t$$

   Étape 2. Un calcul asymptotique.

   Montrons que $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$, c'est-à-dire montrons que la suite tend vers 0.

   Justification. Comme f' est continue (car f est de classe $\mathcal{C}^1$), cela relève de l'exercice 130, qu'il faut être capable de refaire rapidement.

   Cela se résume à :

$$\Big|\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t\Big| \;\leqslant\; \max_{[0,1]} |f'| \underbrace{\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t}_{\frac{1}{n+2}}$$

   Et on termine avec le théorème des Gendarmes.

   En multipliant par $\dfrac{1}{n+1}$, on a alors $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n+1}\Big)$.

   Comme $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$, on a aussi

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

   Grâce à ($\clubsuit$), on en déduit

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n+1} \;+\; \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

   On termine en faisant apparaître $\dfrac{f(1)}{n}$:

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n} \;+\; \Big(\frac{f(1)}{n+1} - \frac{f(1)}{n}\Big) \;+\; \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

   et en constatant que $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$, qui vaut $\dfrac{-1}{n(n+1)}$, est négligeable devant $\dfrac{1}{n}$.

   Ainsi,

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{f(1)}{n} \;+\; \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big) \;+\; \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

   D'où le résultat.

2. (a) On fixe $\varepsilon > 0$.

   • **Première étape : existence de δ.**

   Comme f est continue en 1, il existe $\delta' > 0$, tel que

$$\forall\, t \in [1-\delta', 1+\delta'] \cap [0,1], \quad \big|f(t) - \underbrace{f(1)}_{=0}\big| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2}$$

   En posant $\delta = \min(\delta', 1)$, on a

$$\forall\, t \in [1-\delta, 1], \quad \big|f(t)\big| \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_{1-\delta}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{1-\delta}^{1} nt^n |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{inég. triangulaire (avec des bornes ordonnées)}$$
$$\leqslant \int_{1-\delta}^{1} nt^n \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}t \quad \text{inég. précédente et croissance de l'intégrale}$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{1-\delta}^{1} nt^n \mathrm{d}t$$

Or

$$\int_{1-\delta}^{1} nt^n \mathrm{d}t = \left[\frac{n}{n+1}t^{n+1}\right]_{1-\delta}^{1} = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leqslant 1}\ \underbrace{\left(1-(1-\delta)^{n+1}\right)}_{\leqslant 1} \leqslant 1$$

Bilan. On a montré qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_{1-\delta}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

• **Deuxième étape : existence de n_0.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles, on a

$$\int_{0}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1-\delta}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité triangulaire chez $\mathbb{R}$, on a

$$\left|\int_{0}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{0}^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{1-\delta}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

Grâce à la première étape, on a donc :

$$(\diamondsuit) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_{0}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{0}^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or d'après l'exercice 130 (qu'il faut savoir refaire), on sait que $\left|\int_{0}^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Par définition epsilonesque de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left|\int_{0}^{1-\delta} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En reprenant $(\diamondsuit)$, on obtient ce qu'il fallait prouver :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \left|\int_{0}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

(b) À la question précédente, on a montré

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \left|\int_{0}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit, comme $f(1) = 0$, on a montré

$$\int_{0}^{1} nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$$

3. On se ramène à une fonction g continue telle que $g(1) = 0$ en posant $g : x \mapsto f(x) - f(1)$.
La question précédente montre alors que

$$\int_{0}^{1} nt^n g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 nt^n g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 nt^n f(1)\,\mathrm{d}t \quad \text{car } f(t) = g(t) + f(1) \\
&= \underbrace{\int_0^1 nt^n g(t)\,\mathrm{d}t}_{\to 0} + f(1) \underbrace{\int_0^1 nt^n\,\mathrm{d}t}_{\to 1} \quad \text{car } \int_0^1 nt^n \mathrm{d}t = \left[\frac{n}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\
&\qquad \text{confer l'exercice 118 (viii)}
\end{aligned}$$

Par somme de limites, on a

$$\int_0^1 nt^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$$

Posons $u_n = \left(\int_a^b |f(t)|^n \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$ et $M = \max\limits_{[a,b]} |f|$.

Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$ en revenant à la définition epsilonesque.

