Programme de colle n° 11

semaine du 6 janvier 2025

Le thème de la colle est « **les deux premiers épisodes d'algèbre linéaire** » = espaces vectoriels et applications linéaires

Pour les colleurs. Nous n'avons pas encore traité la « dimension ». Donc des résultats comme

> *Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.*
>
> *Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.*

ne sont pas encore connus des élèves.

Pour être plus précis, voir le programme dans les pages suivantes.

Pour les élèves. Je mets en page suivante, pas mal de petits exemples à maîtriser avant d'aller en colle.

- Une famille est liée si et seulement si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- (vu lundi en classe) Preuve du résultat suivant
  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
  – *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*
  – *Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors l'image réciproque $f^{(-1)}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application *linéaire*. On a $\quad f$ est injective $\iff \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
- **Suite récurrente linéaire d'ordre 2.** Soit $b, c \in \mathbb{K}$. Soit $F_{b,c} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0\right\}$.

  Savoir montrer rapidement (= donner les grandes lignes de la preuve) que l'application $f : \begin{array}{ccc} F_{b,c} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$

  est un isomorphisme.
- **Une proposition.**
  Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que E est muni d'une base finie $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_n)$.
  – f est injective $\iff$ la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de F.
  – f est surjective $\iff$ la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille génératrice de F.
  – f est bijective $\iff$ la famille $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une base de F.
- **Un petit théorème des noyaux.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\,\mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
  Montrer que
  $$E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_E)$$
- **Projecteur.**
  Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
  – On a $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Im} p$.
  – Le projecteur p fait naître la décomposition en somme directe de E :
  $$E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p \qquad \text{que l'on peut encore écrire} \qquad E = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker} p$$
- **Involution (ou symétrie).**
  Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ une involution.
  L'involution s fait naître la décomposition en somme directe de E :
  $$E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$$
- **Forme linéaire et hyperplan.**
  Soit φ une forme linéaire non nulle sur E.
  Pour tout vecteur $v_0 \in E$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker}\varphi$, on a
  $$E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Vect}(v_0)$$
- **Application linéaire canoniquement associée à une matrice.**
  Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
  Considérons $f_A : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$
  (c'est *l'application linéaire canoniquement associée à la matrice* A).

  Décrire le noyau de f_A.
  Déterminer une famille génératrice de $\operatorname{Im} f_A$.

  Savoir traiter le cas particulier de la matrice $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$.

Autres questions qu'il est bon de maîtriser avant d'aller en colle

- Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $H = \{M \in E \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ et $D = \operatorname{Vect}(I)$. Montrer que H et D sont supplémentaires dans E.
- Déterminer une base de $H = \left\{A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(A) = 0\right\}$.
- Soit $G = \left\{X \in \mathscr{M}_{5,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\right\}$ où $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 6 \end{bmatrix}$. Déterminer une base de G.
- **Un petit exemple.** Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array}$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^2)$ et déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.
- **Deux exemples**

  Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y,0) \end{array}$. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^2$. A-t-on $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$?

  L'endomorphisme $f: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & M + M^\top \end{array}$ est-il un projecteur ? A-t-on $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$?

Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Tout développement théorique sur les espaces de dimension infinie est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.	
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	
Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.	Notation $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
c) Familles finies de vecteurs	
Famille génératrice.	
Famille libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme de deux sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires.	On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

C - Applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	Notation $\text{Im}\, u$.
Noyau d'une application linéaire.	Notation $\ker u$. Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille finie génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\text{Im}\, u = \text{Vect}\,(u(x_i))_{i\in I}$.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations sur les endomorphismes : combinaison linéaire, composition. Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3. Notation $\mathrm{GL}(E)$. On vérifie les propriétés lui conférant une structure de groupe, mais la définition axiomatique des groupes est hors programme. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.

c) Détermination d'une application linéaire lorsque E est de dimension finie

Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E de dimension finie et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$. Espaces vectoriels isomorphes	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	

f) Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Forme linéaire. Hyperplan. J'ai (volontairement) compliqué, en donnant la définition en dimension quelconque comme étant un sev admettant une droite vectorielle comme supplémentaire. Le programme mentionne « en dim finie ». J'ai donc désobéi !	Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	