Programme de colle n° 10

semaine du 9 décembre 2024

Remarque pour les colleurs.
Le thème de la colle est « suites numériques (de nombres réels ou complexes, donc) » et le TOUT début de l'algèbre linéaire
Pour les colleurs. Soyez indulgents, nous venons tout juste de commencer le TD sur les espaces vectoriels. Attention, pas de dimension finie pour l'instant. J'aimerais que vous vérifiez que chaque élève sait déterminer une famille génératrice d'un sev de $\mathbb{K}^n$ donné par des équations.
Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Un peu du chapitre « Espaces vectoriels »

- Voici des parties de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de E ?

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}) \qquad \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

- Soit F une partie de E stable par combinaison linéaire. On a : $0_E \in F \iff F$ est non vide.
- Un sous-espace vectoriel de E est un ensemble $\begin{cases} \text{fini} & \text{s'il est réduit à } \{0_E\} \\ \text{infini} & \text{sinon} \end{cases}$
- L'intersection et la somme de deux sev de E est un sev de E.
- Pas de Loi de Morgan avec la somme et l'intersection d'espaces vectoriels $\cancel{H \cap (F+G) = H \cap F + H \cap G}$
  En revanche, une inclusion est toujours vraie, laquelle ?
  Donner un contre-exemple dans $E = \mathbb{R}^2$.
- Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans E.
- Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $H = \{M \in E \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(I)$. Montrer que H et D sont supplémentaires dans E.
- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Déterminer une base de $H = \left\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(A) = 0\right\}$.
- Soit $G = \left\{X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\right\}$ où $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer une base de G.
- (vu lundi en classe) Preuve du résultat suivant
  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
  - *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*
  - *Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors l'image réciproque $f^{(-1)}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- (vu lundi en classe) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application *linéaire*.

$$f \text{ est injective} \iff \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}.$$

- (Vu lundi en classe) Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.
  - On a toujours :

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$$

  - On a toujours :

$$\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$$

Nombres réels et suites numériques

Contenus	Capacités & commentaires
a) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$. Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure). Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	Notations $\sup X$, $\inf X$. On convient que $\sup X = +\infty$ si X est non majorée.
b) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\big(\lvert u_n\rvert\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite. Unicité de la limite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Notations $u_n \longrightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Utilisation d'une majoration de la forme $\lvert u_n - \ell\rvert \leqslant v_n$, où (v_n) converge vers 0.
d) Suites monotones	
Théorème de la limite monotone. Théorème des suites adjacentes.	
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès. Tout réel est limite d'une suite de rationnels.
e) Suites extraites	
Suite extraite.	Tout développement théorique sur les suites extraites est hors programme.
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors (u_n) tend vers ℓ. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.
f) Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
g) Suites particulières	
Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.	Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.
Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Présentation de l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ sur quelques exemples simples. Représentation géométrique. Si (u_n) converge vers un élément ℓ en lequel f est continue, alors $f(\ell) = \ell$.	Cette étude est l'occasion d'introduire la notion d'intervalle stable par une fonction. Pour l'étude de la monotonie de (u_n), on souligne l'intérêt, d'une part, de l'étude du signe de $f(x) - x$, et, d'autre part, de l'utilisation de la croissance éventuelle de f.