• Par définition de M et par croissance de $x \mapsto x^n$ sur $[0, +\infty[$, on a

$$\forall\, t \in [a,b], \qquad |f(t)|^n \;\leqslant\; M^n$$

On a alors (WHY ?)

$$u_n \;\leqslant\; (b-a)^{\frac{1}{n}} M$$

• Soit $\varepsilon > 0$ fixé une fois pour toute.
Il existe x_0 vérifiant $|f(x_0)| = M$ (WHY ?). Par continuité de $|f|$ en x_0

$$\exists\, \eta > 0, \quad \forall\, t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset [a,b], \quad |f(t)| \geqslant M - \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour alléger les notations, posons $\alpha = x_0 - \eta$ et $\beta = x_0 + \eta$. On a alors (WHY ?)

$$\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \;=\; \left(\int_\alpha^\beta \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \;\leqslant\; \left(\int_\alpha^\beta |f(t)|^n \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} \;\leqslant\; u_n$$

• On a alors

$$(\heartsuit) \qquad \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \;\leqslant\; u_n \;\leqslant\; (b-a)^{\frac{1}{n}} M$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} = M - \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} (b-a)^{\frac{1}{n}} M = M$$

Ainsi, il existe n_1 et n_2 tels que :

$$\forall\, n \geqslant n_1, \quad M - \varepsilon \;\leqslant\; \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\beta - \alpha)^{\frac{1}{n}} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \geqslant n_2, \quad (b-a)^{\frac{1}{n}} M \;\leqslant\; M + \varepsilon$$

• En posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a grâce à $(\heartsuit)$:

$$\forall\, n \geqslant n_0, \quad M - \varepsilon \;\leqslant\; u_n \;\leqslant\; M + \varepsilon$$

BILAN. On a prouvé

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geqslant n_0, \quad M - \varepsilon \;\leqslant\; u_n \;\leqslant\; M + \varepsilon$$

c'est-à-dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$.

- $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
  Ce n'est pas une somme de Riemann (mais b_n en est une).
  Par une majoration naïve (confer l'exo 135), on obtient facilement que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$
  C'est une somme de Riemann. Confer l'exo 135.
  On trouve $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

- $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+k^2}$
  Ce n'est pas une somme de Riemann. Mais on peut la relier directement à la somme b_n.
  On trouve $c_n = nb_n$. Donc $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
  Autre justification. Sans somme de Riemann, de manière élémentaire (niveau Terminale).
  On a
  $$\forall\, k \in [\![1,n]\!], \qquad \frac{n^2}{n^2+n^2} \;\leqslant\; \frac{n^2}{n^2+k^2}$$
  Par somme, on a
  $$n\frac{1}{2} \;\leqslant\; b_n$$
  Par minoration, on obtient directement $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

- $d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{n^3+(2k)^3}$
  C'est une somme de Riemann. On a $d_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{4\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+8\left(\frac{k}{n}\right)^3}$.
  D'après le théorème des sommes de Riemann (la fonction qui intervient est continue sur $[0,1]$), on a $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \frac{4t^2}{1+8t^3}\mathrm{d}t$.
  On trouve facilement une primitive de la fonction intégrée (penser à $t \mapsto \frac{1}{6}\ln(1+8t^3)$).
  On obtient que $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}\ln 3$.

- $e_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x^2\sin(\pi x)\mathrm{d}x$
  Par une double IPP, on obtient $e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2-4}{\pi^3}$.

- $f_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
  On a
  $$f_n \;=\; \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sqrt{\frac{k}{n}}}_{f\left(\frac{k}{n}\right)}$$
  On reconnaît donc une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est continue sur $[0,1]$.
  Ainsi, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$.
  Calculons cette intégrale (ne pas hésiter à écrire $\sqrt{t}$ sous la forme $t^{\frac{1}{2}}$) :
  $$\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1}t^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 \;=\; \frac{2}{3}$$
  D'où
  $$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$$

- $g_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$

  On a
$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \sqrt{k} - 1 \ \leqslant\ \lfloor \sqrt{k} \rfloor \ \leqslant\ \sqrt{k}$$
  Par somme, et multiplication par $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, on en déduit (en notant toujours f_n la suite du point précédent) :
$$f_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \ \leqslant\ g_n \ \leqslant\ f_n$$
  D'après le point précédent, on a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$.

  Le théorème des Gendarmes montre que $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{3}$.

- $h_n = \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^3}}$

  La somme $h_n = \dfrac{1}{n^4} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^3}}$ est du type $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ qui est continue sur $[0, 1]$.

  D'après le théorème des sommes de Riemann, la limite cherchée vaut $\displaystyle\int_0^1 f$.

  Pour calculer l'intégrale proposée, il est bon de remarquer que :
$$\frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} \ = \ \frac{(1+x)-1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \ = \ \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$
  D'où
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} \mathrm{d}x \ = \ \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \right) \mathrm{d}x \ = \ \left[\frac{1}{\frac{-1}{2}+1} (1+x)^{\frac{-1}{2}+1} - \frac{1}{\frac{-3}{2}+1} (1+x)^{\frac{-3}{2}+1} \right]_0^1$$
  C'est-à-dire
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} \mathrm{d}x \ = \ \left[2\sqrt{1+x} \ + \ 2\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right]_0^1 \ = \ \left(2\sqrt{2} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (2+2) \ = \ 3\sqrt{2} - 4$$
  D'où
$$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\sqrt{2} - 4$$

- $i_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!\, n^n} \right)^{\frac{1}{n}}$

  On a
$$i_n \ = \ \exp\left[\frac{1}{n} \ln\left(\frac{(2n)!}{n!\, n^n} \right) \right] \ \overset{\text{WHY}}{=} \ \exp\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n} \right) \right] \ = \ \exp\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]$$
  La fonction $f : t \mapsto \ln(1+t)$ est continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème des sommes de Riemann, on en déduit que
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_0^1 \ln(1+t) \mathrm{d}t$$
  Une primitive de $t \mapsto \ln(1+t)$ est $t \mapsto (1+t)\ln(1+t) - t$ (dériver pour s'en convaincre ; une autre stratégie consiste à effectuer une IPP pour calculer l'intégrale).

