Table des matières

1 Algèbre

Exercice 1 (Annales khass I.1)**.** *Montrer que* $F:\begin{array}{ccc}\mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^*\\ (p,q) & \mapsto & (2p+1)\,2^q\end{array}$ *est une bijection.*

Exercice 2. *Soient E et F deux ensembles et $f:E\to F$.*
Montrer que f est bijective si, et seulement si, $\forall A\in\mathscr{P}(E),\quad f(C_E^A)=C_F^{f(A)}$.

Exercice 3 (Mines PSI)**. Un isomorphisme.** *Soient E, F, G et H des espaces vectoriels tels que $E=G\oplus H$. Soit $A=\{u\in\mathcal{L}(E,F)\mid G\subset\operatorname{Ker}(u)\}$. Montrer que A est un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(H,F)$.*

Exercice 4 (Annales khass I.6)**.** *Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, avec $\dim E=3$. On suppose $f^2=0$ et $f\neq 0$.*

1. *Quel est le rang de f ?*
2. *Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit* $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

   Indication : *On pourra commencer par choisir $e_3\notin\operatorname{Ker}(f)$.*

Exercice 5 (Annales khass I.10)**. Matrices d'Hadamard.** *Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, telle que :*

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad a_{i,i}>\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|\,.$$

1. *Démontrer que A est inversible.* **Indication :** *Considérer $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X^T=(x_1\ldots x_n)$, tel que $AX=0$ et introduire un indice i_0 tel que $|x_{i_0}|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$.*

2. *Montrer que* $\det(A)>0$.

Exercice 6 (Annales khass I.11, TD)**.** *Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB=0$ et $A+B$ inversible. Montrer que :* $\operatorname{rg}A+\operatorname{rg}B=n$.

Exercice 7 (Annales khass I.12)**.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = A - I_3$.

1. *Exprimer* B^2 *en fonction de* B.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *il existe deux réels* a_n *et* b_n, *qu'on exprimera en fonction de* n, *tels que* $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. *La relation obtenue à la question précédente est-elle encore valable si* n *désigne un entier strictement négatif ?*

Exercice 8 (Annales khass I.13)**.** *Calculer* $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k}$, $T_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1}$ *et* $U_n = \displaystyle\sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2}$.

Indication : *on pourra utiliser les polynômes :*

$$P_0 = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k} X^{3k} \text{ et } P_1 = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} \binom{n}{3k+1} X^{3k+1} \text{ et } P_2 = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} \binom{n}{3k+2} X^{3k+2}.$$

Exercice 9 (Annales khass I.7)**.** *Montrer que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *le polynôme* $(X^2 + X + 1)^2$ *divise le polynôme* $(X+1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.

Exercice 10 (Annales khass I.3)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$

1. *Justifier brièvement que* f *permet de définir un endomorphisme de* $\mathbb{C}_n[X]$.
2. *Pour tout* $P \in \mathbb{C}_n[X]$, *exprimer* $\deg f(P)$ *en fonction de* $\deg P$.
3. *Déterminer* $\operatorname{Ker} f$ *et* $\operatorname{Im} f$. *Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?*
4. *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* $\mathbb{C}_n[X]$ *dans laquelle* f *a pour matrice* $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   N.B. : Dans cette matrice carrée, les coefficients en ligne i *et colonne* $i-1$ *valent* 1 *et les autres valent* 0.
5. *Pour tout* $k \in [\![2, n+1]\!]$, *déterminer* $\operatorname{Ker} f^k$ *et* $\operatorname{Im} f^k$. *Pour quelles valeurs de* $k \in [\![2, n+1]\!]$, *a-t-on* $\operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k = \mathbb{C}_n[X]$ *?*

Exercice 11 (Centrale)**.** *Soient* $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ *telles que* $fg \geq 1$. *Montrer que :* $\left(\displaystyle\int_0^1 f\right) \times \left(\displaystyle\int_0^1 g\right) \geq 1$.

Exercice 12. *Justifier l'existence et calculer le minimum pour* $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *de* $\displaystyle\int_0^1 (t^2-at-b)^2\mathrm{d}t$.

Exercice 13 (Annales khass I.5)**.** *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$, *on pose* $E_n=\mathbb{R}_{2n}[X]$.

1. *Pour* $(P,Q)\in E_n^2$, *on pose* $(P|Q)=\sum\limits_{k=-n}^{n}P(k)Q(k)$. *Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur* E_n.
2. *Soit* $H_n=\left\{P\in E_n \;\middle|\; \displaystyle\int_{-1}^1 P(t)\mathrm{d}t=0\right\}$. *Montrer que* H_n *est un sous-espace vectoriel de* E_n *; quelle est sa dimension ? Donner une base de son orthogonal.*
3. *On prend* $n=1$. *Calculer* $d(X^2,H_1)$.

