Équations différentielles

exercices

101 Faire ses gammes (1)

Résoudre les équations différentielles suivantes sur des intervalles sur lesquels la fonction en facteur de y' ne s'annule pas :

1. $(x\ln x)\,y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$
3. $(1-x)y' + y = \dfrac{x-1}{x}$
4. $y' + y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$
5. $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$
6. $2xy' + y = x^n$, où n est un entier.

102 Faire ses gammes (2)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(i) $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$

(ii) $y'' + y' = 3 + 2x$

(iii) $y'' + 4y = 4 + 2x - 8x^2 - 4x^3$

(iv) $y'' + 4y' + 4y = (16x^2 + 16x - 14)\mathrm{e}^{2x}$

(v) $y'' - 3y' + 2y = (-3x^2 + 10x - 7)\mathrm{e}^x$

(vi) $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{ch}\,2x$

(vii) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^x$

(viii) $y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}$

(ix) $y'' + 2y' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$

(x) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$

103 Astucieux !

Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation différentielle $(t^2+3t+2)y' + (2t+3)y = \dfrac{1}{1+t^2}$.

104 Équation fonctionnelle (1)

Trouver toutes les fonctions f non nulles et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\star) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

Parmi ces foctions, déterminer celles qui sont à valeurs réelles.

105 Équation fonctionnelle (2)

Trouver toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(\star) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

106 Champ magnétique

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme $\begin{cases} x'' = \ \ \omega\, y' \\ y'' = -\omega\, x' \\ z'' = \ \ 0 \end{cases}$

où ω est une constante dépendant de la masse et de la charge de la particule ainsi que du champ magnétique. En utilisant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

107 Par analyse synthèse

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. On cherche l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant

   $$(E) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

   Montrer qu'il existe une unique fonction solution.
2. Déterminer la fonction f dans le cas où $\varphi = \cos$.

108 Avec un gros second membre

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f''-2f'+5f \end{array}$

Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.
Résoudre

$$y''-2y'+5y \;=\; -4\mathrm{e}^{-x}\cos x+7\mathrm{e}^{-x}\sin x-4\mathrm{e}^{x}\sin 2x$$

109 Second ordre à coeffs non constants (1)

On souhaite résoudre sur $I=\,]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$(H) \qquad y''+\frac{1}{x^2}y=0$$

Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. On considère $z : t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$ définie sur $J=\mathbb{R}$.
Montrer que y est solution de (H) sur I, si et seulement si, z est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants (E) sur J que l'on déterminera.
Conclure.

110 Second ordre à coeffs non constants (2)

On considère l'équation :

$$(E) \qquad xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$$

Résoudre cette équation sur $]0,+\infty[$ en considérant la fonction $z : x \mapsto xy(x)$.

111 Second ordre à coeffs non constants (3)

On considère l'équation :

$$(E) \qquad (1-x^2)y''-xy'+y=0$$

Résoudre cette équation sur $I=\,]-1,1[$ en considérant $z : t \mapsto y(\sin t)$.

112 Second ordre à coeffs non constants (4)

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^2$. Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad ax^2y''+bxy'+cy=0$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $I=\mathbb{R}_+^*$.
   Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si la fonction $z : t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$ est solution d'une équation du second ordre à coefficients constants que l'on donnera.
2. Quelle est la forme des solutions de (E) sur $I=\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_-^*$?
3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ l'équation :

$$x^2y''-xy'+y=0$$

113 Second ordre avec terme manquant

Résoudre l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :

$$(E) \qquad (1+x)^2y'' \;+\; (1+x)y' \;=\; 2$$

Question difficile de « recollement » : quelles sont les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

114 Une équation fonctionnelle

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et f une fonction réelle dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\star) \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}, \quad f'(x)=f(\lambda-x).$$

1. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions réelles vérifiant $(\star)$.

115 Solution 1-périodique

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et 1-périodiques.
Déterminer les solutions 1-périodiques de (E) : $\quad y' + a(x)y = b(x)$.

116 Un exercice retord (qui occupe une heure de colle, dixit ED !)

Soit f une fonction dérivable sur $I =]0, +\infty[$ vérifiant :

$$(\star) \qquad \forall\, x \in I, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que la fonction f est deux fois dérivable sur I.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions vérifiant $(\star)$.

On sera peut-être amené à utiliser l'exercice précédent.

117 Une preuve du cours

Soit b et c deux scalaires et $d : I \to \mathbb{K}$ continue.
Considérons l'équation :

$$(E) \qquad y'' + by' + cy = d(x)$$

et r une racine de l'équation caractéristique.

1. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Considérons la fonction $\lambda : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-rx} f(x). \end{array}$
   Montrer que la fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction λ' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 que l'on déterminera.
2. En déduire que l'équation (E) admet des solutions.