  Ainsi
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad 2\ln 2 - 1 \ = \ \ln 4 - 1 = \ \ln\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)$$
  Par composition de limites avec la fonction exponentielle, on obtient que
$$i_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{\mathrm{e}}$$

On constate que

$$\frac{n+k}{n^2+k} = \frac{1}{n} \times \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n^2}} \quad \text{ne s'écrit PAS sous la forme } \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Encadrons le dénominateur de chaque terme :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{n+k}{n^2+n} \leqslant \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{n+k}{n^2+1}$$

Par somme et en utilisant que $S_n = \sum_{k=1}^{n} (n+k)$ est la somme des termes d'une suite arithmétique, on obtient :

$$\frac{1}{n^2+n} \times S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k} \leqslant \frac{1}{n^2+1} \times S_n \qquad \text{où } S_n = \frac{(3n+1)n}{2}$$

Les deux termes extrêmes tendent vers $\frac{3}{2}$, donc le théorème des Gendarmes assure que la limite cherchée existe et vaut $\frac{3}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], \quad 0 \;\leqslant\; \frac{1}{n^2+k^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Par somme, on a

$$0 \;\leqslant\; S_n \;\leqslant\; \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}}_{=\frac{1}{n}}$$

On a donc montré que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \;\leqslant\; S_n \;\leqslant\; \frac{1}{n}$$

D'après le théorème des Gendarmes, on en déduit que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La somme ressemble à une somme de Riemann, mais n'en est pas une !
Considérons la suite de terme général nS_n. Cette fois, c'est une somme de Riemann car :

$$nS_n \;=\; \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

C'est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ qui est continue sur $[0,1]$. Le théorème des sommes de Riemann fournit alors :

$$nS_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f \;=\; \frac{\pi}{4}$$

On en déduit alors l'équivalent

$$S_n \;\sim\; \frac{\pi}{4}\frac{1}{n}$$

Justification On rappelle qu'une suite convergente de limite *non nulle* est équivalente à sa limite. On a donc $nS_n \sim \dfrac{\pi}{4}$. Puis une division par n (ou une multiplication par $\frac{1}{n}$) fournit $S_n \sim \dfrac{\pi}{4}\dfrac{1}{n}$.

136

Par le théorème des sommes de Riemann appliqué à la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{\alpha} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

qui est continue sur $[0,1]$, on a

$$\frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$$

On en déduit que (on utilise ici que la limite précédente est non nulle) :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}$$

137

Posons $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est **croissante** sur $[0,1[$.
En reprenant les mêmes idées de la preuve de 102, on a

$$\frac{1}{n}f(0) \ + \ \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \ \leqslant \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \ \leqslant \ \int_0^{1-\frac{1}{n}} f \ + \ \frac{1}{n} f\Big(1-\frac{1}{n}\Big)$$

Deux petits calculs montrent que

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f \ = \ \Big[\operatorname{Arcsin} t\Big]_0^{1-\frac{1}{n}} \ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n} f\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \ \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ 0$$

Le théorème des Gendarmes montre que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.

1. Par somme de nombres réels positifs, on a

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a\cos^2 t + b\sin^2 t \geqslant 0$$

Reste à montrer que pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la quantité $a\cos^2 t + b\sin^2 t$ n'est pas nulle.
Une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si ces nombres sont nuls, d'où les équivalences :

$$a\cos^2 t + b\sin^2 t = 0 \iff \begin{cases} a\cos^2 t = 0 \\ b\sin^2 t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases}$$

La dernière assertion étant fausse, la première l'est aussi.
On a donc montré que

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad a\cos^2 t + b\sin^2 t \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad a\cos^2 t + b\sin^2 t \neq 0$$

Ainsi, le logarithme est bien défini.
De plus, la fonction intégrée est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Donc le réel $I(a, b)$ est bien défini.

2. On a

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ (la fonction $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$I(a, b) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\Big(a\cos^2(\frac{\pi}{2} - x) + b\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)\Big)(-1)\mathrm{d}x$$

D'après les formules de trigonométrie, on obtient

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a\sin^2 x + b\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

ce qui montre que $I(a, b) = I(b, a)$.