Exercice 14 (Annales khass I.2)**.** *Soit* $(a_1,\dots,a_n,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$. *Calculer* $\det\begin{pmatrix} x+a_1 & x & \dots & x\\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & x\\ x & \dots & x & x+a_n\end{pmatrix}$.

Exercice 15 (Annales khass I.8)**.** *On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa structure euclidienne usuelle et on note* $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ *sa base canonique.*
Soit u_1,u_2,u_3 *trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$, P *la matrice dans la base* $\mathcal{B}$ *de* $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *défini par :*
$\forall i\in[\![1,3]\!],\ f(e_i)=u_i$.
Soit enfin le déterminant $\Delta=\begin{vmatrix}(u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|u_3)\\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|u_3)\\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|u_3)\end{vmatrix}$.

1. *Exprimer* Δ *à l'aide de* $\det(P)$.
2. *Montrer que* $\Delta\geq 0$.
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $\Delta=0$.
4. *On suppose* (u_1,u_2) *libre et on pose* $d=d(u_3,\mathrm{Vect}(u_1,u_2))$.
   Montrer que $d^2=\frac{\Delta}{\delta}$, *où* $\delta=\begin{vmatrix}(u_1|u_1) & (u_1|u_2)\\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2)\end{vmatrix}$.

Exercice 16 (Annales khass I.9)**.** *Soient* A *et* B *deux matrices carrées d'ordre* $n\in\mathbb{N}^*$. *On suppose que :*

- $AB=BA$ *;*
- B *est nilpotente (c'est-à-dire il existe* $p\in\mathbb{N}$ *tel que* $B^p=0$*).*

1. *Montrer que si* A *est inversible, alors* $A+B$ *est inversible.*
2. *Montrer que si* A *est inversible, alors* $\det(A+B)=\det A$.
3. *Si* A *n'est pas inversible, a-t-on encore* $\det(A+B)=\det A$ *?*

2 Analyse

Exercice 17. *En utilisant les éléments de $\mathbb{U}_7$, exhiber une équation de degré 3 dont $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est solution.*

Exercice 18. 1. *Déterminer une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}$ sur $]0, \pi[$.*
Indication : *On pourra utiliser l'angle moitié.*

2. *Résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation différentielle*

$$\sin(t)y' + y = t\sin(t)(1 + \cos(t)).$$

Exercice 19. Formule de Taylor-Lagrange. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

- *f admet des dérivées jusqu'à l'ordre n sur $[a, b]$;*
- *$f^{(n)}$ est continue sur $[a, b]$;*
- *$f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.*

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + (b - a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c).$$

*Le terme $\dfrac{(b - a)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé **reste de Lagrange**.*

Exercice 20 (Annales khass II.1)**.** *Pour $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $\varphi(n, p) = \left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$.*

1. *Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $v_p := \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n, p)$, puis $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p$.*
2. *Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n := \lim\limits_{p\to+\infty} \varphi(n, p)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.*

Exercice 21 (Annales khass II.2)**.** *Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Déterminer les couples (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) + \sin(\omega t) \\ y'(t) = x(t) - \cos(\omega t). \end{cases} \qquad (*)$$

Exercice 22 (Annales khass II.3)**.** *Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0 vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n + a}{n + b}.$$

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la série de terme général u_n converge.*
Indication : *On pourra considérer la suite de terme général $w_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$. On suppose désormais que (a, b) vérifie cette condition.*

2. *Montrer que* $nu_n \to 0$.

3. *Calculer la somme de la série de terme général* u_n.

Exercice 23 (Annales khass II.4). *Soit* $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. *Démontrer que pour tout* $f \in E$, *et pour tout* $x \in [0,1]$, *il existe* $c \in]0,1[$ *tel que* $f(x) = f''(c)\,\frac{x(x-1)}{2}\cdot$

2. *Montrer qu'il existe* $M > 0$, *que l'on déterminera, tel que :* $\forall f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 |f| \le M \sup_{[0,1]} |f''|$. *Déterminer la meilleure valeur de* M.

Exercice 24 (Annales khass II.5). 1. *Soit* $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ *telle que* $f(0) = 0$. *On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. *Montrer que* $u_n \to f'(0)/2$.

2. *On suppose maintenant que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$, *que* $f(0) = 0$ *et que* $f''(0)$ *existe. Montrer que* $u_n \to f'(0)/2$.

3. *Soient* f *comme en 2. et* $g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$. *Déterminer la limite de* (v_n).

Exercice 25 (Annales khass II.6). *Soit* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

1. *Montrer, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *qu'il existe* $P_n \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Déterminer les racines de* P_n.

2. *Montrer :* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \le n!$.