Équations différentielles

corrigés

1. On se place sur l'intervalle $I =]0,1[$ ou sur $I =]1,+\infty[$. Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit :
$$y' - \frac{1}{x\ln x}y = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln x}.$$
Comme
$$\forall x \in I \frac{1}{x\ln x} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)},$$
une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \ln x$.
On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)\ln x$ avec λ une fonction dérivable sur I. On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$.
On remarque que :
$$\forall x \in I \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$
où u est la fonction $x \mapsto x\ln x$.
Par conséquent, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$.
Les solutions sur I sont donc les fonctions
$$x \longmapsto \frac{1}{x} + \lambda \ln x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$
On aurait, bien sûr, pu remarquer que la fonction $x \mapsto 1/x$ était une solution particulière.
2. On se place sur l'intervalle $I =]-1,+\infty[$. Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit :
$$y' + \frac{1}{1+x}y = \frac{1+\ln(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$
Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est une solution particulière. Les solutions sur I sont donc les fonctions :
$$x \mapsto \ln(1+x) + \frac{\lambda}{1+x} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$
3. On se place sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_-^*$, sur $I =]0,1[$ ou sur $I =]1,+\infty[$. Sur l'intervalle I, l'équation différentielle se réécrit :
$$y' + \frac{1}{1-x}y = -\frac{1}{x}.$$
Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto x-1$. On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)(x-1)$ avec λ une fonction dérivable sur I. On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$.
On écrit :
$$\forall x \in I \frac{1}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}.$$
Par suite, une solution particulière sur I est donnée par :
$$x \mapsto (x-1)\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|.$$
Les solutions sur I sont donc les fonctions :
$$x \mapsto \left(\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \lambda\right)(x-1) \text{avec } \lambda \in \mathbb{K}$$
4. Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto e^{-x}$. On cherche une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$ avec λ une fonction dérivable sur I. On est alors ramené à trouver une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
On remarque que :
$$\forall x \in I \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
où u est la fonction $x \mapsto 1+e^x$. Par conséquent, une primitive sur I de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$ est donnée par $x \mapsto \ln(1+e^x)$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $x \mapsto e^{-x}\ln(1+e^x) + \lambda e^{-x}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
5. On se place sur un intervalle $I_n =]n\pi,(n+1)\pi[$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Une solution de l'équation homogène est la fonction $x \mapsto \sin x$. On remarque d'autre part que la fonction $x \mapsto \cos x$ est une solution particulière de l'équation. Les solutions sur I_n sont donc les fonctions $x \mapsto \cos x + \lambda \sin x$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

6. On se place sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $I = \mathbb{R}_-^*$. Une solution de l'équation homogène est donc la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\cdot$

   En cherchant une solution particulière sous la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda(x)}{\sqrt{|x|}}$ avec λ une fonction dérivable sur I, on obtient la solution $x \mapsto \dfrac{x^n}{2n+1}\cdot$ Les solutions sur I sont donc les fonctions :

$$x \mapsto \frac{x^n}{2n+1} + \frac{\lambda}{\sqrt{|x|}} \text{avec} \lambda \in \mathbb{K}.$$

1. L'équation caractéristique est $r^2+r-6=0$ qui a deux racines 2 et -3 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto \lambda_1 e^{2x}+\lambda_2 e^{-3x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière polynomiale et on trouve $x\mapsto 2+3x+5x^2$ donc les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto 2+3x+5x^2+\lambda_1 e^{2x}+\lambda_2 e^{-3x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

2. L'équation caractéristique est $r^2+r=0$ qui a deux racines 0 et -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto \lambda_1+\lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière polynomiale et l'on trouve $x\mapsto x+x^2+5x^2$ donc les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto x+x^2+\lambda_1+\lambda_2 e^{-x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

3. L'équation caractéristique est $r^2+4=0$ qui a deux racines $2i$ et $-2i$ donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x)$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$.
On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3. On trouve la fonction $x\mapsto 2+2x-2x^2-x^3$. Les solutions réelles sont donc les fonctions :
$$x\mapsto 2+2x-2x^2-x^3+\lambda_1\cos(2x)+\lambda_2\sin(2x) \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

4. L'équation caractéristique est $r^2+4r+4=0$ qui a une racine double -2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto\lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 x e^{-2x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $f : x\mapsto P(x)e^{2x}$ avec P polynomial. On a alors :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} f''(x)+4f'(x)+4f(x)=\big(P''(x)+8P'(x)+16P(x)\big)\,e^{2x}$$
Comme on veut avoir :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} P''(x)+8P'(x)+16P(x)=16x^2+16x-14,$$
on cherche une solution de degré deux sous la forme $P : x\mapsto ax^2+bx+c$. On obtient :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} P''(x)+8P'(x)+16P(x)=16a\,x^2+(16b+16a)\,x+16c+8b+2a,$$
donc $P : x\mapsto x^2-1$ est solution. Les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto (x^2-1)e^{2x}+\lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 x e^{-2x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