3. Procédons par disjonction de cas.
Cas 1 : $a \leqslant b$
On a alors

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \underbrace{a\cos^2 t + a\sin^2 t}_{a} \leqslant a\cos^2 t + b\sin^2 t \leqslant \underbrace{b\cos^2 t + b\sin^2 t}_{b}$$

Appliquons la fonction logarithme qui est croissante :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \ln a \leqslant \ln(a\cos^2 t + b\sin^2 t) \leqslant \ln b$$

Par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{\pi}{2}\ln a \leqslant I(a, b) \leqslant \frac{\pi}{2}\ln b$$

Dans ce cas, on a $\min(a, b) = a$ et $\max(a, b) = b$, d'où

$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(a, b)\big) \leqslant I(a, b) \leqslant \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(a, b)\big)$$

Cas 2 : $b \leqslant a$
D'après le cas 1, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(b, a)\big) \leqslant I(b, a) \leqslant \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(b, a)\big)$$

On termine en utilisant le fait que $I(b, a) = I(a, b)$ d'après la question 2, et le fait que $\min(b, a) = \min(a, b)$ et idem pour max.

4. On utilise la question 2, la linéarité de l'intégrale et le fait que la somme de logarithme est le logarithme du produit et on obtient :

$$2I(\alpha,\beta) \;=\; I(\alpha,\beta)+I(\beta,\alpha) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[(\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t)(\beta\cos^2 t+\alpha\sin^2 t)\Big]\mathrm{d}t$$

Pour conclure, il suffit de montrer que, pour tout t, on a

$$(\alpha\cos^2 t+\beta\sin^2 t)(\beta\cos^2 t+\alpha\sin^2 t) \;=\; \alpha\beta\cos^2(2t)+\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2\sin^2(2t)$$

Cette dernière égalité relève d'un petit exercice de trigonométrie.
Allons-y.
En développant le membre gauche, on tombe sur

$$\alpha\beta(\cos^4 t+\sin^4 t) \;+\; (\alpha^2+\beta^2)\cos^2 t\sin^2 t$$

En ajoutant et soustrayant $2\alpha\beta\cos^2 t\sin^2 t$, on obtient :

$$\alpha\beta(\cos^4 t-2\cos^2 t\sin^2 t+\sin^4 t) \;+\; (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cos^2 t\sin^2 t$$

c'est-à-dire :

$$ab(\cos^2 t-\sin^2 t)^2+(\alpha+\beta)^2\Big(\frac{1}{2}\sin(2t)\Big)^2$$

D'où $\alpha\beta\cos^2(2t)+\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\Big)^2\sin^2(2t)$, ce qui est le membre droit !

5. D'après la question 4, on a :

$$2I(a,b) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab\cos^2(2t)+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2(2t)\Big]\mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $x=2t$:

$$2I(a,b) \;=\; \int_0^{\pi} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$

Multiplions par 2 et utilisons la relation de Chasles, on obtient :

$$4I(a,b) \;=\; \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\mathrm{d}x}_{=I\left(ab,(\frac{a+b}{2})^2\right)} \;+\; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\mathrm{d}x$$

Prenons l'intégrale de droite et effectuons le changement de variable $x=y-\frac{\pi}{2}$ (la fonction $y\mapsto y-\frac{\pi}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$).
On obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\Big[ab\cos^2 x+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2 x\Big]\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab\cos^2\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\sin^2\Big(y+\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\Big[ab(-\sin y)^2+\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\cos^2 y\Big]\mathrm{d}y && \text{trigo} \\
&= I\Big(\big(\frac{a+b}{2}\big)^2, ab\Big) \\
&= I\Big(ab, \big(\frac{a+b}{2}\big)^2\Big) && \text{d'après 2 avec } \alpha=ab \text{ et } \beta=\big(\tfrac{a+b}{2}\big)^2
\end{aligned}$$

6. Soit $n\in\mathbb{N}$. D'après la question 5 avec $\alpha=u_n$ et $\beta=v_n$, on a

$$2I(u_n,v_n)=I(u_{n+1},v_{n+1})$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad I(u_n,v_n)=2^n I(a,b)$$

7. On constate que $w_{n+1} = w_n^2$ (idem pour w'_n). Par récurrence, on en déduit

$$(\bigstar) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = w_0^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ w'_n = {w'_0}^{2^n}$$

Rédigeons la récurrence pour la suite (w_n).

Initialisation. Comme $2^0 = 1$, on a $w_0 = w_0^{2^0}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $w_n = w_0^{2^n}$.

Montrons que $w_{n+1} = w_0^{2^{n+1}}$.

On a $w_{n+1} = w_n^2$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$w_{n+1} \;=\; (w_0^{2^n})^2 \;=\; w_0^{2^n \times 2} \;=\; w_0^{2^{n+1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Reprenons $(\bigstar)$.