Exercice 26 (Annales khass II.7). *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0. *Cette suite est-elle monotone ?*

2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{\alpha}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1} g(t)}{n+1}\,\mathrm{d}t,$$
où α *est un réel et* g *une fonction continue sur* $[0,1]$ *à expliciter.*

3. *Donner un équivalent simple de* u_n *lorsque* n *tend vers l'infini.*

Exercice 27 (Annales khass II.8). *Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble*
$$E = \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = \frac{x}{2} + 1\right\}.$$

1. *On suppose que* $f \in E$.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{f(x)}{2}+1$. *(b) Montrer que* f' *est constante.*

2. *Conclure.*

Exercice 28 (Annales khass II.9)**.** *Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble* E *des fonctions* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

1. *On suppose que* $f \in E$*. Montrer que* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et que* f *est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.*

2. *Conclure.*

Exercice 29 (Annales khass II.10, TD)**.** *On définit* f *sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = 1 + \frac{\sin(1/x)}{2}$.

1. *Montrer que* $f(\mathbb{R}^*) \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ *et que* $f \circ f(\mathbb{R}^*) \subset [1,+\infty[$.

2. *Montrer que* f *est* $\frac{1}{2}$*-lipschitzienne sur* $[1,+\infty[$.

3. *Montrer qu'il existe un unique* $\ell \in [1,+\infty[$ *tel que* $f(\ell) = \ell$.

4. *Étudier la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ *et :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Exercice 30 (Annales khass II.11, TD)**.** *Déterminer la nature, selon les réels positifs* a *et* b*, de la série de terme général :*

$$u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+b}.$$

Exercice 31 (Annales khass II.12)**.**

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *l'équation* $x - e^{-x} = n$ *admet une unique solution sur* $\mathbb{R}$*. On note désormais* x_n *cette solution.*

2. *Montrer que* $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

3. *Donner un équivalent simple de* $x_n - n$ *lorsque* n *tend vers l'infini.*

Exercice 32 (Annales khass II.13)**.** *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(1+\sin x)^{\ln x/x} - x}{x^2 \ln x}$.

Exercice 33 (Annales khass II.15)**.** *On pose* $\displaystyle v_n = e - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}$ *et* $\displaystyle u_n = \left(e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\right)^{1/n}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists c_n \in [0,1] :\ v_n = \frac{e^{c_n}}{n!}.$$

2. *Trouver un développement limité à deux termes en* $1/n$ *de* c_n.
   On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *au voisinage de* $+\infty$.

3. *Donner un équivalent simple* w_n *de* u_n*, puis un équivalent de* $u_n - w_n$.

Exercice 34 (Annales khass II.16, environ TD)**.** *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (*).$$

Indication : *On pourra poser $x = e^t$.*

Exercice 35 (Annales khass II.17)**.**

1. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3}$.

2. *On pose* $E = \left\{K > 0 \mid \forall x \geq 0\,,\ \left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right| \leq Kx^3\right\}$. *Déterminer E.*
   On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral :
   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, on a :

$$\forall (a,x) \in I^2, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 36 (Annales khass II.18)**.** *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ f(x+y)f(x-y) = \Big(f(x)f(y)\Big)^2 \qquad (*).$$

1. *Déterminer f si $f(0) = 0$. Quelles sont les autres valeurs possibles pour $f(0)$?*

2. *On suppose $f(0) = 1$.*
   (a) *Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x)$ en fonction de $f(x)$. Montrer que f est à valeurs > 0.*
   (b) *On pose $g = \ln f$. Montrer que :*

$$\forall y \in \mathbb{R}\,,\ \int_0^1 g(x+y)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x-y)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x + 2g(y).$$

   En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   (c) *Déterminer f.*

3. *Déterminer f si $f(0) = -1$.*

Exercice 37 (Annales khass II.19)**.**

1. *Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^{2n} - 1$.*

2. *Soit $r \in \mathbb{R}$. Calculer* $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$.

3. *Calculer, pour $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| \neq 1$,* $I(r) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2r\cos t + r^2\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 38 (Annales khass II.20)**.** *Soit* $f : x \mapsto x^3 + x$*.*

1. *Vérifier que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *dont la réciproque* g *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$*, impaire et strictement croissante.*

2. *Donner un développement limité de* g *à la précision* $o(x^5)$ *en* 0*.*

3. *Donner un développement asymptotique à trois termes de* g *en* $+\infty$*.*

Exercice 39 (Annales khass II.21)**.** *Déterminer :* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\cos x} + \frac{2}{\sin^2 x}\right)$.

Exercice 40 (Annales khass II.22)**.** *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{x} \end{array}$.