5. L'équation caractéristique est $r^2-3r+2=0$ qui a deux racines 1 et 2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto\lambda_1 e^{x}+\lambda_2 e^{2x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $f : x\mapsto P(x)e^{x}$ avec P polynomial. On a alors :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} f''(x)-3f'(x)+2f(x)=\big(P''(x)-P'(x)\big)\,e^{x}$$
Comme on veut avoir :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} P''(x)-P'(x)=-3x^2+10x-7,$$
on cherche une solution de degré 3 sous la forme $P : x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$. On obtient :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} P''(x)-P'(x)=-3a\,x^2+(6a-2b)\,x+2b-c,$$
donc $P : x\mapsto x^3-2x^2+3x$ est solution. Les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto (x^3-2x^2+3x)e^{x}+\lambda_1 e^{x}+\lambda_2 e^{2x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

6. L'équation caractéristique est $r^2-4r+4=0$ qui a une racine double 2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto\lambda_1 e^{2x}+\lambda_2 x e^{2x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière de $y''-4y'+4y=\dfrac{x}{2}e^{2x}$ sous la forme $f : x\mapsto P(x)e^{2x}$ avec P polynomial. On a alors :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} f''(x)-4f'(x)+4f(x)=P''(x)e^{2x}$$
Comme on veut avoir :
$$\forall\, x\in\mathbb{R} P''(x)=x/2,$$
il suffit de prendre $P : x\mapsto x^3/12$. On trouve de même qu'une solution de $y''-4y'+4y=\dfrac{x}{2}e^{-2x}$ est $x\mapsto\dfrac{xe^{-2x}}{32}+\dfrac{e^{-2x}}{64}$ puis l'on applique le principe de superposition des solutions. Les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto\frac{x^3e^{2x}}{12}+\frac{xe^{-2x}}{32}+\frac{e^{-2x}}{64}+(\lambda_1+\lambda_2 x)\,e^{2x} \text{ avec } (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

7. L'équation caractéristique est $r^2+3r+2=0$ qui a deux racines -2 et -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto \lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $x\mapsto Ce^x$ et l'on trouve $x\mapsto \dfrac{1}{6}e^x$ donc les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto \frac{1}{6}e^x+\lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 e^{-x}\text{avec }(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$
8. L'équation caractéristique est $r^2+3r+2=0$ qui a deux racines -2 et -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto \lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $x\mapsto Cxe^{-x}$ et l'on trouve $x\mapsto xe^{-x}$ donc les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto xe^{-x}+\lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 e^{-x}\text{avec }(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$
9. L'équation caractéristique est $r^2+2r+1=0$ qui une racine double -1 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto \lambda_1 e^{-x}+\lambda_2 xe^{-x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière sous la forme $x\mapsto Cx^2e^{-x}$ et l'on trouve $x\mapsto x^2e^{-x}$ donc les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto x^2e^{-x}+\lambda_1 e^{-x}+\lambda_2 xe^{-x}\text{avec }(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$
10. L'équation caractéristique est $r^2+r-2=0$ dont les racines sont 1 et -2 donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x\mapsto \lambda_1 e^{-2x}+\lambda_2 e^{-x}$ avec $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$. On cherche une solution particulière de l'équation sous la forme $x\mapsto \lambda\sin(2x)+\mu\cos(2x)$ et l'on trouve $x\mapsto -\dfrac{6}{5}\sin 2x-\dfrac{2}{5}\cos 2x$ donc les solutions sont les fonctions :
$$x\mapsto \lambda_1 e^{x}+\lambda_2 e^{-2x}-\frac{6}{5}\sin 2x-\frac{2}{5}\cos 2x\text{avec }(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2.$$

Raisonnons par analyse synthèse.

— **Analyse.** Soit f une fonction non nulle deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $(\star)$.
On a alors $f(0) = f(0)^2$.
  — Si $f(0) = 0$, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2f(x) = 2f(0)f(x) = 0$$
  donc f est la fonction nulle ce qui est exclu.
  — Donc $f(0) = 1$. Ainsi,
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) + f(-y) = 2f(y)$$
  c'est-à-dire que la fonction f est paire.
  — En fixant y et en dérivant par rapport à x, on obtient :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f'(x + y) + f'(x - y) = 2f'(x)f(y)$$
  puis en redérivant, on a :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x + y) + f''(x - y) = 2f''(x)f(y). \tag{1}$$
  — En fixant x et en dérivant deux fois par rapport à y, on obtient :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x + y) + f''(x - y) = 2f(x)f''(y). \tag{2}$$
  — Des relations (1) et (2), on obtient :
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$$
  En particulier, en prenant $y = 0$, comme $f(0) = 1$, on en déduit que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f''(0)f(x).$$

Bilan intermédiaire. $\begin{cases} f \text{ est solution de l'équation différentielle } y'' - ay = 0 \text{ avec } a = f''(0) \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \quad \text{car } f' \text{ est impaire} \end{cases}$