En posant $\sigma = \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}$ qui est w_0 et $\delta = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}$ qui est w'_0, on a donc :

$$\frac{\sqrt{v_n}+\sqrt{u_n}}{2} \;=\; \sigma^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}}{2} \;=\; \delta^{2^n}$$

Par somme et différence, on en déduit

$$\sqrt{v_n} \;=\; \sigma^{2^n} + \delta^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{u_n} \;=\; \sigma^{2^n} - \delta^{2^n}$$

d'où

$$\sqrt{v_n} \;=\; \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{u_n} \;=\; \left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n} + \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}\right)^{2^n}$$

8. En posant $\sigma = \dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}$ et $\delta = \dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}$, on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \sqrt{v_n} \;=\; \sigma^{2^n} + \delta^{2^n} \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \sqrt{u_n} \;=\; \sigma^{2^n} - \delta^{2^n}$$

En forçant la factorisation par σ, on a

$$\sqrt{v_n} \;=\; \sigma^{2^n}\left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad \sqrt{u_n} \;=\; \sigma^{2^n}\left(1 - \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right)$$

En appliquant le log :

$$\frac{1}{2}\ln v_n \;=\; 2^n \ln\sigma \;+\; \ln\left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right)$$

En multipliant par $\dfrac{1}{2^{n-1}}$:

$$\frac{\ln v_n}{2^n} \;=\; 2\ln\sigma \;+\; 2\frac{1}{2^n}\ln\left(1 + \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n}\right)$$

Comme $\dfrac{\delta}{\sigma} \in \left]-1,1\right[$ (cf. ci-dessous), on a $\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Justification. Montrons que $\dfrac{\delta}{\sigma} \in \left]-1,1\right[$.

Cela équivaut à

$$-1 \leqslant \frac{\delta}{\sigma} \leqslant 1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -\sigma \leqslant \delta \leqslant \sigma \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad -\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2} \;\leqslant\; \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2} \;\leqslant\; \frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{2}$$

C'est-à-dire encore

$$-(\sqrt{b}+\sqrt{a}) \;\leqslant\; \sqrt{b}-\sqrt{a} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{b}-\sqrt{a} \;\leqslant\; \sqrt{b}+\sqrt{a}$$

$$-\sqrt{b} \;\leqslant\; \sqrt{b} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{a} \;\leqslant\; \sqrt{a}$$

Ce qui est vrai !

De plus, $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par somme de limites, on a donc $\dfrac{\ln v_n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln\sigma$.

De la même façon, on a $\dfrac{\ln u_n}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln\sigma$.
D'après 3, on a

$$\frac{\pi}{2}\ln\big(\min(u_n,v_n)\big) \;\leqslant\; \underbrace{I(u_n,v_n)}_{=2^n I(a,b)} \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\ln\big(\max(u_n,v_n)\big)$$

Comme la fonction ln est croissante, on a $\ln\big(\min(u_n,v_n)\big) = \min\big(\ln u_n, \ln v_n\big)$. Idem pour le max.
En divisant par 2^n, on a

$$(\spadesuit) \qquad \frac{\pi}{2}\min\left(\frac{\ln u_n}{2^n}, \frac{\ln v_n}{2^n}\right) \;\leqslant\; I(a,b) \;\leqslant\; \frac{\pi}{2}\max\left(\frac{\ln u_n}{2^n}, \frac{\ln v_n}{2^n}\right)$$

Comme les suites $\left(\dfrac{\ln v_n}{2^n}\right)$ et $\left(\dfrac{\ln u_n}{2^n}\right)$ convergent vers $2\ln\sigma$, on en déduit que le min et le max de ces deux suites convergent également vers $2\ln\sigma$.

Remarque. Tiens, il faut savoir démontrer que

$$\begin{cases} \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \\ \alpha'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \end{cases} \qquad \Longrightarrow \quad \max(\alpha_n,\alpha'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \max(\ell,\ell')$$

Cela peut se faire en utilisant la formule $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Idem pour le min.

Ainsi, dans ($\spadesuit$), les membres gauche et droit tendent vers $\pi\ln\sigma$.
D'après le théorème des Gendarmes, on obtient que la suite constante $\big(I(a,b)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\pi\ln\sigma$.
Par unicité de la limite, on obtient $I(a,b) = \pi\ln\sigma$.
Bilan :