1. *Justifier brièvement que* f *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$*.*

2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, il existe un polynôme* $P_n \in \mathbb{R}[X]$ *unitaire de degré* n *tel que*

$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{x^{n+1}} P_n(x).$$

3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

   (a) $P_n + P_n' = X^n$

   (b) $P_n(0) = (-1)^n n!$

4. *En calculant de deux manières* $\displaystyle\int_0^x t^n e^t \, dt$*, déterminer les coefficients du polynôme* P_n*.*

3 Probabilités

Exercice 41. *Une urne contient* 4 *boules indiscernables numérotées de* 0 *à* 3*. On tire simultanément deux boules, et on note* X_1 *et* X_2 *les numéros obtenus. On pose* $X = \min(X_1, X_2)$ *et* $Y = \max(X_1, X_2)$*.*

1. *Déterminer* Ω*,* $X(\Omega)$ *et* $Y(\Omega)$*.*
2. *Soient* $i \in [\![0, 3]\!]$ *et* $j \in [\![0, 3]\!]$*. Déterminer* $\mathrm{P}(X = i, Y = j)$*.*
3. *En déduire les lois de* X *et de* Y*.*
4. *Calculer* $\mathbb{E}(X)$*,* $\mathbb{E}(Y)$*,* $\mathbb{V}(X)$ *et* $\mathbb{V}(Y)$*.*

Exercice 42 (Annales khass III.2)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* X *et* Y *deux variables aléatoires à valeurs dans* $[\![1, n]\!]$*.*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ *la matrice définie par*

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$

Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *un vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à* 1*. On note* $C = AU$ *et* $L = U^T A$*.*

1. *Déterminer les coefficients du vecteur colonne* C *et du vecteur ligne* L*. Quel est le rapport avec les variables* X *et* Y *?*
2. *Montrer que* X *et* Y *sont indépendantes si, et seulement si,* A *est de rang* 1*.*

Exercice 43 (Annales khass III.3)**.** *Soient* k *et* n *deux entiers tels que* $1 \leq n \leq k \leq 2n$*.*
Une troupe de comédiens donne deux représentations de théâtre pour les $2n$ *vacanciers d'un hôtel. Les représentations ont lieu dans une salle de* k *places.*
On suppose que chacun des vacanciers choisit au hasard d'aller à l'une des deux séances. On suppose également que toute personne refusée à la première séance par manque de places se présente à nouveau à la seconde séance.
On note X *la variable aléatoire réelle correspondant aux nombre de vacanciers se présentant à la première séance.*

1. *Donner la loi de* X*.*
2. *Soit* A *l'événement « Toutes les personnes assistent à une représentation ». Calculer* $\mathrm{P}(A)$ *en fonction de* k*.*
3. *Démontrer que* $\mathrm{P}(A) > \frac{1}{2}$*.*

Exercice 44 (Annales khass III.4)**.** *On considère deux urnes* U_1 *et* U_2 *contenant chacune* n *boules numérotées de* 1 *à* n*, avec* $n \geq 2$*. On tire une boule dans chaque urne et on note* X_i *le numéro de la boule tirée dans l'urne* U_i*. On note* E_n *l'événement «* X_1/X_2 *est un entier ».*

1. Calculer $\mathrm{P}(E_2)$, $\mathrm{P}(E_3)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(E_n)$. Le résultat sera donné sous la forme d'une somme.
3. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n$.

4. Donner la limite de $\mathrm{P}(E_n)$ lorsque $n \to +\infty$, ainsi qu'un équivalent.

Exercice 45 (Annales khass III.5)**.** *La variable aléatoire X est régie par le tirage d'un dé à six faces parfaitement équilibré de sorte que :* $\forall i \in \{1, 2, \dots, 6\},\ p_i = \mathrm{P}(X = i) = \dfrac{1}{6}$.
La variable aléatoire Y est régie par le tirage d'un dé à six faces truqué de sorte que :
$\forall j \in \{1, 2, \dots, 6\},\ \mathrm{P}(Y = j) = q_j \geq 0,$ *avec* $\sum\limits_{j=1}^{6} q_j = 1$.
On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. *Étant donné un entier naturel p non nul, montrer qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [\![1, 6]\!]$ tel que $p = 6q + r$.*
2. *On construit un « dé virtuel » à six faces de la façon suivante : si $X + Y = 6\,q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 2, \dots, 6\}$, alors $V = r$.*
   Montrer que $\mathrm{P}(V = 1) = \mathrm{P}(V = 2) = \cdots = \mathrm{P}(V = 6) = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 46 (Annales khass III.6)**.** *Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On considère n papiers numérotés de 0 à $n - 1$. Sur le papier numéro k on écrit le nombre complexe* $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$*. On place ces papiers dans une urne et on tire un papier au hasard. On note X la partie réelle du complexe obtenu et Y sa partie imaginaire.*

1. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.*
2. *Est-il vrai que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$?*
3. *Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?*