  — **Résolution de l'équa diff.** $y'' - ay = 0$
  Ici $a \in \mathbb{C}$. Il y a deux cas en fonction de la nullité du discriminant du polynôme $X^2 - a$.
    — Cas $\Delta \neq 0$, alors il y a deux racines distinctes : si l'on note l'une d'entre elle ω, l'autre est $-\omega$.
    Alors $\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{\omega x},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-\omega x})$.
    — Cas $\Delta = 0$, alors $a = 0$, donc l'équation différentielle est $y'' = 0$. On sait que l'on doit trouver les fonctions affines. En appliquant le théorème, et en posant $\omega = 0$ la racine double, on trouve que
$$\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{\omega x},\ x \mapsto x\mathrm{e}^{\omega x}) \quad \text{qui vaut (car } \omega = 0\text{)} \quad \mathrm{Vect}(x \mapsto 1,\ x \mapsto x)$$
    et l'on trouve bien l'ensemble des fonctions affines !
  — **Résolution du problème de Cauchy** $\begin{cases} y'' - ay = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$
  Dans le cas où $\Delta \neq 0$, on trouve que f vaut $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2}$.
  Dans le cas où $\Delta = 0$, on trouve que f vaut $f : x \mapsto 1$. Comme ici $\omega = 0$, la fonction f s'écrit aussi $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2}$.

— **Synthèse.** Soit f de la forme $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2}$ avec $\omega \in \mathbb{C}$.
Alors f est non nulle (car $f(0) = 1$), f est deux fois dérivable et f vérifie $(*)$.

Bilan de l'analyse-synthèse. L'ensemble des solutions à valeurs complexes est
$$\left\{x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2}, \quad \omega \in \mathbb{C}\right\}$$

Solutions à valeurs réelles.

Soit $\omega \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $\omega = a + \mathrm{i}b$.
Déterminons une CNS sur a et b pour que $f_\omega : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\omega x} + \mathrm{e}^{-\omega x}}{2}$ soit à valeurs réelles.
On a

$$\begin{aligned} f_\omega \text{ est à valeurs réelles} \quad &\iff \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{ax} \sin(bx) - \mathrm{e}^{-ax} \sin(bx) = 0 \\ &\iff \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \sin(bx) 2 \,\mathrm{sh}(ax) = 0 \\ &\iff \quad b = 0 \quad \text{ ou } \quad (b \neq 0 \text{ et } a = 0) \end{aligned}$$

Pour assurer la dernière équivalence, on pourra penser à prendre le réel $\frac{\pi}{2b}$ lorsque $b \neq 0$.

Bilan. L'ensemble des solutions à valeurs réelles est

$$\Big\{ x \mapsto \cos \omega x, \ x \mapsto \mathrm{ch}\, \omega x \Big\}_{\omega \in \mathbb{R}}$$

106

Les solutions de l'équation $z''=0$ sont les fonctions affines (on peut ou bien se rappeler d'un résultat du chapitre Dérivation, ou bien appliquer le cours sur les EDL d'ordre 2).

Soit x, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions deux fois dérivables.
Notons f la fonction $x + \mathrm{i}y$, ainsi que $u = f' = x' + \mathrm{i}y'$.
On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x'' = \omega\, y' \\ y'' = -\omega\, x' \end{cases} \quad & \iff \quad x'' + \mathrm{i}y'' = -i\omega(x' + \mathrm{i}y') \\
& \iff \quad f'' = -\mathrm{i}\omega f' \\
& \iff \quad u' + \mathrm{i}\omega u = 0 \\
& \iff \quad u \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(t \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}) \\
& \iff \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ \ u : t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\
& \iff \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \ u : t \mapsto (\alpha + \mathrm{i}\beta)\big(\cos(\omega t) - \mathrm{i}\sin(\omega t)\big) \\
& \iff \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x' : t \mapsto \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) \\ y' : t \mapsto -\alpha\sin(\omega t) + \beta\cos(\omega t) \end{cases} \\
& \iff \quad \exists\, \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x : t \mapsto \dfrac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t) - \dfrac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) + a \\ y : t \mapsto \dfrac{\alpha}{\omega}\cos(\omega t) + \dfrac{\beta}{\omega}\sin(\omega t) + b \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{cases} x'' = \omega\, y' \\ y'' = -\omega\, x' \\ z'' = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \exists\, \alpha, \beta, a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x : t \mapsto \dfrac{\alpha}{\omega}\sin(\omega t) - \dfrac{\beta}{\omega}\cos(\omega t) + a \\ y : t \mapsto \dfrac{\alpha}{\omega}\cos(\omega t) + \dfrac{\beta}{\omega}\sin(\omega t) + b \\ z : t \mapsto ct + d \end{cases}$$

1. Raisonnons par analyse-synthèse.

   Analyse.