$$I(a,b) \;=\; \pi\ln\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)$$

1. La fonction intégrée est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale est bien définie.
2. (a) Une racine 8-ème de 16 est $\sqrt{2}$.
   Donc (WHY ?)
   $$X^8 - 16 \;=\; \prod_{\zeta\in\mathbb{U}_8} (X - \sqrt{2}\,\zeta)$$
   Or l'ensemble des racines $8^{\text{ème}}$ de l'unité est
   $$\mathbb{U}_8 \;=\; \left\{1, \omega, \mathrm{i}, \omega', -1, \overline{\omega'}, -\mathrm{i}, \overline{\omega}\right\} \qquad \text{où } \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et } \omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   D'où
   $$X^8 - 16 \;=\; \underbrace{(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})}_{X^2-2}\underbrace{(X-\sqrt{2}\mathrm{i})(X+\sqrt{2}\mathrm{i})}_{X^2+2}\underbrace{(X-\sqrt{2}\omega)(X-\sqrt{2}\overline{\omega})}_{X^2-2X+2}\underbrace{(X-\sqrt{2}\omega')(X-\sqrt{2}\overline{\omega'})}_{X^2+2X+2}$$
   Remarque. On a utilisé l'égalité très pratique suivante, où $z \in \mathbb{C}$
   $$(X-z)(X-\overline{z}) \;=\; X^2 - (z+\overline{z})X + z\overline{z} \;=\; X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)X + |z|^2$$
   On en déduit
   $$X^8 - 16 \;=\; (X^2-2)(X^2+2)(X^2-2X+2)(X^2+2X+2)$$
   Cette égalité n'est pas la factorisation en irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, puisque le polynôme $X^2 - 2$ est réductible (produit de deux polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$).

   (b) En posant la division euclidienne, on trouve
   $$X^5 + X^4 + 2X^3 - 4 \;=\; (X^2+2)(X^3+X^2-2)$$
   Le polynôme de degré 3 admet nécessairement une racine *réelle*. Trouvons-en une ! À l'œil nu, on voit que 1 est racine, donc on a une égalité du type $X^3+X^2-2 = (X-1)(X^2+\gamma X+2)$, et on trouve $\gamma = 2$.
   La factorisation en un produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ est
   $$X^5 + X^4 + 2X^3 - 4 \;=\; (X^2+2)(X-1)(X^2+2X+2)$$
3. Fixons $t \in [0,1]$. D'après ce qui précède, on a
   $$\frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16} \;=\; \frac{(t^2+2)(t-1)(t^2+2t+2)}{(t^2-2)(t^2+2)(t^2-2t+2)(t^2+2t+2)}$$
   qui après simplification vaut $\dfrac{t-1}{(t^2-2)(t^2-2t+2)}$.
   Pour conclure, il reste à voir pourquoi
   $$\frac{t-1}{(t^2-2)(t^2-2t+2)} \;=\; \frac{1}{4}\left(\frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\right).$$
   En considérant la parenthèse du membre droit et en réduisant au même dénominateur, on trouve un numérateur égal à
   $$t(t^2-2t+2) - (t-2)(t^2-2) \quad \text{qui vaut} \quad 4t-4$$
   D'où l'égalité.
4. On trouve facilement une primitive de chaque fonction intégrée. On a donc :
   $$I_1 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2-2}\mathrm{d}x \;=\; \Big[\ln|x^2-2|\Big]_0^1 \;=\; -\ln 2$$
   $$I_2 = \int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x \;=\; \Big[\ln|x^2-2x+2|\Big]_0^1 \;=\; -\ln 2$$
   $$I_3 \;=\; \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{x^2-2x+2}}_{\frac{1}{(x-1)^2+1}}\mathrm{d}x \;=\; \Big[\mathrm{Arctan}(x-1)\Big]_0^1 \;=\; \frac{\pi}{4}$$

5. On a

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \frac{t^5+t^4+2t^3-4}{t^8-16} = \frac{1}{4}\Big(\frac{t}{t^2-2} - \frac{t-2}{t^2-2t+2}\Big)$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\frac{2t}{t^2-2} - \frac{1}{2}\frac{2t-2}{t^2-2t+2} + \frac{1}{t^2-2t+2}\Big)$$

D'où
$$I = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2}I_2 + I_3\Big)$$

Comme $I_1 = I_2$, on a $I = \dfrac{1}{4}I_3$, d'où
$$I = \frac{\pi}{16}$$

Wallis, Stirling, Gauss

1) $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On a
$$\forall t \in [0, \tfrac{\pi}{2}], \quad (\cos t)^{n+1} \leq (\cos t)^n \quad \text{car } \cos t \in [0,1]$$

Par croissance de l'intégrale :
$$\int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n+1} dt \leq \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$$
$$W_{n+1} \leq W_n$$

- On a $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], (\cos t)^n \geq 0$

Par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \geq 0$
$$W_n \geq 0$$

3) Par une IPP, on trouve $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$

$\downarrow$ à faire (pas évident)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(n+1) W_{n+1} = n W_{n-1}$

Multiplions par W_n : $(n+1) W_{n+1} W_n = n W_n W_{n-1}$

Ainsi $(n W_n W_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante et égale à $\frac{\pi}{2}$

4) Sans récurrence

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Par décroissance de (W_p), on a :

$$W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$$

Multiplions par $n W_n \geqslant 0$

$$\underbrace{n W_n W_{n+1}}_{= \frac{n}{n+1} \cdot (n+1) W_{n+1} W_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2} \text{ d'après 3}} \leqslant n W_n^2 \leqslant \underbrace{n W_n W_{n-1}}_{= \frac{\pi}{2} \text{ d'après 3.}}$$