   Soit f une fonction continue vérifiant (E). On a alors

   $$f : x \longmapsto x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x)$$

   En tant que somme de trois fonctions dérivables (théorème fondamental de l'Analyse et régularité de φ), la fonction f est dérivable et on a

   $$f' : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) + \varphi'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi'(x)$$

   Cette fonction est dérivable (toujours théorème fondamental de l'Analyse et régularité de φ) :

   $$f'' : x \longmapsto f(x) + \varphi''(x).$$

   Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = \varphi''$.
   De plus, $f(0) = \varphi(0)$ et $f'(0) = \varphi'(0)$.
   Ainsi, f est solution du problème de Cauchy

   $$\begin{cases} y'' - y = \varphi'' \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$$

   Synthèse. Soit f l'unique solution du problème de Cauchy

   $$\begin{cases} y'' - y = \varphi'' \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$$

   Comme f est solution de ce problème de Cauchy, f est deux fois dérivable, et la phase d'Analyse montre que $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t + \varphi(x)$ satisfait ce même problème de Cauchy (en effet, f étant deux fois dérivable, on peut reprendre les calculs de l'Analyse).
   Par unicité des solutions à un problème de Cauchy, on a $f = h$.

   Bilan. Il existe une unique solution à ce problème, à savoir l'unique fonction au problème de Cauchy

   $$\begin{cases} y'' - y = \varphi'' \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}$$

2. D'après la question précédente, il s'agit de résoudre le problème de Cauchy

   $$\begin{cases} y'' - y = -\cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

   Étudions l'équation différentielle $y'' - y = -\cos x$.
   L'ensemble des solutions de l'équation homogène est :

   $$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$$

   Une solution particulière est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\cos x$. D'où

   $$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\cos x \mid \lambda, \mu \in \mathbb{K} \right\}$$

   Pour déterminer l'unique solution du problème de Cauchy, on cherche λ, μ vérifiant les conditions initiales. On trouve que

   $$x \longmapsto \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} x + \cos x).$$

   est l'unique solution du problème de Cauchy.

108

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$ dont les solutions sont $1 - 2i$ et $1 + 2i$ donc les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto (\lambda_1 \cos(2x) + \lambda_2 \sin(2x))\, e^{-x}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.
On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{-x} \cos x + 7e^{-x} \sin x$$

sous la forme $x \mapsto \alpha e^{-x} \sin x + \beta e^{-x} \cos x$ et on trouve la fonction $f_1 : x \mapsto e^{-x} \sin x$. On cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 5y = -4e^{(1+2i)x}$$

sous la forme $x \mapsto P(x)e^{(1+2i)x}$ et on trouve $x \mapsto -ixe^{(1+2i)x}$. Ainsi, $f_2 : x \mapsto xe^x \cos 2x$ est solution de $y'' - 2y' + 5y = -4e^x \sin(2x)$ puis les solutions sont les fonctions :

$$x \mapsto f_1(x) + f_2(x) + \lambda_1 e^x \cos(2x) + \lambda_2 e^x \sin(2x) \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

109

Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable sur $I =]0, +\infty[$.

Posons $z : \begin{array}{rcl} J = \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & y(\mathrm{e}^t) \end{array}$.

La fonction z est deux fois dérivable sur J, par composition.

Renversons la vapeur ! La fonction y s'exprime en fonction de z via $y : x \mapsto z(\ln x)$.

Et on a

$$\begin{cases} y' : x \longmapsto \dfrac{1}{x} z'(\ln x) \\ y'' : x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2} z'(\ln x) + \dfrac{1}{x^2} z''(\ln x) \end{cases}$$

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad & \iff \quad \forall\, x \in I,\ y''(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = 0 \\
& \iff \quad \forall\, x \in I,\ \left(\frac{1}{x^2} z''(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'(\ln x) \right) + \frac{1}{x^2} z(\ln x) \ = \ 0 \\
& \iff \quad \forall\, x \in I,\ z''(\ln x) - z'(\ln x) + z(\ln x) = 0 \\
& \iff \quad \forall\, t \in J,\ z''(t) - z'(t) + z(t) = 0 \qquad \text{car ln est une surjection de } I \text{ sur } J \\
& \iff \quad z \in \mathrm{Vect}\left(t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{2} t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right),\ t \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{2} t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right) \\
& \iff \quad y \in \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right),\ x \mapsto \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)
\end{aligned}$$

BILAN. L'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} \ = \ \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \sqrt{x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right),\ x \mapsto \sqrt{x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x \right) \right)$$

110

On pose $I = \mathbb{R}_+^*$.
Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable.
Posons $z : x \mapsto xy(x)$ qui est définie sur I et deux fois dérivable.
Renversons la vapeur ! On a $y : x \mapsto \dfrac{1}{x} z(x)$.
On a

$$y' : x \mapsto \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2} \qquad \text{et} \qquad y'' : x \mapsto \frac{1}{x} z''(x) - 2\frac{1}{x^2} z'(x) + 2\frac{1}{x^3} z(x)$$

On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\iff \quad \forall\, x \in I,\ xy''(x) + 2(x+1)y'(x) + (x+2)y(x) = 0 \\
&\iff \quad \forall\, x \in I,\ z''(x) + 2z'(x) + z(x) = 0 \\
&\iff \quad z \in \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{-x},\ x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}) \\
&\iff \quad y \in \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\Big)
\end{aligned}$$

BILAN. L'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} \;=\; \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x},\ x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\Big)$$

111

On note $I =]-1,1[$.
Soit $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable sur I, quelconque pour l'instant.
Posons $z : \begin{array}{ccc} J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & y(\sin t) \end{array}$.
Cette fonction $z : J \to \mathbb{K}$ est deux fois dérivable sur J, par composition.
Renversons la vapeur ! La fonction y s'exprime en fonction de z via $y : x \mapsto z(\operatorname{Arcsin} x)$.
Et on a

$$\begin{cases} y' : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) \\ y'' : x \longmapsto \dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) + \dfrac{1}{1-x^2} z''(\operatorname{Arcsin} x) \end{cases}$$

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) &\iff \forall x \in I,\ (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I,\ z''(\operatorname{Arcsin} x) + \frac{x}{(1-x^2)^{1/2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} z'(\operatorname{Arcsin} x) + z(\operatorname{Arcsin} x) = 0 \\ &\iff \forall x \in I,\ z''(\operatorname{Arcsin} x) + z(\operatorname{Arcsin} x) = 0 \\ &\iff \forall t \in J,\ z''(t) + z(t) = 0 \qquad \text{car Arcsin est une surjection de } I \text{ sur } J \\ &\iff z \in \operatorname{Vect}(t \mapsto \cos t,\ t \mapsto \sin t) \\ &\iff y \in \operatorname{Vect}\Big(x \mapsto \underbrace{\cos(\operatorname{Arcsin} x)}_{\sqrt{1-x^2}},\ x \mapsto \underbrace{\sin(\operatorname{Arcsin} x)}_{x}\Big) \end{aligned}$$

BILAN. L'ensemble des solutions de (E) est

$$\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\Big(x \mapsto \sqrt{1-x^2},\ x \mapsto x\Big)$$

1. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I.
   On définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par $z : t \mapsto y(e^t)$. On a alors :
   $$\forall\, x \in I y(x) = z\,(\ln x)\,.$$
   La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :
   $$\forall\, x \in I y'(x) = \frac{1}{x} z'\,(\ln x) \;\text{ et }\; y''(x) = \frac{1}{x^2} z''\,(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'\,(\ln x)\,.$$
   Ainsi, la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur I si et seulement si la fonction z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation du second ordre à coefficients constants :
   $$az'' + (b-a)z' + cz = 0. \tag{E'}$$
2. On en déduit, suivant les racines de l'équation caractéristique de (E'), la forme des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ et donc de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, les solutions de (E) sur I sont les fonctions :
     $$x \mapsto \lambda_1 x^{r_1} + \lambda_2 x^{r_2} \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$
   - Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, les solutions de (E) sur I sont les fonctions :
     $$x \mapsto \lambda_1 x^{r_0} + \lambda_2 x^{r_0} \ln x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$
   - Si l'équation admet deux racines complexes non réelles conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, alors les solutions de (E) sur I sont les fonctions :
     $$x \mapsto \lambda_1 x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) + \lambda_2 x^{\alpha} \sin(\beta \ln x) \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

   Pour trouver les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E), on remarque que la fonction y est solution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ si et seulement si la fonction $z : x \mapsto y(-x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation (E).
3. On applique ce qui précède. Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions :
   $$x \mapsto \lambda_1 x + \lambda_2 x \ln x \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$
   Les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions :
   $$x \mapsto \lambda_1 x + \lambda_2 x \ln(-x) \text{ avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2.$$

113

On se place sur un intervalle I ne contenant pas -1, c'est-à-dire $I =]-\infty, -1[$ ou $I =]-1, +\infty[$.
On va essayer de traiter le problème de la manière la plus homogène/uniforme possible pour que l'on puisse passer d'un intervalle à un autre sans trop de modification.
Soit $y : I \to \mathbb{K}$ une fonction deux fois dérivable.
On a l'équivalence

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff y' \text{ solution de } (E') \text{ sur } I$$

où (E') est l'équation $z' + \dfrac{1}{1+x} z \;=\; \dfrac{2}{(1+x)^2}$.

Résolution de (E')**.**
Une primitive de $a : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est $A : x \mapsto \ln|1+x|$.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène (E'_H) est

$$\mathcal{S}'_H \;=\; \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \frac{1}{|1+x|}\Big)$$

qui est encore égal à (WHY)

$$\mathcal{S}'_H \;=\; \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \frac{1}{1+x}\Big)$$

Remarque générale.
Sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, on a $\mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \dfrac{1}{|x|}\Big) = \mathrm{Vect}\Big(x \mapsto \dfrac{1}{x}\Big)$.