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{2} \leqslant n W_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2}}$

5) D'après 4 et le th des G, on a $n W_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$

D'où $\quad W_n^2 \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{n}$

Puis, élévation à une puissance fixe, indépendante de n

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

6a) $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}} \cdot \frac{(n-1)^{n-1/2}}{(n-1)!\, e^{n-1}}$

$= n\, e \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1/2} \frac{1}{n}$

$= e\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1/2}$

$\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) = 1 + \left(n - 1/2\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)$

$= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$= \cdots$

$= -\frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$\boxed{\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \sim -\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}}$$

6b) Si on ne sait pas faire cette question (ce qui est normal car elle est difficile), on peut répondre à une bonne partie :

Montrons simplement que (u_n) CV (ce qui ne montre pas que la limite est > 0)

- Comme (u_n) est positive, (u_n) est minorée.

- Mq (u_n) est décroissante, au moins àpcr

On a $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12}\frac{1}{n^2}$

Donc àpcr, $\ln\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right) \leqslant 0$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant 1$$

en multipliant par $u_{n-1} \geqslant 0$

Donc àpcr $u_n \leqslant u_{n-1}$

Ainsi (u_n) est décroissante àpcr

- D'après le th de la lim monotone, (u_n) CV.

À la page suivante, on montre tout directement à savoir que (u_n) CV et que la limite est > 0.

6b) Mq $(u_n)_{n\geq 1}$ CV vers $\ell > 0$

Il suffit (WHY) de mq $\left(\ln u_n\right)_{n\geq 1}$ CV

Il suffit (WHY) de mq $\left(\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)\right)_{n\geq 2}$ CV

En effet, $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right) = \ln u_n - \ln u_1$

Prouvons un lemme

Si $\begin{cases} v_k \underset{k\to+\infty}{\sim} w_k \leq 0 \\ \left(\sum_{k=1}^{n} w_k\right)_{n\geq 1} \text{ CV} \end{cases}$ alors $\left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geq 1}$ CV

Preuve du lemme

- La suite $(V_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right)_{n\geq 1}$ est décroissante àpcr

  (car $V_{n+1} - V_n = v_{n+1}$ qui est ≤ 0 àpcr par partage de signe dans les $\sim$)

- Reste à mq (V_n) est minorée.

  Comme $v_k \sim w_k$, on peut trouver une suite (α_k) tq $\begin{cases} \text{àpcr } v_k = \alpha_k w_k \\ \alpha_k \longrightarrow 1 \end{cases}$

Ainsi àpcr $\frac{1}{2} \leqslant \alpha_k \leqslant \frac{3}{2}$

Multiplions par w_k ($\leqslant 0$ àpcr)

D'où àpcr $\frac{1}{2} w_k \geqslant \underbrace{\alpha_k w_k}_{= v_k} \geqslant \frac{3}{2} w_k$

Retenons le membre droit : àpcr $\frac{3}{2} w_k \leqslant v_k$

notons n_0 ce rang

D'où par somme

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \underbrace{\frac{3}{2} \sum_{k=n_0}^{n} w_k}_{\widetilde{W}_n} \leqslant \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n} v_k}_{\widetilde{V}_n}$$

où
$$\begin{cases} \widetilde{W}_n = W_n - \sum_{k=1}^{n_0-1} w_k \\ \widetilde{V}_n = V_n - \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \end{cases}$$

Par hypothèse, (W_n) CV, d'où $(\widetilde{W}_n)$ CV aussi donc $(\widetilde{W}_n)$ est minorée.

Ainsi $(\widetilde{V}_n)$ est minorée donc (V_n) aussi.

BILAN La suite (V_n) est décroissante et minorée donc CV.

On applique ce lemme à $v_k = \ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right)$

$$w_k = -\frac{1}{12}\frac{1}{k^2}$$

On obtient que $\left(\sum_{k=2}^{n} v_k\right)$ CV

càd $(\ln u_n - \ln u_1)$ CV

d'où $(\ln u_n)$ CV

d'où (u_n) CV (car exp est continue)

6c) On a $u_n \longrightarrow \ell > 0$

Comme $\ell \neq 0$, on a $u_n \sim \ell$

d'où $\frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}} \sim \ell$

d'où $\boxed{n! \sim \ell\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}$

7) Un calcul classique (produit et télescopage)

montre que à faire

On a $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{W_{2k+2}}{W_{2k}} = \dfrac{2k+1}{2k+2}$

Par produit,

$$\underbrace{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{W_{2k+2}}{W_{2k}}}_{\frac{W_{2n}}{W_0}} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2k+2}$$