Mais il n'est pas vrai que sur $\mathbb{R}$, on a $\cancel{\mathrm{Vect}(x \mapsto |x|) = \mathrm{Vect}(x \mapsto x)}$.

Par la méthode de variation de la constante, on trouve qu'une solution particulière de (E') est

$$f_P : x \longmapsto 2\frac{\ln|1+x|}{1+x}$$

Attention. Je ne donne pas tous les détails, mais il y a une petite subtilité (merci à Martin Mancheron, promo 2024).
En cherchant une solution particulière de la forme $f_P : x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec λ dérivable, on tombe sur le fait que λ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{|1+x|}$.
Attention, λ n'est pas du type $2\ln|1+x|$. Cela dépend de l'intervalle.
On peut prendre $\lambda : x \mapsto 2\ln|1+x|$ sur $]-1, +\infty[$ et $\lambda : x \mapsto -2\ln|1+x|$ sur $]-\infty, -1[$.
On revient ensuite à f_P qui vaut $x \mapsto \lambda(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ et on trouve

$$f_P : x \mapsto \begin{cases} 2\ln|1+x|\dfrac{1}{|1+x|} & \text{si } x \in]-1, +\infty[\\ -2\ln|1+x|\dfrac{1}{|1+x|} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\end{cases}$$

D'où une solution uniforme (qui ne dépend pas de l'intervalle) :

$$f_P : x \;\longmapsto\; 2\ln|1+x|\frac{1}{1+x}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E') est $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'_H + f_P$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{S}' \;=\; \Big\{x \;\longmapsto\; \alpha\frac{1}{1+x} + \frac{2\ln|1+x|}{1+x},\ \alpha \in \mathbb{K}\Big\}$$

Revenons à l'équation initiale. Il faut maintenant revenir à l'équation (E), en exploitant l'équivalence

$$y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \iff y' \text{ solution de } (E') \text{ sur } I$$

Bilan. L'ensemble des solutions de (E) sur I (intervalle qui ne contient pas -1) est :

$$\mathcal{S} \;=\; \Big\{x \;\longmapsto\; \alpha\ln|1+x| \;+\; \big(\ln|1+x|\big)^2 \;+\; \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}\Big\}$$

1. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(\lambda - x)$ l'est aussi, par composition. Ainsi, la relation $(\star)$ implique que f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable.
2. Raisonnons par analyse synthèse :
   — Soit f une fonction vérifiant $(\star)$.
   D'après la première question, f est deux fois dérivable, et on a :
   $$f'' : x \longmapsto -f'(\lambda - x)$$
   Comme f est solution de $(\star)$, on a donc $f'' = -f$.
   Ainsi, f est solution de l'équation $y'' + y = 0$.
   Il existe donc des réels A et ϕ tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = A\cos(x + \phi).$$
   Si $A \neq 0$, alors la condition $(*)$ donne :
   $$\forall x \in \mathbb{R} - \sin(x + \phi) = \cos(\lambda - x + \phi)$$
   soit :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \cos(x + \phi + \pi/2) = \cos(\lambda - x + \phi).$$
   Par suite, on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} x + \phi + \pi/2 \equiv \lambda - x + \phi \, [2\pi] \\ \text{ou} \\ x + \phi + \pi/2 \equiv -(\lambda - x + \phi) \, [2\pi] \end{cases}$$
   c'est-à-dire
   $$\forall x \in \mathbb{R} \begin{cases} 2x \equiv \lambda - \pi/2 \, [2\pi] \\ \text{ou} \\ 2\phi \equiv -\lambda - \pi/2 \, [2\pi]. \end{cases}$$
   En prenant x tel que $2x \not\equiv \lambda - \pi/2 \, [2\pi]$, on a donc :
   $$\phi \equiv -\frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} \, [\pi].$$
   Par suite, il existe un entier k tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = A\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$
   Si k est pair alors :
   $$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = A\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$
   sinon :
   $$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = -A\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$
   Dans tous les cas, il existe un réel C telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} f(x) = C\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$
   — Réciproquement, les fonctions $x \mapsto C\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ avec $C \in \mathbb{R}$ vérifient $(*)$ car :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \cos\left(\lambda - x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

   Les solutions sont donc les fonctions :
   $$x \mapsto C\cos\left(x - \frac{\lambda}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{C}.$$

115

1.

$$S(H) = \mathrm{Vect} e^{A}$$

La variation de la constante implique que

Détermination des solutions 1-périodiques de (E)

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$y_\lambda(x+1) - y_\lambda(x) = e^{A(x+1)}\big(\lambda + \int_0^{x+1} be^{-A}\big) - e^{A(x)}\big(\lambda + \int_0^x be^{-A}\big).$$

— D'après la relation de Chasles :

$$A(x+1) = \int_0^{x+1} a = \int_0^x a + \int_x^{x+1} a = \int_0^x a + \int_0^1 a,$$

car a est 1-périodique donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_x^{x+1} a = \int_0^1 a =: \alpha$$

Ainsi, $\boxed{A(x+1) = A(x) + \alpha}$.