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

On a $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

$$\sim \frac{\ell\,(2n)^{2n+1/2} e^{-2n}}{\left(\ell\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\ell} \frac{4^n \sqrt{2}\, n^{2n+\frac{1}{2}}}{n^{2n+1}} \frac{e^{-2n}}{e^{-2n}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\ell} \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

D'où $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \dfrac{\sqrt{2}}{\ell} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

D'où $W_{2n} \sim \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\sqrt{2}}{\ell} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

$$\boxed{W_{2n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\ell} \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

8) D'après 5, $W_{2n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2n}}$

càd $\boxed{W_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n}}}$

D'après 7, on a $W_{2n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\ell} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Par transitivité de $\sim$, on a :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{1}{\ell} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'où, par produit en croix :

$$\ell \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$$

Mini lemme

Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ u_n \to \ell_1 \\ v_n \to \ell_2 \end{cases}$

alors $\ell_1 = \ell$

D'où (WHY) $\ell = \sqrt{2\pi}$

D'où, avec 6c), la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n}$$

que l'on peut écrire

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Intégrale de Gauss

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $t \in [0, \sqrt{n}]$

<u>Rappel</u> $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1 + x \leqslant e^x$

Appliquons cela à $x = \frac{-t^2}{n}$ (qui est bien dans $\mathbb{R}$!!!)

D'où :

$$1 - \frac{t^2}{n} \leqslant e^{-t^2/n}$$

Peut-on élever à la puissance n ?

⚠ la fct $x \longmapsto x^n$ n'est PAS croissante sur $\mathbb{R}$ seulement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

On a $1 - \frac{t^2}{n} \geqslant 0$ car $t \in [0, \sqrt{n}]$.

Par croissance de $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant e^{-t^2}$$

- Prouvons l'autre inégalité.

Toujours d'après l'inégalité de convexité de exp, on a :

$$1 + \frac{t^2}{n} \leqslant e^{\frac{t^2}{n}}$$

Par décroissance de $x \longmapsto x^{-n}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \geqslant e^{t^2}$$

D'où l'inégalité de droite.

Rmq ⚠ Si vous passez au log en écrivant

mq $n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leqslant -t^2$

il y a un léger BUG car $t \in [0, \sqrt{n}]$

donc t peut être égal à $\sqrt{n}$

donc $\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)$ n'est pas bien défini.

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Mq $\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leqslant \Phi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}\, W_{2n-2}$

On a :

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt}_{\Phi(\sqrt{n})} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right) dt$$

Il suffit de mq $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \overset{1}{\geqslant} \sqrt{n}\, W_{2n+1}$

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n dt \underset{2}{\leqslant} \sqrt{n}\, W_{2n-2}$$

- Mq l'inégalité 1. En fait, on va montrer une égalité.

Par le chg^t de variable $x \longmapsto \sqrt{n}\, x$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \sqrt{n}\, dx$$

Puis par le chg^t de variable $s \longmapsto \sin s$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a :

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 s)^n \cos s \, ds$$

$$= \sqrt{n} \underbrace{\int_0^{\pi/2} (\cos^2)^n \cos s \, ds}_{W_{2n+1}}$$

- Mq l'inégalité 2

On a de m̄ $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \int_0^1 (1+x^2)^{-n} \sqrt{n}\, dx$

Par le chg^t de var $x \longmapsto \tan x$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/4]$

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1+x^2)^{-n} \, dx = \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 x)^{-n} (1+\tan^2 x) \, dx$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} (\underbrace{1+\tan^2 x}_{\frac{1}{\cos^2 x}})^{-n+1} \, dx$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\pi/4} (\cos x)^{2n-2} \, dx$$

Or $\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\cos x)^{2n-2} \geq 0$

Par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos x)^{2n-2}\, dx \geq 0$

D'où par Charles :

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x)^{2n-2}\, dx \leq \underbrace{\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{2n-2}\, dx}_{W_{2n-2}}$$

Ainsi

$$\Phi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}\, W_{2n-2}$$

11) D'après 10,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}\, W_{2n+1} \leq \Phi(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}\, W_{2n-2}$

Or, d'après 5, on a $W_n \sim c \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ avec $c = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$

Donc $W_{2n+1} \sim c \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\sim c \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

et $W_{2n-2} \sim c \dfrac{1}{\sqrt{2n-2}}$

$\sim c \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Reprenons (*)

les membres G et D ~~sont~~ équivalents à $c \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

D'après le th des G, $\Phi(\sqrt{n}) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

càd $\boxed{\Phi(\sqrt{n}) \longrightarrow \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Attention à ne pas en déduire $\Phi(x) \xrightarrow[+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

La fonction Φ est croissante (en effet, Φ est déri et $\Phi' : x \longmapsto e^{-x^2} \geqslant 0$)

D'après le th de la lim monotone, Φ admet une limite en $+\infty$.

Comme $\Phi(\sqrt{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, cette limite est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

càd $\underset{\Sigma}{\Phi(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$