— D'après la relation de Chasles :

$$d$$

— Ainsi :

$$\begin{aligned} y_\lambda(x+1) - y_\lambda(x) &= e^{A(x)} e^{\alpha}\big(\lambda + \underline{+} e^{-\alpha} \int_0^x be^{-A}\big) - e^{A(x)}\big(\lambda + \int_0^x be^{-A}\big) \\ &= e^{A(x)}\big(\lambda e^{\alpha} + \underline{e}^{\alpha} + \int_0^x be^{-A}\big) - e^{A(x)}\big(\lambda + \int_0^x be^{-A}\big) \\ &= e^{A(x)}\big(\lambda(e^{\alpha} - 1) + \underline{e}^{\alpha}\big). \end{aligned}$$

Comme $x \mapsto e^{A(x)}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$,

$$y_\lambda \text{ est 1-périodique} \iff \lambda(e^{\alpha} - 1) + \beta e^{\alpha} = 0.$$

— $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0, \text{ alors l'unique solution 1-périodique de } (E) \text{ est } y_{\lambda_0} \text{ où } \lambda_0 = \frac{\beta e^{\alpha}}{1 - e^{\alpha}}}$.

— Si $\alpha = 0$, alors y_λ est 1-périodique $\iff \beta e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ donc :

  — Si $\beta = 0$, toutes les solutions de (E) sont 1-périodiques

  — Si $\beta \neq 0$, il n'y a aucune solution de (E) 1-périodique

1. La fonction f étant dérivable sur I, la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est aussi, par composition.
   Ainsi, la relation $(\star)$ implique que f' est dérivable, donc f est deux fois dérivable.
2. Raisonnons par analyse synthèse :

Analyse. Soit f une fonction vérifiant $(\star)$.
D'après la première question, f est deux fois dérivable, et on a :

$$f''(x) : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}f(x).$$

Comme f est solution de $(\star)$, on obtient que f est solution de l'équation différentielle $y''+\frac{1}{x^2}y=0$.
D'après l'exercice 109, on obtient :

$$f \in \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right),\ x \mapsto \sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$f : x \longmapsto \lambda\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \mu\sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

Exploitons que f est solution de $(\star)$ pour obtenir d'éventuelles conditions sur λ et μ.
On a

$$\begin{aligned} f' : x \longmapsto\ & \lambda\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sqrt{x}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}\frac{1}{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] \\ & + \\ & \mu\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sqrt{x}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] \\ & = \left(\tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) \ + \ \left(\tfrac{-\sqrt{3}}{2}\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\right)\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) \end{aligned}$$

et d'autre part, en utilisant le fait que $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ et la parité des fonctions trigonométriques, on a :

$$\forall x \in I, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \lambda\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + (-\mu)\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

Comme f vérifie $(\star)$, on a

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

En notant

$$\alpha = \frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu$$

et

$$C : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) \qquad \text{et} \qquad S : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$$

l'égalité $(\star)$ s'écrit

$$\forall x \in I, \quad \alpha C(x) + \beta S(x) = \lambda C(x) + (-\mu)S(x)$$

Comme la famille de fonctions (C, S) est libre (preuve à venir, ou plutôt à faire par vos soins), on en déduit

$$\alpha = \lambda \qquad \text{et} \qquad \beta = -\mu$$

D'où en utilisant les définitions de α et β :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda & + & \frac{\sqrt{3}}{2}\mu & = & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda & + & \frac{3}{2}\mu & = & 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $-\lambda + \sqrt{3}\,\mu = 0$.
Ainsi, si f est solution, f est de la forme

$$f : x \longmapsto \mu\left[\sqrt{3}\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}$$

ou encore de la forme

$$f : x \longmapsto \mu\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{avec } \mu \in \mathbb{R}$$

Synthèse. Soit f une fonction de la forme précédente.
Alors f est dérivable et un calcul montre que f vérifie $(\star)$.

1. La fonction λ est deux fois dérivable sur I et vérifie, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} f''(x) + b\,f'(x) + c\,f(x) &= \big(\lambda''(x) + (2\,r + b)\,\lambda'(x) + (br^2 + br + c)\lambda(x)\big)\,e^{rx} \\ &= e^{rx}\big(\lambda''(x) + (2\,r + b)\,\lambda'(x)\big). \end{aligned}$$

   Ainsi, la fonction f est solution de (E) ssi la fonction λ' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + (2r + b)\,y = d(x)e^{-rx}. \tag{E'}$$

2. D'après l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'équation (E') possède une solution g qui est dérivable sur I, donc continue sur I ; ce qui assure l'existence d'une primitive G sur I.
   La fonction $x \mapsto G(x)e^{rx}$ est alors une solution de l'équation (E)